F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

3-4

ANUL V

IULIE — DECEMBRIE 1954

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

3-4

ANUL V

IULIE — DECEMBRIE 1954

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Începînd cu numărul de față, revista Institutului de mecanică aplicată apare sub titlul:

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

și va cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, rezistența materialelor, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, frecare, ungere, uzură).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviație, mecanica fluidelor, ventilație, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacție, utilizarea energiei eoliene).

— Construcții de mașini (cinematica mecanismelor, studiul solicitărilor în diferite mașini și metode moderne de calcul ale acestora, coeficienți de siguranță, procese tehnologice, automatizare, mecanizare).

— Mecanica construcțiilor (metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studii asupra problemelor specifice materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executare a lucrărilor de construcții).

— Hidrotehnică și mașini hidraulice (hidraulică, construcții hidrotehnice, irigații, turbine hidraulice și pompe, amenajarea cursurilor de apă).

Revista urmărește stimularea activității științifice, precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în 3 exemplare, dactilografiate la 2 rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru reviste se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă și franceză. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză, germană, etc.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București str. C. Mille nr. 15 raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul V, nr. 3—4 Iulie—decembrie 1954

SUMAR

Pag.

AERODINAMICĂ

E. CARAFOLI şi M. IONESCU, Rezistenţa aripilor triunghiulare dublu conice, cu panta variabilă, în curent supersonic 285
T. OROVEANU, Determinarea circulaţiei pentru o aripă în prezenţa unui suflu axial de secţiune circulară 307
N. PATRAULEA, Determinarea scurgerilor în jurul ecranelor permeabile date 315

MECANICA ELICOPTERULUI

AL. MARINESCU, Influenţa efectului giroscopic al rotorului în stabilitatea longitudinală a elicopterului 325

REZISTENŢA MATERIALELOR

GH. MANEA, GH. BUZDUGAN şi P. FREUND, Metode ameliorate de calcul la încovoiere pentru bare de fonte, cupru şi alame, pe baza curbelor caracteristice ridicate experimental 341
N. S. PÎRVULESCU, Cazurile particulare ale unei clase de funcţii cu aplicaţii la flambajul tijelor 377
M. GELLER, Despre unele încercări pentru stabilirea influenţei crestăturilor şi a coroziunii asupra rezistenţei la oboseală a prăjinilor de foraj ecruisate 393

FRECARE ŞI UZURĂ

ST. SEBEŞAN, Uzura bandajelor şi a şinelor 403
V. N. CONSTANTINESCU, Consideraţii asupra calculului lagărelor fără joc radial 425

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

A. FROIMESCU şi M. WEISSENBERG, Grinzi principale pentru poduri din beton precomprimat 453
A. FROIMESCU, Calculul pierderii de tensiune datorită preîntinderii succesive a fasciculelor de armături 465

HIDROTEHNICĂ

D. DUMITRESCU, ŞT. ZAREA şi R. TOTH, Studii asupra disipatorilor de energie aşezaţi în serie 483
D. DUMITRESCU şi P. GEORGESCU, Studii şi încercări pe modele de descărcători de ape mari 503
M. KAHAN, Contribuţii la metoda cercetării construcţiilor hidrotehnice cu ajutorul aerului 521
R. PRIŞCU, Asupra barajelor de greutate cu rosturi lărgite 537

TERMOCINETICĂ

L. HAMBURGER, Asupra unor transformări de variabile în legătură cu ecuaţia căldurii 567

REFERATE

A. NECŞULEA, Mijloace de protecţie colectivă contra zgomotului din industrie 589

RECENZII 605

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Начиная с настоящего выпуска журнал Института прикладной механики Академии РНР выходит под названием

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

и будет содержать нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, сопротивление материалов, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, трение, смазка, износ).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, использование энергии ветра).

— Машиностроение (кинематика механизмов, исследование напряжения в различных машинах и современные методы расчета последнего, коэффициенты запаса, технологические процессы, автоматизация, механизация).

— Строительную механику (методы статического и динамического расчета сооружений, исследования характерных задач неоднородных материалов, геомеханика, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидротехнику и гидравлические машины (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, руслообразование).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также распространения ценных работ, принимая с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в 3 экземплярах, написанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять краткое содержание на румынском, русском или французском языках. Краткое содержание должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том V, № 3—4 Июль—декабрь 1954

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

АЭРОДИНАМИКА

Е. КАРАФОЛИ и М. ИОНЕСКУ, Сопротивление двуконусных треугольных крыльев с переменным наклоном в потоке сверхзвуковой скорости 285

Т. ОРОВЯНУ, Определение циркуляции вокруг крыла при наличии аксиальной струи кругового сечения 307

Н. ПАТРАУЛЯ, Определение обтекания вокруг данных проницаемых экранов 315

МЕХАНИКА ГЕЛИКОПТЕРОВ

А. МАРИНЕСКУ, Влияние гироскопического эффекта ротора на продольную устойчивость геликоптера 325

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Г. МАНЯ, Г. БУЗДУГАН и П. ФРЕУНД, Усовершенствованные методы расчета сопротивления на изгиб чугунных, медных и латунных брусьев на основании экспериментально выведенных характеристических кривых 341

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Частные случаи класса функций, применяемых при изгибе стержней 377

М. ГЕЛЛЕР, О некоторых испытаниях, произведенных с целью установления влияния насечек и коррозий на сопротивление усталости холоднокованных бурильных труб 393

ТРЕНИЕ И ИЗНОС

Ш. СЕБЕШАН, Износ бандажей и рельс 403

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расчетах подшипников без радиального зазора 425

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. ФРОЙМЕСКУ и М. ВЕЙССЕНБЕРГ, Главные мостовые балки из предварительно сжатого бетона 453

А. ФРОЙМЕСКУ, Расчет потери напряжения, вызванного предварительным последовательным натяжением пучка арматуры 465

ГИДРОТЕХНИКА

Д. ДУМИТРЕСКУ, Ш. ЗАРЯ и Р. ТОТ, Исследования последовательных установок разрушителей энергии 483

Д. ДУМИТРЕСКУ и П. ДЖОРДЖЕСКУ, Исследование и испытание моделей устройств для стока вод с высоким уровнем 503

М. КАГАН, Метод исследования гидротехнических моделей воздухом 521

Р. ПРИШКУ, По вопросу гравитационных плотин с расширенными швами 537

ТЕРМОКИНЕТИКА

Л. ГАМБУРГЕР, О преобразовании переменных, относящихся к уравнениям теплопроводности 567

РЕФЕРАТЫ

А. НЕКШУЛЯ, Способы коллективного ограждения от действия шума в промышленности 589

РЕЦЕНЗИИ 605

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

A partir du numéro présent, la revue de l'Institut de Mécanique Appliquée paraîtra sous le titre de

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

et comprendra des études de mécanique appliquée, notamment:

— Mécanique générale (élasticité, résistance des matériaux, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, frottement, lubrification, usure);

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne, etc.);

— Construction mécanique (cinématique des mécanismes, méthodes modernes de calcul des différentes machines, processus technologiques, automatisation, etc.);

— Mécanique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, géotechnique, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction);

— Hydrotechnique et machines hydrauliques (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés, dactylographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, Rue Constantin Mille 15, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome V, nº 3—4 Juillet—décembre 1954

SOMMAIRE

Page

AÉRODYNAMIQUE

E. CARAFOLI et M. IONESCU, Traînée des ailes triangulaires doublement coniques, à pente variable, en courant supersonique 285

T. OROVEANU, La détermination de la circulation pour l'aile en présence d'un souffle axial de section circulaire 307

N. PATRAULEA, L'écoulement autour des écrans perméables donnés . . . 315

MÉCANIQUE DE L'HÉLICOPTÈRE

AL. MARINESCU, Influence de l'effet gyroscopique du rotor sur la stabilité longitudinale de l'hélicoptère 325

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

GH. MANEA, GH. BUZDUGAN et P. FREUND, Méthodes améliorées, basées sur les courbes caractéristiques, levées expérimentalement, pour le calcul de la flexion des barres de fonte, de cuivre et de laiton . . . 341

N. S. PÎRVULESCU, Les cas particuliers d'une classe de fonctions avec applications au flambage des tiges 377

M. GELLER, Sur certains essais pour établir l'influence des encoches et de la corrosion sur la résistance à la fatigue des tiges de forage écrouies . 393

FROTTEMENT ET USURE

ST. SEBEŞAN, L'usure des bandages et des rails 403

V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur le calcul des paliers sans jeu radial 425

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

A. FROIMESCU et M. WEISSENBERG, Poutres maîtresses pour ponts en béton précontraint 453

A. FROIMESCU, Calcul de la perte de tension due aux précontraintes successives des faisceaux d'armature 465

HYDROTECHNIQUE

D. DUMITRESCU, ŞT. ZAREA et R. TOTH, Étude sur les dissipateurs d'énergie en chaîne 483

D. DUMITRESCU et P. GEORGESCU, Études et essais sur des modèles d'ouvrages d'évacuation des crues 503

M. KAHAN. Contributions à la métnode d'étude des constructions hydrotechniques à l'aide de l'air 521

R. PRIŞCU, Sur les barrages-poids à joints creux 537

THERMOCINÉTIQUE

L. HAMBURGER, Sur certaines transformations de variables relatives à l'équation de la chaleur 567

EXPOSÉS

A. NECŞULEA, Moyens de protection collective contre le bruit dans l'industrie 589

COMPTES RENDUS 605

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN E. CARAFOLI — redactor responsabil;
R. BOGDAN; M. ARCAN; N. TIPEI; M. MIHAILESCU

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

AERODINAMICĂ

REZISTENŢA ARIPILOR TRIUNGHIULARE DUBLU-CONICE, CU PANTA VARIABILĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC

DE

E. CARAFOLI şi M. IONESCU

1. MODUL DE GENERARE AL ARIPII TRIUNGHIULARE CONICE

Să considerăm o aripă triunghiulară, generată în partea anterioară de un con cu vîrful în O, avînd directricea $BCAA'$, simetrică faţă de BC iar în partea posterioară, de o suprafaţă de închidere BAC, sprijinită pe muchia ascuţită BC (fig. 1).

În cazul general al unei suprafeţe de închidere oarecare, calculul rezistenţei aripii prezintă dificultăţi de neînvins prin mijloacele curente ale analizei, şi este în tot cazul extrem de laborios pentru aplicaţii practice; de aceea, vom utiliza o metodă de închidere, care simplifică considerabil problema şi care duce la rezultate explicite practice, aşa cum s-a arătat într-o lucrare anterioară relativă la aceeaşi problemă [1].

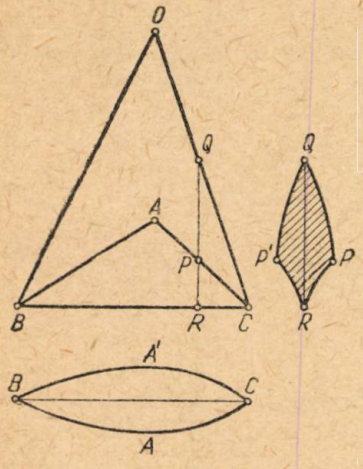


Fig. 1

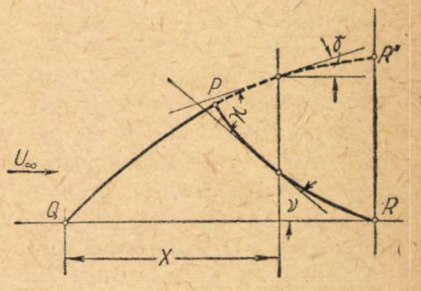


Fig. 2

În acest sens, vom considera o secţiune QPR prin aripa definită mai sus (fig. 1 şi 2). Planul de secţiune taie conul anterior după curba QP şi suprafaţa de închidere după curba PR. În absenţa suprafeţei de închidere, curba QR s-ar prelungi prin curba PR'.

Panta aripei faţă de direcţia curentului este definită de tangentele la aceste curbe Diferenţa de pantă dintre curba virtuală PR' şi curba de închidere PR, pentru aceeaşi abscisă X, va fi

$$\varkappa = \nu + \gamma \tag{1}$$

Grosimea maximă a aripii fiind presupusă mică faţă de coardă şi unghiurile γ şi ν fiind de asemenea mici, vom putea face următoarea construcţie a curbei de închidere PR: avînd A drept vîrf, cu aceeaşi directrice Z a conului anterior (cu vîrful în O), construim un nou con. Planul QPR taie acest nou con după curba $P'R'$ (fig. 3). Să ducem linia dreaptă $P'R$ şi să facem segmentul nedeformabil $E'F'$ să alunece pe suportul său, astfel ca F' să coincidă cu F. În acest caz, punctul E' ajunge în E, care este locul geometric al curbei de închidere, cînd F' descrie curba $P'R'$. Este uşor de văzut că, în aceste condiţii, unghiurile fiind mici, cele

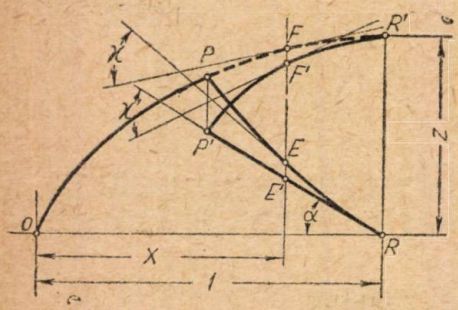


Fig. 3

două unghiuri $\varkappa$ şi $\varkappa'$ sînt egale. Într-adevăr, dacă notăm cu

$$\zeta = \zeta(X), \quad \zeta_1 = \zeta_1(X), \quad \zeta_2 = \zeta_2(X), \tag{2}$$

respectiv ecuaţiile curbelor PR', $P'R'$, PR, vom avea

$$\zeta - \zeta_1 - \zeta_2 = -\operatorname{tg}\alpha\,(1 - X) \approx -\alpha\,(1 - X). \tag{3}$$

Derivînd, obţinem mai departe

$$\frac{d\zeta_1}{dX} + \alpha = \frac{d\zeta}{dX} - \frac{d\zeta_2}{dX}, \tag{4}$$

de unde, observînd că primul membru este egal cu $\varkappa'$, iar al doilea cu $\varkappa$, rezultă

$$\varkappa = \varkappa'. \tag{5}$$

Să determinăm acum acest unghi $\varkappa$, care defineşte suprafaţa de închidere şi care reprezintă deviaţia curentului virtual de pe conul anterior, dacă acesta ar fi fost prelungit. În acest sens, reducem triunghiul aripii la o scară, astfel ca înălţimea lui totală (coarda mediană a aripii) să fie egală cu unitatea; panta γ a secţiunilor prin conul anterior (cu vîrful în O), într-un punct H pe BC (fig. 4) este o funcţie de y şi este dată de relaţia

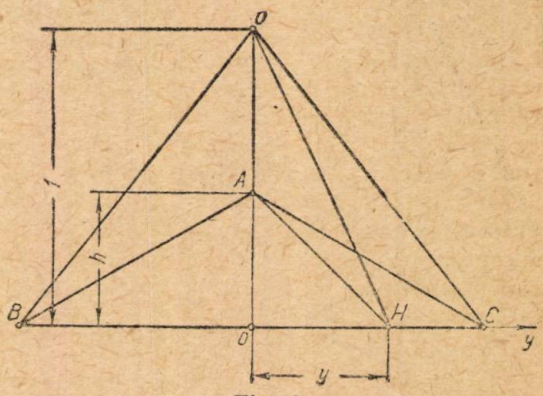


Fig. 4

$$\gamma = \gamma(y) = Z - y\frac{dZ}{dy}, \tag{6}$$

unde Z este cota directricei conului în planul $X = 1$. Pentru conul cu vîrful în A,

panta în punctul considerat crește în raportul $\frac{\overline{oO}}{\overline{oA}} = \frac{1}{h}$, deoarece, aducînd și triunghiul acestei aripi la o scară la care înălțimea lui devine egală cu unitatea, directricea Z_1 și y_1 se măresc în aceeași proporție și, prin urmare,

$$\varkappa = Z_1 - y_1 \frac{dZ_1}{dy_1} = \frac{1}{h}\left(Z - y\frac{dZ}{dy}\right) = \frac{\gamma}{h}. \qquad (7)$$

2. CONDIȚIILE DE SCURGERE ÎN JURUL ARIPII

Generarea aripii prin metoda de mai sus ne conduce la următoarele considerații asupra scurgerii:

Viteza U_∞ de la infinit este paralelă cu planul OBC; întreaga suprafață anterioară este supusă condițiilor de scurgere conică în jurul aripii conice cu vîrful în O (fig. 5). Să presupunem acum că acest con se continuă pe întreaga aripă și acoperă deci și suprafața posterioară care, astfel privită, constituie o deviație față de primul con și față de scurgerea conică datorită acestuia *).

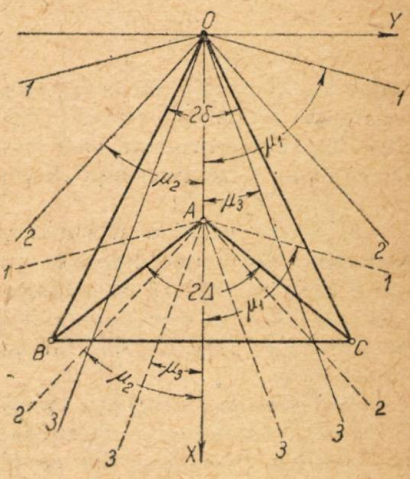


Fig. 5

Vom observa mai întîi că suprafața conului anterior este foarte aplatisată și o putem asimila în primă aproximație cu o suprafață plană pe care viteza diferă foarte puțin de viteza de la infinit. Într-adevăr, notînd cu u, v, w, componentele vitezei de perturbație, vom putea scrie

$$V = \sqrt{(U_\infty + u)^2 + v^2 + w^2} \approx U_\infty + u \qquad (8)$$

adică viteza pe acest con diferă de U_∞ numai cu viteza de perturbație axială, care este presupusă foarte mică față de U_∞.

În aceste condiții, deși conul posterior A s-ar găsi într-un curent neomogen V, totuși viteza de perturbație axială în jurul lui va conține drept termen de primul ordin, acela rezultat din mișcarea conică în jurul conului A așezat într-un curent U_∞. Deci, în primă aproximație, se pot neglija termenii secundari proveniți din vitezele de perturbație datorită primului con.

În concluzie, problema aripii conice generată după metoda de mai sus, se reduce la efectul primei mișcări conice datorită conului cu vîrful în O, extins pe întreaga suprafață a aripii, și la efectul mișcării conice datorită conului cu vîrful în A. În aceste condiții se pot ivi trei cazuri de studiu (fig. 5):

1) Unghiul Mach este mai mare ca semiunghiul $\widehat{BAC}$, adică $\mu = \mu_1 > \Delta > \delta$.

2) Unghiul Mach este mai mic decît semiunghiul $\widehat{BAC}$, dar mai mare decît semiunghiul $\widehat{BOC}$, adică $\delta < \mu = \mu_2 < \Delta$.

3) Unghiul Mach este mai mic decît semiunghiul $\widehat{BOC}$, adică $\Delta > \delta > \mu = \mu_3$.

*) Vom neglija în acest studiu, efectele perturbatorii suplimentare datorite reflexiei undelor la întîlnirea lor cu bordurile de atac ale ambelor suprafețe.

3. REZISTENŢA DE UNDĂ

Să considerăm o secţiune QPR (fig. 6); rezistenţa corespunzătoare unui element de suprafaţă $d\sigma$ pe conul anterior va fi

$$dR = (p - p_\infty) \sin\gamma \, d\sigma \approx (p - p_\infty)\gamma \, d\sigma, \tag{9}$$

unde p_∞ este presiunea de la infinit; analog, pe partea posterioară, după punctul P, avem

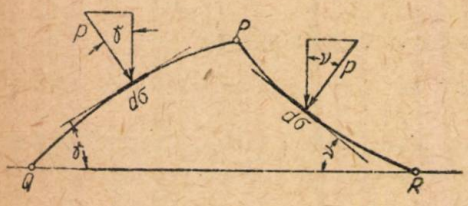


Fig. 6

$$dR = -(p - p_\infty)\nu \, d\sigma. \tag{10}$$

Se ştie că, în prima aproximaţie, avem

$$p - p_\infty = -\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \cdot 2\frac{u}{U_\infty}, \tag{11}$$

ρ_∞ fiind densitatea la infinit.

Cunoscînd u şi ν, acesta din urmă fiind dat de relaţiile (1) şi (7) şi ţinînd seama de condiţiile de scurgere stabilite anterior, vom calcula, prin integrare, rezistenţa totală pe ambele feţe ale aripii. Pentru aceasta vom face în prealabil cîteva observaţii simple considerînd figura 7:

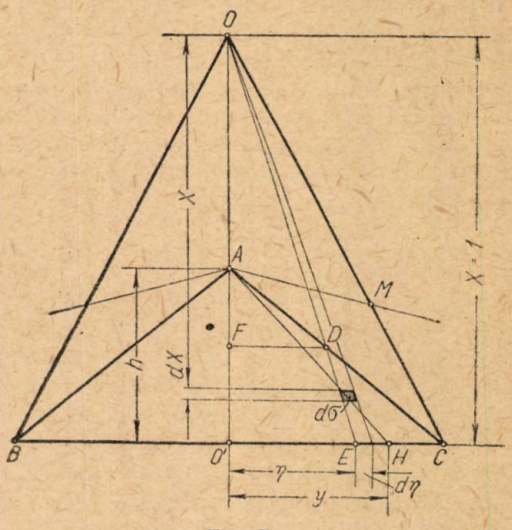


Fig. 7

1) Viteza axială u şi panta γ provenind din conul anterior cu vîrful în O, nu variază de-a lungul unei raze ieşite din acest punct; deci pe o astfel de rază ele sînt funcţii numai de η.

2) Viteza de perturbaţie axială u' datorită suprafeţei de închidere, şi unghiul $\varkappa$ provenind din conul posterior cu vîrful în A, nu variază de-a lungul unei raze ieşite din acest punct; deci pe acest traseu ele sînt funcţii numai de y.

3) Unghiul $\varkappa$ de-a lungul lui DE, respectiv panta γ de-a lungul lui AH, sînt funcţii de X prin intermediul lui y respectiv η.

4) Pentru elementul de suprafaţă $d\sigma$ se deduc cu uşurinţă expresiile

$$d\sigma = X \cdot dX \cdot d\eta = \frac{X - (1 - h)}{h} dX \cdot dy. \tag{12}$$

Pentru calculul rezistenţei, vom urmări acum raţionamentul nostru indicat în lucrarea anterioară [1]. Astfel, luînd în considerare prima mişcare conică al cărei efect se întinde pe întreaga aripă, rezistenţa rezultată se obţine integrînd relaţiile (9) şi (10) şi apoi adunîndu-le. Rezistenţa totală datorită acestei mişcări este dată de expresia

$$R = 4\iint_{OAC}(p - p_\infty)\gamma \, d\sigma - 4\iint_{AO'C}(p - p_\infty)\nu \, d\sigma, \tag{13}$$

care ținînd seama de relațiile (1) și (11) devine

$$R = -4\cdot\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2\cdot 2\iint_{OO'C}\frac{u}{U_\infty}\gamma\,d\sigma + 4\cdot\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2\cdot 2\iint_{AO'C}\frac{u}{U_\infty}\varkappa\,d\sigma = \tag{14}$$
$$= R_1 + R_2,$$

unde am notat cu R_1 primul termen din membrul al doilea, iar cu R_2 al doilea termen. În lumina observațiilor de mai sus, introducînd schimbarea de variabilă $\eta = l\lambda$, vom găsi pentru coeficientul unitar de rezistență corespunzător lui R_1,

$$Cx_1 = \frac{R_1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} = -\frac{8}{l}\iint_{OO'C}\frac{u}{U_\infty}\gamma\,d\sigma = -4\int_0^1\frac{u}{U_\infty}\gamma\,d\lambda, \tag{15}$$

unde S reprezintă suprafața aripii care este egală cu l,

$$S = 2l\times 1\times\frac{1}{2} = l, \tag{16}$$

iar pentru cel corespunzător lui R_2, respectiv

$$Cx_2 = \frac{R_2}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} = \frac{8}{l}\iint_{AO'C}\frac{u}{U_\infty}\varkappa\,d\sigma = 8\int_0^1\frac{u}{U_\infty}d\lambda\int_{X_0}^1\varkappa\,X\,dX, \tag{17}$$

unde am notat

$$X_0 = \overline{OF} = \frac{(1-h)l}{l-h\eta} = \frac{1-h}{1-h\lambda}. \tag{18}$$

Să trecem acum la partea posterioară afectată de a doua mișcare conică cu vîrful în A. Ca și mai sus, vom putea scrie, notînd cu u' viteza de perturbație axială,

$$dR' = -(p-p_\infty)\nu d\sigma = -(p-p_\infty)\varkappa d\sigma + (p-p_\infty)\gamma d\sigma \tag{19}$$

de unde, integrînd, rezultă

$$R' = 4\cdot\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2\cdot 2\iint_{AO'C}\frac{u'}{U_\infty}\varkappa d\sigma - 4\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2\cdot 2\iint_{AO'C}\frac{u'}{U_\infty}\gamma d\sigma = \tag{20}$$
$$= R_1' + R_2'$$

unde R_1' și R_2' sînt respectiv primul și al doilea termen din membrul doi. Cu aceleași observații de mai sus și cu substituția $y = l\lambda$, vom deduce respectiv,

$$C'_{x_1} = \frac{R_1'}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} = \frac{8}{l}\iint_{AO'C}\frac{u'}{U_\infty}\varkappa d\sigma = 4h\int_0^1\frac{u'}{U_\infty}\varkappa d\lambda, \tag{21}$$

pentru termenul întîi şi,

$$C'_{x_2} = \frac{R_2}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} = -\frac{8}{l}\iint_{AO'O}\frac{u'}{U_\infty}\gamma d\sigma = \tag{22}$$

$$-\frac{8}{h}\int_0^1 \frac{u'}{U_\infty}d\lambda\int_{1-h}^{1}\gamma\,[X-(1-h)]\,dX$$

pentru termenul al doilea.

În sfîrşit, pentru cazul în care conul Mach cu vîrful în A acoperă o porţiune din suprafaţa anterioară $OBAC$, va trebui să extindem integrala C'_2 şi la domeniul AMC. Aceasta revine la a adăuga la R'_2 integrala

$$C_i = \frac{R_i}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} = -\frac{8}{h}\int_1^{\lambda_1}\frac{u'}{U_\infty}d\lambda\int_{1-h}^{X_1}\gamma\,[X-(1-h)]\,dX, \tag{23}$$

unde am notat

$$X_1 = \frac{(1-h)\,y}{y-hl} = \frac{(1-h)\,\lambda}{\lambda-h}. \tag{24}$$

Rezistenţa totală va fi deci

$$R_t = R_1 + R_2 + R'_1 + R'_2 + R_i, \tag{25}$$

iar coeficientul unitar de rezistenţă va fi dat de expresia

$$C_{x_t} = \frac{R_t}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} = \frac{R_t + R_2 + R'_1 + R'_2 + R_i}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 l}. \tag{26}$$

4. CALCULUL VITEZEI AXIALE DE PERTURBAŢIE

În calculul acestei viteze, vom folosi metoda analogiei hidrodinamice [2].

Să considerăm o aripă conică indefinită (fig. 8), simetrică faţă de planul OXY. Panta într-un punct oarecare al acestei aripi, este dată de expresia

$$\gamma = \frac{dZ_r}{dX}. \tag{27}$$

Mişcarea în jurul aripii fiind admisă conică, este suficient să cunoaştem caracteristicile ei în planul $X = 1$, plan pe care-l vom denumi ozy. Notînd cu z cota directricei conului în acest plan, deducem uşor, urmărind figura, următoarele relaţii

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{z}{a} = \frac{z}{d}\cos k \quad \operatorname{tg}\varkappa = \frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{c+y} = \frac{z}{d}\sin k = \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}k = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{c} \tag{28}$$

sau încă, γ fiind mic,

$$\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma = z - y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}. \tag{29}$$

Avînd astfel definită panta în fiecare punct al aripii, să trecem acum la calculul vitezelor de perturbație u, v, w ale mișcării conice din jurul aripii.

Fie U_∞, viteza curentului la infinit, a_∞ viteza sunetului în condițiile curentului de la infinit, M numărul Mach și B un coeficient definit de relațiile de mai jos

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty},\quad B = \sqrt{M_\infty^2 - 1},\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{B} = R, \tag{30}$$

R fiind raza conului Mach în planul oyz.

Prin transformarea lui Busemann,

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2},\quad (r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2), \tag{31}$$

interiorul cercului de rază $R = \dfrac{1}{B}$, din planul oyz se transformă în interiorul cercului de rază $\rho = 1$, din planul $\omega\eta\zeta$. În acest din urmă plan, funcțiile u, v, w devin funcții armonice de η și ζ și ca atare ele pot fi considerate ca fiind părțile reale ale unor funcții analitice de variabilă complexă $\xi = \eta + i\zeta$, fie

$$\begin{aligned} u + iu' &= f(\xi),\quad v + iv' = g(\xi),\\ w + iw' &= h(\xi), \end{aligned} \tag{32}$$

u', v', și w' fiind conjugatele armonice ale lui u, v, w.

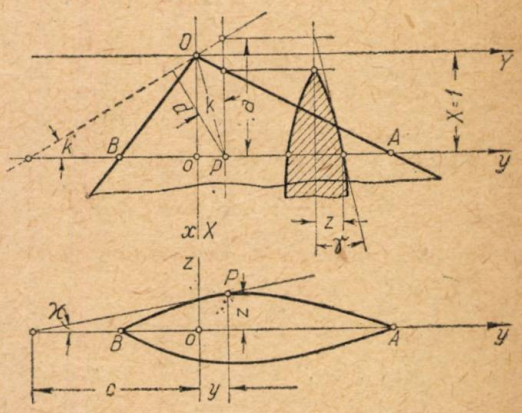


Fig. 8

Din proprietățile mișcărilor irotaționale se deduce

$$v + iv' = -\frac{B}{2}\int\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\mathrm{d}f,\quad w + iw' = \frac{iB}{2}\int\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\mathrm{d}f. \tag{33}$$

Să ne oprim asupra acestor funcții. Una din condițiile la limită cere ca viteza verticală pe aripă să fie

$$w = \pm\gamma U_\infty \tag{34}$$

semnul (+) fiind pentru extrados și semnul (−) pentru intrados. Grosimea și curbura aripii fiind presupuse mici, vom admite că urma aripii pe planul oyz, respectiv pe planul $\omega\eta\zeta$, se confundă cu axa absciselor.

În aceste condiții, dacă pe un interval oarecare al aripii, γ este constant, și w este constant (după relația (34)), deci $\mathrm{d}w = 0$, de unde rezultă, ținînd seama de relația (33), $\mathrm{d}u' = 0$, prin urmare, urma aripii este linie de curent în mișcarea (fictivă) definită de potențialul $f(\xi) = u + iu'$.

Dacă într-un punct P_i (fig. 9), în interiorul conului, panta variază de la γ_i la γ_i', continuu sau discontinuu, în acest punct viteza verticală variază în acelaşi mod de la w_i la w_i' şi, după (34), avem

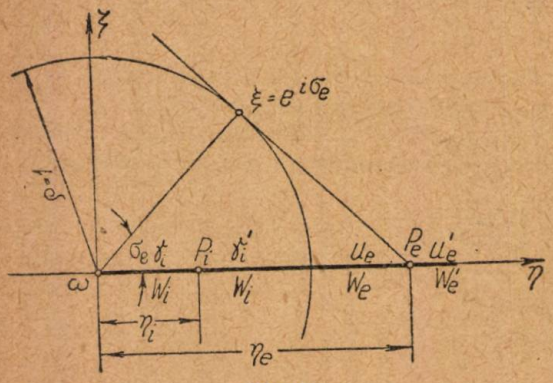


Fig. 9

$$w_i' - w_i = (\gamma_i' - \gamma_i)\, U_\infty. \quad (35)$$

Reprezentarea hidrodinamică a acestei variaţii în expresia funcţiei $f(\xi)$ se face, printr-o singularitate logaritmică, sau, în sens hidrodinamic printr-o sursă aşezată în punctul η_i, de intensitate $2q_i$, care este dată de următoarea formulă [2]

$$q_i = -\frac{w_i' - w_i}{B} \cdot \frac{By_i}{\sqrt{1 - B\text{-}y_i^2}}. \quad (36)$$

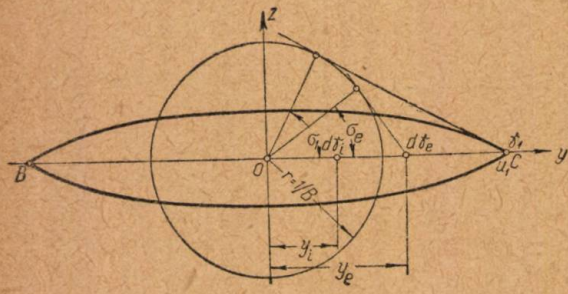


Fig. 10

Cum cercul $\xi = e^{i\theta}$ trebuie să fie o linie de egal potenţial, trebuie să plasăm pe axa absciselor şi imaginea acestei surse.

Dacă punctul P_e unde are loc variaţia de pantă $(\gamma_e' - \gamma_e)$ se află în exteriorul conului, în η_e (y_e în planul real), atunci dintr-o relaţie cunoscută, se deduce variaţia vitezei axiale

$$u_e' - u_e = -\frac{w_e' - w_e}{B} \cdot \frac{By_e}{\sqrt{B\text{-}y_e^2 - 1}}. \quad (37)$$

Analitic, această variaţie în funcţia $f(\xi)$ se realizează prin introducerea unei perechi de vîrtejuri de intensităţi $-2(u_e - u_e')$ respectiv $2(u_e - u_e')$ în punctele $e^{i\sigma_e}$ respectiv $e^{-i\sigma_e}$ (pe cercul $\rho = 1$).

Să considerăm acum o aripă simetrică cu variaţie continuă de pantă (fig. 10), şi fie $d\gamma = \frac{d\gamma}{dy_i} dy_i = \gamma' dy_i$ variaţia pantei într-un punct y_i respectiv η_i în planul $\omega\eta\zeta$. În acest caz, intensitatea sursei ce va trebui plasată în acest punct va avea expresia

$$dq_i = -\frac{U_\infty}{B}\gamma' \frac{By_i\, dy_i}{\sqrt{1 - B\text{-}y_i^2}} = +\frac{U_\infty}{B}\gamma'\, d\left(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}\right). \quad (38)$$

În mod analog, pentru un punct P_e din exteriorul conului, vom avea $d\gamma_e = \gamma' dy_e$ şi

$$du_e = -\frac{U_\infty}{B} \cdot \gamma' \frac{By_e\, dy_e}{\sqrt{B\text{-}y_e^2 - 1}} = -\frac{U_\infty}{B}\gamma' d\left(\sqrt{B^2 y_e^2 - 1}\right). \quad (39)$$

La bordul de atac, în B sau C, panta variază brusc de la O la γ_1 (sau de la γ_1 la O). De aceasta va trebui să ținem seama la scrierea potențialului.

Acum potențialul rezultă imediat. Totuși, spre ușurința exprimării lui vom trece la un alt plan $X = Y + iZ$, definit de transformarea

$$X = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad \xi = \frac{X-1}{X+1}. \tag{40}$$

Pentru o aripă cu bordul de atac subsonic, în baza relațiilor stabilite mai sus, potențialul $f(X)$ are expresia

$$f(X) = \frac{\gamma_1 U_\infty Bl}{\pi B\sqrt{1-B^2l^2}} \ln\frac{X-L}{X+L} + \frac{\gamma_1 U_\infty Bl}{\pi B\sqrt{1-B^2l^2}} \ln\frac{X-\frac{1}{L}}{X+\frac{1}{L}} + \\ + \frac{U_\infty}{\pi B^2}\int_{y_i=0}^{y_i=l} \gamma'_d \ln\frac{X-Y_i}{X+Y_i}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{1-B^2y_i^2}\right) + \frac{U_\infty}{\pi B^2}\int_{y_i=l}^{y_i=0} \gamma'_s \ln\frac{X-\frac{1}{Y_i}}{X+\frac{1}{Y_i}}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{1-B^2y_i^2}\right), \tag{41}$$

sau, într-un punct pe aripă, în care $X = Y\,(Z = 0)$,

$$f(Y) = \frac{\gamma_1 U_\infty Bl}{\pi B\sqrt{1-B^2l^2}}\left[\ln\frac{Y-L}{Y+L} + \ln\frac{Y-\frac{1}{L}}{Y+\frac{1}{L}}\right] + \\ + \frac{U_\infty}{\pi B^2}\left[\int_{y_i=0}^{y_i=l} \gamma'_d \ln\frac{Y-Y_i}{Y+Y_i}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{1-B^2y_i^2}\right) + \int_{y_i=l}^{y_i=0} \gamma'_s \ln\frac{Y-\frac{1}{Y_i}}{Y+\frac{1}{Y_i}}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{1-B^2y_i^2}\right)\right]. \tag{42}$$

În aceste două expresii, Y, L și Y_i sînt abscisele din planul $X = Y + iZ$ corespunzătoare lui y, l, respectiv y_i din planul real, și, în baza relațiilor (31) și (40), au valorile

$$Y^2 = \frac{1+By}{1-By}, \quad L^2 = \frac{1+Bl}{1-Bl}, \quad Y_i^2 = \frac{1+By_i}{1-By_i} \tag{43}$$

iar γ'_d și γ'_s sînt date de

$$\gamma'_d = \left(\frac{\mathrm{d}\gamma_i}{\mathrm{d}y_i}\right)_{y_i>0} = -\gamma'_s = -\left(\frac{\mathrm{d}\gamma_i}{\mathrm{d}y_i}\right)_{y_i<0}. \tag{44}$$

Viteza, într-un punct oarecare Y pe aripă, este dată de partea reală a expresiei (42) care, transformînd logaritmii în funcții hiperbolice, ținînd seama de relațiile (43) și făcînd substituția $y = l\lambda$, devine

$$u = \mathrm{Re}\, f(Y) = \mathrm{Re}\left[-\frac{2\gamma_1 U_\infty}{\pi B\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{Arch}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}} - \right. \\ \left. - \frac{2U_\infty}{\pi B}\int_{\lambda_i=0}^{\lambda_i=1} \gamma'_d\,\mathrm{Arch}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda_i^2}}\,\mathrm{d}\sqrt{n^2-\lambda_i^2}\right] \tag{45}$$

unde am notat

$$n = \frac{1}{Bl}. \tag{46}$$

Se demonstrează uşor că pentru o aripă cu borduri de atac supersonice, potenţialul are aceeaşi expresie şi că aceasta este valabilă atît pentru interiorul cît şi pentru exteriorul conului Mach.

Într-adevăr, să considerăm spre simplificare o singură sursă plasată în punctul η_i. Potenţialul corespunzător, ţinînd seama şi de imagine, va fi dat de expresia

$$df = \frac{U_\infty \gamma'}{\pi B} d\left(\sqrt{1 - B^2 y_i^2}\right) \ln \frac{X - Y_i}{X + Y_i}, \tag{47}$$

care este cuprinsă de altfel, în elementele integralei (41).

Să presupunem acum că punctul η_i se deplasează în exteriorul conului în η_e; în acest caz vom avea

$$d\left(\sqrt{1 - B^2 y_e^2}\right) = i\, d\left(\sqrt{B^2 y_e^2 - 1}\right), \quad Y_e = \sqrt{\frac{1 + B y_e}{1 - B y_e}} = -i \sqrt{\frac{B y_e + 1}{B y_e - 1}} = -iH, \tag{48}$$

iar expresia potenţialului de mai sus devine

$$\frac{-i\gamma' U_\infty}{\pi B} d\left(\sqrt{B y_e^2 - 1}\right) \ln \frac{X - iH}{X + iH}, \tag{49}$$

care corespunde tocmai la două vîrtejuri aşezate în $\pm H$ în planul $X = Y + iZ$ sau, aşa cum este uşor de văzut din relaţiile (41), în punctele $e^{\pm i\sigma_e}$ (fig. 9) din planul $\xi = \eta + i\zeta$ de pe cercul $\rho = 1$.

5. APLICAŢIE LA ARIPI CU DISTRIBUŢIE LINIARĂ DE PANTĂ

Să considerăm o aripă unghiulară conică, simetrică faţă de axele Oy şi Oz şi să presupunem că panta într-un punct oarecare de abscisă y (pozitivă sau negativă) are expresia

$$\gamma(y) = a_0 + a_1 |y|. \tag{50}$$

Notînd cu γ_0 panta la mijlocul aripii ($y = 0$), cu γ_1, panta la bordul de atac ($y = 1$), cu m raportul $\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ şi cu λ raportul $\frac{y}{l}$, expresia pantei devine

$$\gamma(\lambda) = \gamma_0 [1 + (m - 1) |\lambda|]. \tag{51}$$

În acest caz, variaţia pantei în punctul $y > 0$, este dată de

$$\gamma_d' = \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)_{y>0} = \gamma_0 (m - 1). \tag{52}$$

Directricea $z(y)$ ce corespunde unei astfel de distribuţii a pantei, este dată de ecuaţia (29), care integrată, dă

$$z(\lambda) = \gamma_0 [1 - |\lambda| - (m - 1) |\lambda| \ln |\lambda|]. \tag{53}$$

Forma curbelor $\frac{z(\lambda)}{\gamma_0} = f(\lambda)$, pentru diferite valori ale lui m, este dată în figura 11.

Să trecem acum la calculul vitezei de perturbație axială datorită primei mișcări conice (cu vîrful în O), dată de expresia (45), care, după ce introducem notațiile

$$C_1 = -\frac{2m\gamma_1 U_\infty}{\pi B}, \quad C_2 = -\frac{2(m-1)\gamma_0 U_\infty}{\pi B}, \quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{m-1}{m}, \tag{54}$$

capătă următoarea formă condensată

$$u = u(n,\lambda) = C_1 \operatorname{Re}\left[u_1 + \frac{m-1}{m} u_2\right], \tag{55}$$

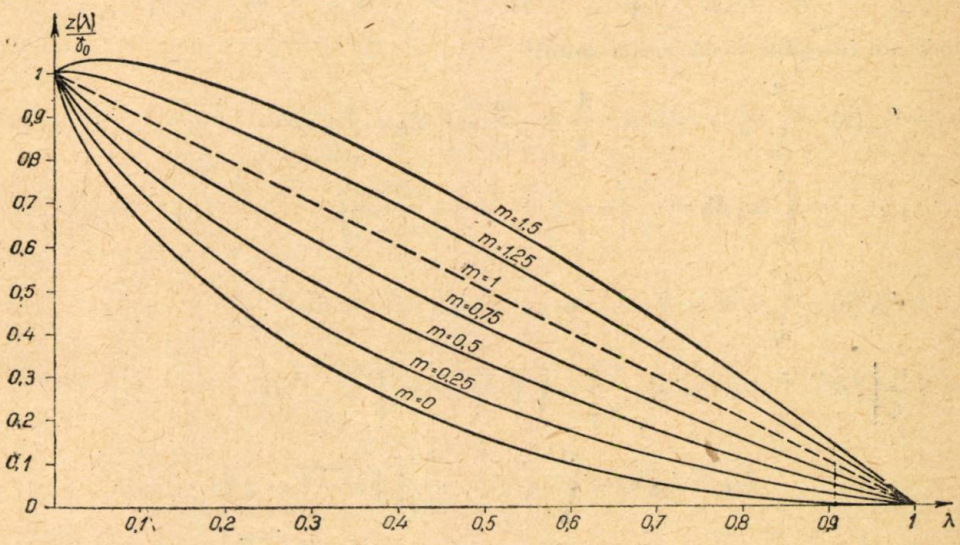


Fig. 11

unde am notat

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}}, \quad u_2 = \int_{\lambda_i=0}^{\lambda_i=1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{\lambda_i^2-\lambda^2}}\, \mathrm{d}\left(\sqrt{n^2-\lambda_i^2}\right) = \tag{56}$$

$$= \left(\sqrt{n^2-1}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}} + \sqrt{n^2-\lambda^2}\ln\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}} - n\operatorname{Arch}\frac{n}{\lambda} - i\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-\lambda^2}\right).$$

În mod analog, pentru a doua mișcare conică (cu vîrful în A), viteza u' este dată de

$$u' = -\frac{2m'\gamma_0' U_\infty}{\pi B} \operatorname{Re}\left[u_1' + \frac{m-1}{m} u_2'\right], \tag{57}$$

unde u', u'_1, u'_2 au aceleași semnificații, însă se referă la aripa conică indefinită, cu vîrful în A. Ținînd seama de relațiile evidente

$$m' = \frac{\gamma_1'}{\gamma_0'} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = m, \quad \gamma_0' = \frac{\gamma_0}{h}, \quad n' = \frac{1}{Bl'} = nh, \tag{58}$$

şi avînd în vedere că viteza u' trebuie luată cu semnul $(-)$ pentru mişcarea a doua, vom putea scrie

$$u' = -\frac{1}{h}\, u\,(nh,\ \lambda)\,. \tag{59}$$

Vom calcula acum coeficientul unitar de rezistenţă al aripii prin intermediul formulelor stabilite la punctul 3. Întrucît un calcul riguros al tuturor integralelor ce apar nu este posibil şi uneori, chiar acolo unde se pot da soluţii exacte, calculul este laborios şi expresiile rezultate sînt greu de aplicat în calcule numerice, vom folosi, de la caz la caz, diferite metode de aproximare.

Vom avea astfel, aplicînd formula (15),

$$C_{x_1} = \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B}\,\mathrm{Re}\left\{I_{11} + \frac{m-1}{m}\left[(I_{12} + I_{14})\, m + I_{13} - I_{14}\right]\right\}, \tag{60}$$

unde am introdus următoarele notaţii

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_{11}(n) = \int_0^1 u_1\,\mathrm{d}\lambda = \arcsin\frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}},\quad I_{12} = I_{12}(n) = \\ &= \int_0^1 \lambda u_1\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2-1} + \frac{\operatorname{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}}\right), \\ I_{13} &= I_{13}(n) = \int_0^1 u_2\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{n^2-1}\ln n - n\operatorname{Arch} n - \arcsin\frac{1}{n} - \\ &- i\,\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{n^2-1} + n^2\arcsin\frac{1}{n}\right] + \int_0^1 \sqrt{n^2-\lambda^2}\ln\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}\,\mathrm{d}\lambda \\ I_{14} &= I_{14}(n) = \int_0^1 \lambda u_2\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{n^2-1} - n + \right.\right. \\ &+ \frac{2}{3}\sqrt{n^2-1^3} + \frac{2}{3}n^3\Big)\operatorname{Arch} n - \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{3} - \\ &\left. - \frac{2}{3}\left(n^3\ln 2n + \sqrt{n^2-1^3}\ln 2\sqrt{n^2-1}\right) + i\,\frac{\pi}{3}\sqrt{n^2-1^3}\right] \end{aligned} \tag{61}$$

Pentru C_{x_2} vom exprima pe $\varkappa$ în funcţie de X şi vom calcula în prealabil prima parte a integralei duble (17); găsim

$$\int_{x_0}^1 \varkappa X\,\mathrm{d}X = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma_0}{h}\left[F_1 + (m-1)\,F_2\right], \tag{62}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(h,\lambda) = \left(\frac{1-h}{1-h\lambda}\right)^2 - 1,\quad F_2 = F_2(h,\lambda) = \\ &= h(1-h)^2\lambda\left[\ln\left(\frac{(1-h)\,\lambda}{1-h\lambda}\right)^2 + \frac{3-2h\lambda}{(1-h\lambda)^2} - \frac{3-2h}{(1-h)^2}\right]. \end{aligned} \tag{63}$$

Trecînd acum la efectuarea completă a integralei (17), obținem

$$C_{x_2} = \frac{1}{h} \cdot \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B} \operatorname{Re}\left\{ I_{21} + \frac{m-1}{m}\left[(I_{22} + I_{24})\, m + (I_{23} - I_{24})\right]\right\}, \tag{64}$$

unde am introdus următoarele notații

$$I_{21} = \int_0^1 u_1 F_1 \, d\lambda = \frac{1-h}{1+h}\left[\frac{\ln n + h \operatorname{Arch} n}{\sqrt{n^2-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\sqrt{n^2h^2-1}} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{n^2h^2-1}}{n - nh + \sqrt{n^2h^2-1}}\right] - \left[\arcsin\frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}}\right], \tag{65}$$

$$I_{22} = \int_0^1 u_1 F_2 \, d\lambda \;,\quad I_{23} = \int_0^1 u_2 F_1 \, d\lambda \;,\quad I_{24} = \int_0^1 u_2 F_2 \, d\lambda.$$

Pentru ultimele trei integrale vom aplica regula lui Simpson, care este simplă și dă, pe de altă parte, o precizie foarte bună, dacă se face o judicioasă alegere a intervalelor de integrare.

În baza formulelor (58) și (59), expresia lui C'_{x_1} se deduce din expresia lui C_{x_1} prin înlocuirea lui n prin nh și prin împărțirea rezultatului obținut la h,

$$C'_{x_1} = \frac{1}{h} \cdot \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B} \operatorname{Re}\left\{ I'_{11} + \frac{m-1}{m}\left[(I'_{12} + I'_{14})\, m + (I'_{13} - I'_{14})\right]\right\}, \tag{66}$$

unde

$$I'_{1k} = I_{1k}(nh) \;,\quad (k = 1,2,3\,4). \tag{67}$$

Pentru calculul lui C'_{x_2} vom exprima pe γ în funcție de X și vom efectua în prealabil prima parte a integralei duble (22); obținem astfel

$$\int_{1-h}^{1} \gamma\left[X - (1-h)\right] dX = \frac{1}{2}\gamma_0 h^2\left[1 - (m-1) F_3 \lambda\right], \tag{68}$$

unde am introdus notația

$$F_3 = F_3(h) = \frac{(1-h)^2}{h^3}\left[\ln(1-h)^2 + \frac{h(2-3h)}{(1-h)^2}\right]. \tag{69}$$

Înlocuind mai departe în expresia lui C'_{x_2} obținem

$$C'_{x_2} = \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B} \operatorname{Re}\left\{ I'_{21} + \frac{m-1}{m}\left[(I'_{22} + I'_{24})\, m + (I'_{23} - I'_{24})\right]\right\} \tag{70}$$

unde am notat de asemenea

$$I'_{21} = -I'_{11},\; I'_{22} = F_3 \cdot I'_{12},\; I'_{23} = -I'_{13},\; I'_{24} = F_3 \cdot I'_{14}. \tag{71}$$

În sfîrșit, pentru calculul coeficientului suplimentar C_i datorit interferenței, vom efectua mai întîi o integrală similară cu (68),

$$\int_{1-h}^{X_1} \gamma\left[X - (1-h)\right] dX = \frac{1}{2}\gamma_0 h^2\left[F_4 - (m-1) F_5\right], \tag{72}$$

unde am pus

$$F_4 = F_4(h,\lambda) = \left(\frac{1-h}{1-h\lambda}\right)^2 \text{ şi } F_5 = \frac{(1-h)^2}{h^3}\left[\ln\left(\frac{\lambda-h}{\lambda}\right)^2 + \frac{h(2\lambda-3h)}{(\lambda-h)^2}\right]\lambda, \quad (73)$$

şi vom obţine în cele din urmă

$$C_{x_i} = \frac{8m\gamma_0^2}{\pi B}\left\{I_{i1} + \frac{m-1}{m}\left[(I_{i2}+I_{i4})\,m + (I_{i3}-I_{i4})\right]\right\}, \quad (74)$$

cu următoarele semnificaţii ale termenilor din paranteză

$$I_{i1} = -\operatorname{Re}\int_1^{nh} u_1' F_4\,d\lambda = -\frac{1-h}{1+h}\left[\frac{\ln nh}{\sqrt{n^2h^2-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\operatorname{Art} h\sqrt{\frac{(n+1)(nh-1)}{(n-1)(nh+1)}}\right] \quad (75)$$

$$I_{i2} = \operatorname{Re}\int_1^{nh} u_1' F_5\,d\lambda\,,\quad I_{i3} = -\operatorname{Re}\int_1^{nh} u_2' F_4\,d\lambda\,,\quad I_{i4} = \operatorname{Re}\int_1^{nh} u_2' F_5\,d\lambda.$$

Pentru a uşura efectuarea integralei I_{i2}, vom pune

$$F_5' = (F_5 - \lambda F_3) + \lambda F_3 = \frac{(1-h)^2}{h^3}\left[\ln\left(\frac{\lambda-h}{\lambda(1-h)}\right)^2 + \frac{h(2\lambda-3h)}{(\lambda-h)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{h(2-3h)}{(1-h)^2}\right]\lambda + \lambda F_3 = -F_2\left(\frac{1}{h},\lambda\right) + \lambda F_3 \quad (76)$$

şi în acest caz, integrala devine

$$I_{i2} = -\operatorname{Re}\int_1^{nh} u_1' F_2\left(\frac{1}{h},\lambda\right)d\lambda + \operatorname{Re} F_3\int_1^{nh}\lambda\,u_1'\,d\lambda. \quad (77)$$

A doua integrală din membrul al doilea are valoarea

$$\operatorname{Re} F_3\int_1^{nh}\lambda u_1'\,d\lambda = \frac{1}{2}F_3\sqrt{n^2h^2-1} \quad (78)$$

iar pe prima, precum şi integralele I_{i3} şi I_{i4}, le vom efectua prin regula lui Simpson.

Prin însumarea expresiilor (60), (64) (66), (70) şi (74), vom obţine coeficientul unitar total de rezistenţă care, în baza relaţiei

$$\gamma_0 = \frac{\tau}{2(1-h)}, \quad (79)$$

unde τ reprezintă grosimea relativă maximă a aripii devine

$$C_{x_t} = \operatorname{Re}\frac{2\tau^2}{\pi B}\cdot\frac{m}{(1-h)^2}\left\{I_{i1} + \frac{m-1}{m}\left[(I_{i2}+I_{i4})\,m + (I_{i3}-I_{i4})\right]\right\}, \quad (80)$$

unde am notat

$$I_{tk} = I_{1k} + I'_{2k} + I_{ik} + \frac{1}{h}(I_{2k} + I'_{1k}), \qquad (k = 1, 2, 3\ 4), \tag{81}$$

Pentru $m = 0$ (fig. 11), obținem

$$C^{(0)}_{x_t} = \mathrm{R}\ \frac{2\tau}{\pi B} \cdot \frac{1}{(1-h)^2}\ (I_{t4} - I_{t3}) \tag{82}$$

iar pentru $m = 1$,

$$C^{(1)}_{x_t} = \mathrm{Re}\,\frac{2\tau^2}{\pi B} \cdot \frac{1}{(1-h)^2}\, I_{t1}\,. \tag{83}$$

Acest din urmă rezultat este cunoscut, el corespunzînd aripii triunghiulare cu pantă constantă, caz studiat de P u c k e t t [3].

Astfel C_{x_t} capătă forma remarcabilă următoare

$$C_{x_t} = \mathrm{Re}\left\{m\left[C^{(1)}_{x_t} - \frac{m-1}{m} C^{(0)}_{x_t} + (m-1)\frac{2\tau^2}{\pi B} \cdot \frac{1}{(1-h)^2}(I_{t2} + I_{t4})\right]\right\} \tag{84}$$

Precizăm că această ultimă formulă este expresia coeficientului unitar de rezistență pentru toate cazurile indicate în figura 5, adică pentru orice poziție a celor două conuri *Mach* din O și A, față de triunghiurile OBC respectiv ABC.

Pentru calculele numerice este suficient să considerăm partea reală a integralelor I_{jk}, I'_{jk} și I_{ik} calculate mai sus, ținînd seama de următoarele inegalități evidente:

1. *Pentru aripa cu borduri de atac subsonice și cu bordurile suprafeței de închidere tot subsonice,*

$$n > nh > 1. \tag{85}$$

În acest caz, valorile reale ale integralelor ($j = 1, 2$ și $k = 1, 2, 3, 4$), exceptînd integralele I_{13} și I'_{13}, sînt cele calculate mai sus, în care cad termenii conținînd factorul i. În ceea ce privește integralele I_{13} și I'_{13}, ele se calculează aproximativ prin dezvoltarea în serie a ultimului lor termen.

2. *Pentru aripa cu borduri de atac subsonice și cu bordurile suprafeței de închidere supersonice,*

$$n > 1 > nh. \tag{86}$$

Aici integralele I_{1k} sînt identice cu cele din cazul precedent; integralele I_{22}, I_{23} și I_{24} se aproximează în același mod; integrala I_{21} ia valoarea

$$I_{21} = \frac{1-h}{1+h}\left[\frac{\ln n + h\,\mathrm{Arch}\,n}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{1-n^2h^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-n\,h^2}}{n+\sqrt{n^2-1}-nh}\right] - \\ - \left[\arcsin\frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}}\right], \tag{87}$$

iar integralele I'_{1k} devin

$$I'_{11} = \frac{\pi}{2}\ , \quad I'_{12} = \frac{1}{2}\left(nh + \frac{\arccos nh}{\sqrt{1-n^2h^2}}\right)\ , \quad I'_{13} = -\frac{\pi}{4},$$

$$I'_{14} = -\frac{1}{6}\left[(1 + 2n^2h^2)\sqrt{1-n^2h^2}\arccos nh + 2n^3h^3 \ln 2nh + nh\right]. \tag{88}$$

Integralele I_{ik} reprezentînd acțiunea mișcării conice din A asupra suprafeței

anterioare nu mai au sens în acest caz. În sfîrşit, pentru calculul integralelor I'_{2k} sînt valabile tot formulele (71) în care integralele I'_{1k} au valorile din (88).

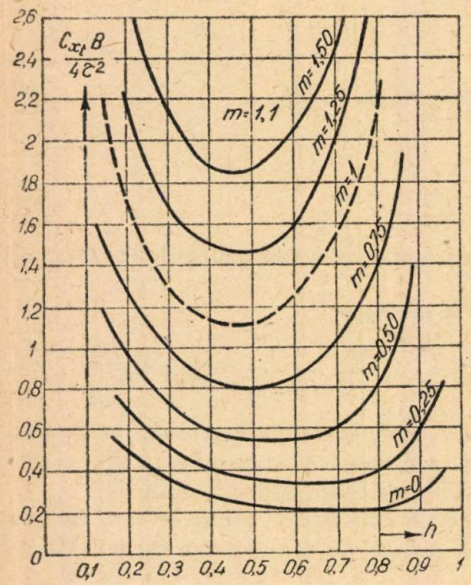


Fig. 12

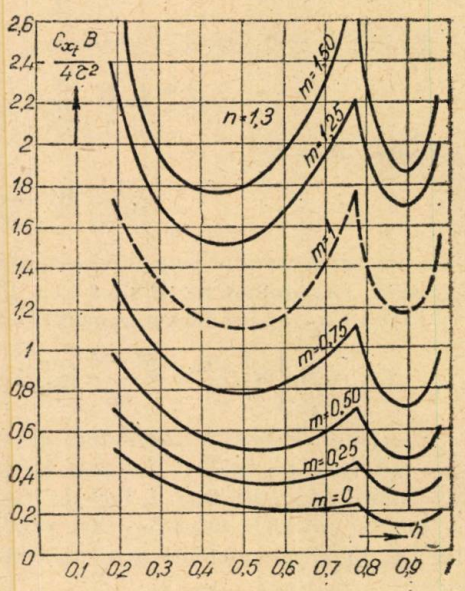


Fig. 13

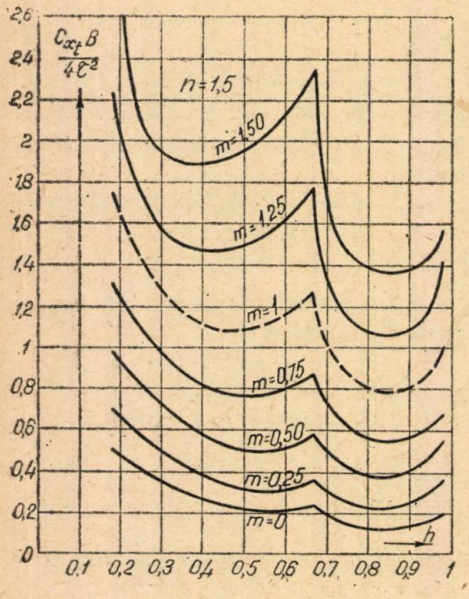


Fig. 14

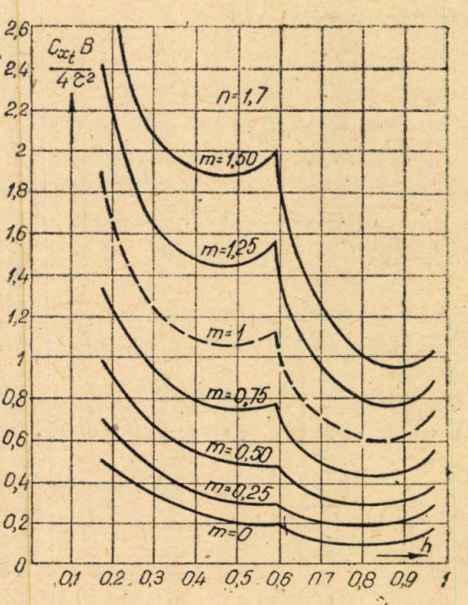


Fig. 15

În figurile 12, 13 14, 15, 16, 17, se arată variaţia expresiei $\frac{C_{x_t}B}{4\tau^2}$ în funcţie de poziţia grosimii maxime h pentru diferite valori ale lui m şi n, în cazul $n > 1$.

3. *Pentru aripa cu borduri de atac supersonice,*

$$1 > n > nh. \tag{89}$$

În acest caz vom avea pentru integralele

$$I_{11} = \frac{\pi}{2}, \quad I_{12} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{\arccos n}{\sqrt{1-n^2}}\right), \quad I_{13} = -\frac{\pi}{4},$$

$$I_{14} = -\frac{1}{6}\left[(1+2n^2)\sqrt{1-n^2}\arccos n + 2n^3 \ln 2n + n\right], \tag{90}$$

$$I_{21} = \frac{1-h}{1+h}\left[\frac{h\arccos n}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{\pi - \arccos nh}{\sqrt{1-n^2h^2}}\right] - \frac{\pi}{2}.$$

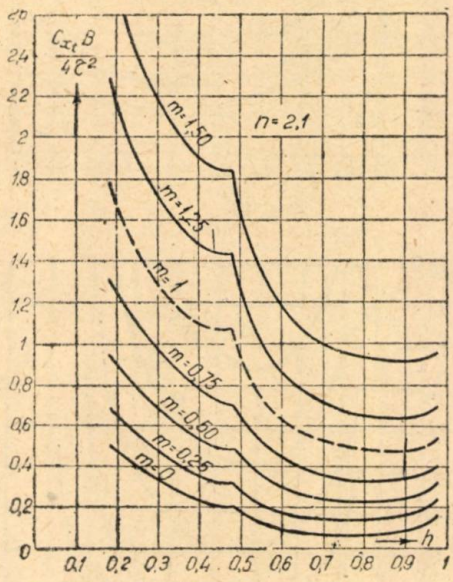


Fig. 16

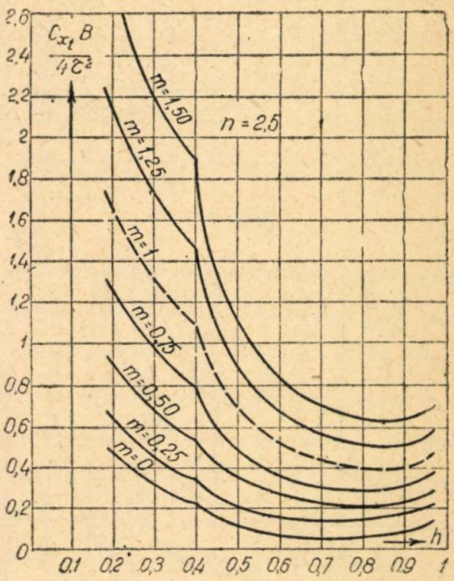


Fig. 17

Integralele I_{22}, I_{23}, I_{24} se aproximează tot ca în cazul 1 dar observînd că aici u_1 și u_2 devin

$$u_1 = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\arccos\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}},$$

$$u_2 = -\operatorname{Re}\left[\sqrt{1-n^2}\arccos\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}} - \sqrt{n^2-\lambda^2}\ln\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}} + \right. \tag{91}$$

$$\left. + n\operatorname{Arch}\frac{n}{\lambda} - i\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-\lambda^2}\right].$$

Pentru integralele I'_{jk} sînt valabile valorile din cazul precedent şi tot ca în acest caz, integralele I_{ik} sînt nule.

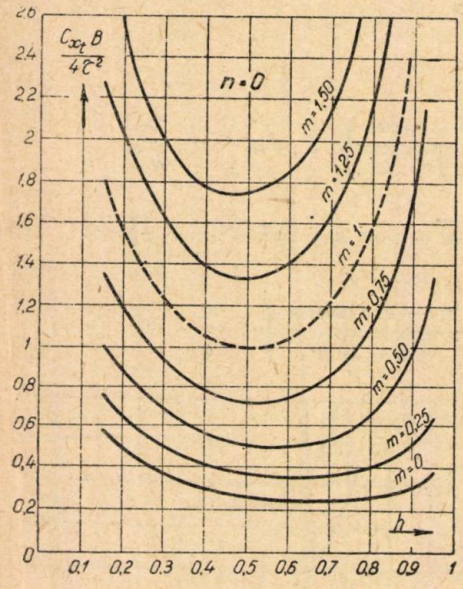


Fig. 18

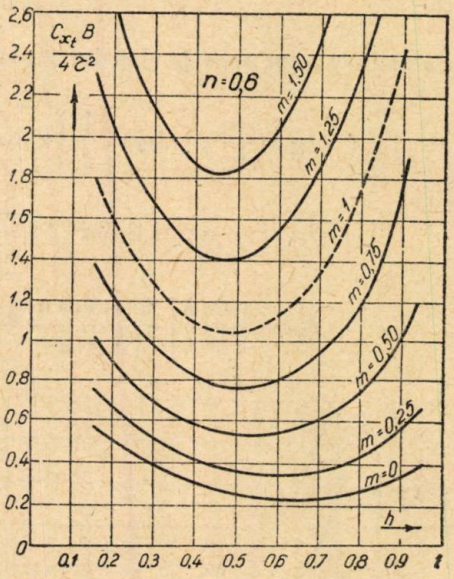
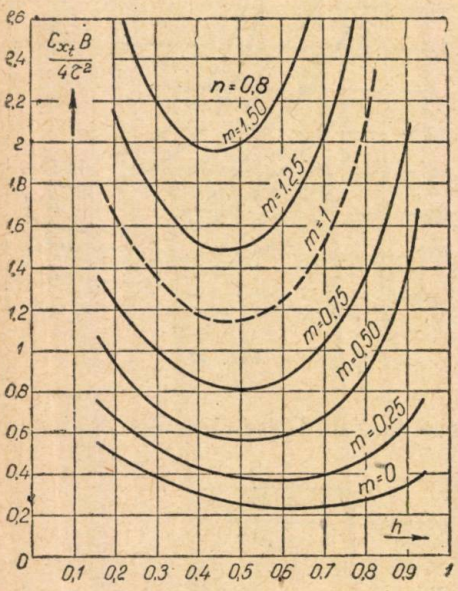


Fig. 19



Flg. 20

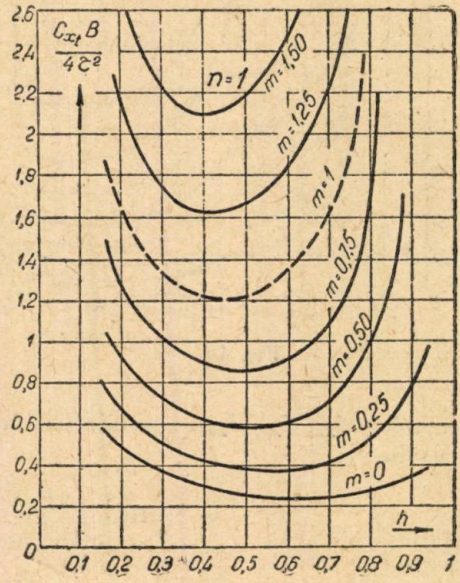


Fig. 21

În figurile 18, 19, 20, şi 21 se arată variaţia aceleiaşi expresii $\frac{C_{x_t} B}{4\tau^2}$ pentru cazul bordurilor de atac supersonice.

CONCLUZII

Prin metoda de generare a aripii triunghiulare folosită în această lucrare, aripa se găseşte în prezenţa a două mişcări conice, una cu vîrful în O şi alta cu vîrful în A. În aceste condiţii, calculul rezistenţei aripii se face în mod separat pentru fiecare mişcare în parte şi se completează cu termenii suplimentari datoriţi interferenţei dintre aceste mişcări. Cum aceşti termeni se prezintă în cele din urmă sub forma unor cuadraturi simple care se pot rezolva pe căi obişnuite, formulele obţinute sînt explicite şi uşor de aplicat în practică.

Din rezultatele obţinute reiese că elementul hotărîtor pentru rezistenţă, ca şi în mişcarea plană, este panta la bordul de atac. De aici se poate trage şi concluzia că ordinul de mărime al rezistenţei unei aripi generată în partea posterioară şi de altă suprafaţă de închidere decît cea indicată aici, se poate afla, asimilînd în primă aproximaţie o astfel de aripă cu una generată după metoda din această lucrare.

СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВУКОНУСНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ С ПЕРЕМЕННЫМ НАКЛОНОМ В ПОТОКЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Авторы рассматривают вопрос сопротивления конических треугольных крыльев симметрической толщины с переменным наклоном в рамках теории конических движений. Используемый метод прост и дает возможность установить теоретическим путем выражение унитарного коэффициента сопротивления, с трудом получаемое при применении обычных средств анализа.

Метод состоит в образовании крыла, которое бы находилось под влиянием двойного конического движения — одного, исходящего из вершины передней (O), и другого из вершины, закрывающей задней поверхности (A) (рис. 1, 2, 3). Для этого закрывающая поверхность порождена конусом с вершиной в A и имеет ту же направляющую, что и передний конус O. Полученный таким образом конус так соединен с передней поверхностью, что движение вокруг него остается коническим (4).

Таким образом, если рассматривать отдельно действие двух конических движений с учетом взаимодействия между ними, сопротивление крыла будет находиться на соответствующих поверхностях.

Путем простого расчета приходят к выражениям (15), (17), (21), (22), (23), сумма которых дает выражение полного коэффициента сопротивления (26).

Далее, путем применения метода гидродинамической аналогии конических движений [2], устанавливается скорость аксиальной пертурбации и вокруг продолженного в бесконечность конического крыла с переменным наклоном, что приводит к уравнению (4€), относительно которого указывается, что оно применимо к крылу с передней кромкой как подзвуковой, так и сверхзвуковой скорости.

В качестве первого применения расчета сопротивления рассматривается крыло с линейно распределенным наклоном по ширине размаха (рис.11).

Пользуясь общностью выражения аксиальной пертурбации (46), можно рассматривать случай крыла, передние кромки обоих конических поверхностей которого в O и A являются передними кромками подзвуковой скорости. Получается выражение (36), из которого легко вывести решения для любых положений конусов Маха в O и A по отношению к крылу.

Полученные различные значения наклона у передней кромки (рис. 11) распределяются непрерывно под значениями и над значениями, соответствующими классическому случаю крыла с постоянным наклоном ($m = 1$) (рис. 12—21).

Из этой диаграммы следует, что и при плоском движении решающее влияние на сопротивление имеет наклон передней кромки, вследствие чего можно вывести заключение, что другие закрывающие поверхности или другие направляющие кривые, могущие быть приравнены в первом приближении к закрывающим поверхностям и направляющим кривым, рассмотренным в настоящем сообщении, приведут почти к тем же результатам.

TRAÎNÉE D'AILES TRIANGULAIRES DOUBLEMENT CONIQUES À PENTE VARIABLE, EN RÉGIME SUPERSONIQUE

(RÉSUMÉ)

Les Auteurs traitent le problème de la traînée des ailes triangulaires coniques d'épaisseur symétrique, à pente variable, dans le cadre de la théorie des mouvements coniques. La méthode utilisée est simple et permet d'établir l'expression du coefficient unitaire de traînée par voie théorique, expresion difficile à obtenir par les moyens courants de l'analyse.

La méthode consiste à engendrer l'aile de manière qu'elle se trouve en présence d'un double mouvement conique, l'un issu du sommet de la surface antérieure (O) et l'autre, du sommet de la surface postérieure terminale, (A) (fig. 1, 2, 3). Dans ce but, la surface terminale est engendrée par un cône dont le sommet se trouve en A, ayant la même directrice que le cône antérieur O. Le cône ainsi obtenu est raccordé de telle manière à la surface antérieure, que le mouvement autour de lui demeure conique (4).

De cette manière, on trouve la traînée de l'aile en considérant séparément les effets des deux mouvements coniques sur les surfaces respectives tenant également compte de leur interférence.

Des calculs simples conduisent aux expressions (15), (17), (21), (22), (23), dont la sommation exprime le coefficient de traînée global (26).

En utilisant ensuite la méthode de l'analogie hydrodynamique des mouvements coniques [2], on établit la vitesse de perturbation axiale u autour d'une aile conique indéfinie, à pente variable. On aboutit à l'expression (46) et on démontre qu'elle est valable pour l'aile à bords d'attaque ainsi subsoniques que pour l'aile à bords d'attaque supersoniques.

Comme une première application du calcul de la traînée, on étudie une aile à pente distribuée linéairement le long de l'envergure (fig. 11).

En utilisant la généralité de l'expression qui donne la vitesse de perturbation axiale (46), on traite le cas de l'aile dont les bords d'attaque des deux surfaces

coniques, en O et en A, sont subsoniques. On obtient l'expression (85) dont on déduit facilement les solutions pour n'importe quelle position des cônes Mach, de O et de A, par rapport à l'aile.

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de la pente au bord d'attaque (fig. 11) sont distribués d'une façon continue au-dessous et au-dessus des valeurs correspondant au cas classique de l'aile à pente constante ($m = 1$) (fig. 12—21).

Il ressort de ces diagrammes que, tout comme pour le mouvement plan, l'influence de la pente du bord d'attaque sur la traînée de l'aile est décisive et l'on peut en conclure que d'autres surfaces terminale ou d'autres courbes directrices qui, en première approximation, pourraient être assimilées à celles qui ont été étudiées dans cet article, conduiront sensiblement aux mêmes résultats.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, Comunicările Academiei R.P.R., t. 4, nr. 5—6, mai—iunie 1954, p. 261.
2. — Comunicările Academiei R.P.R., t. III, nr. 3—4, martie—aprilie 1953, p. 141.
3. A. E. Puckett, Journal of the Aeronautical Sciences, t. 13, nr. 9, septembrie, 1946, p. 475.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

AERODINAMICĂ

DETERMINAREA CIRCULAŢIEI PENTRU O ARIPĂ ÎN PREZENŢA UNUI SUFLU AXIAL DE SECŢIUNE CIRCULARĂ

DE

T. OROVEANU

1. Introducere. Problema pe care ne propunem să o rezolvăm în cele ce urmează are ca obiect determinarea circulaţiei pentru o aripă de avion supusă suflului elicii. De la început, presupunem că vitezele nu sînt prea mari, astfel încît să putem considera aerul ca un fluid incompresibil. De asemenea, pentru a uşura tratarea acestei probleme, vom face unele ipoteze simplificatoare, care sînt de altfel uzuale în problemele de acest gen. În primul rînd, admitem că suflul care ia naştere în spatele elicii are forma unui cilindru de secţiune circulară cu raza a, iar particulele de fluid care îl compun posedă o viteză axială constantă pe întreaga secţiune. Vom mai presupune că aripa trece prin axa suflului şi deci nu ne vom ocupa decît de influenţa vitezei axiale a particulelor de fluid. Aceste ipoteze simplifică în mod considerabil problema, făcînd-o accesibilă metodelor uzuale de calcul, şi totodată îi păstrează un caracter destul de general.

În tot spaţiul din afara aripii şi a pînzei de vîrtejuri libere, mişcarea este irotaţională şi admite prin urmare un potenţial de viteze. Vom nota cu W_e viteza de la infinit amonte a curentului, cu W_i viteza axială din interiorul suflului, cu φ_e potenţialul vitezelor perturbatoare produse de prezenţa aripii în exteriorul suflului elicii şi cu φ_i potenţialul aceloraşi viteze în interiorul suflului. Problema se reduce astfel la determinarea potenţialelor de viteze φ_e şi φ_i care satisfac pe frontiera suflului condiţiile [1] şi [2]

$$W_e \varphi_e = W_i \varphi_i, \quad \frac{1}{W_e} \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{1}{W_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}, \tag{1}$$

n fiind direcţia normalei pe această frontieră.

Găsirea potenţialelor φ_e şi φ_i devine uşoară dacă studiem această problemă la infinit aval, într-un plan normal pe direcţia vitezei curentului. Mişcarea se datoreşte pînzei de vîrtejuri libere care este normală pe acest plan, iar vitezele induse sînt de două ori mai mari decît în dreptul aripii. Datorită faptului că mişcarea este plană, putem introduce funcţiile de o variabilă complexă şi să dispunem astfel de rezultatele pe care ni le pune la îndemînă teoria acestor funcţii.

În cele ce urmează, vom nota cu φ_e, respectiv φ_i, valorile potențialelor de viteze la infinit aval.

Alegînd în mod convenabil axele de coordonate în planul de la infinit aval, urma pînzei de vîrtejuri libere, care poate fi considerată aproximativ rectilinie, este segmentul $\left(-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}\right)$ de pe axa Qx, b fiind anvergura aripii. De asemenea, intersecția suflului cu acest plan poate fi privită, cu oarecare aproximație, ca un cerc de rază a (fig. 1).

În acest caz condițiile (1) trebuie să fie satisfăcute pe cerc. Dacă punem

$$W_i = \varkappa W_e, \tag{2}$$

ele devin

$$(\varphi_e)_{r=a} = \varkappa\,(\varphi_i)_{r=a}, \quad \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)_{r=a}, \tag{3}$$

φ_e și φ_i fiind potențialele de viteze din exteriorul cercului, respectiv din interiorul acestuia.

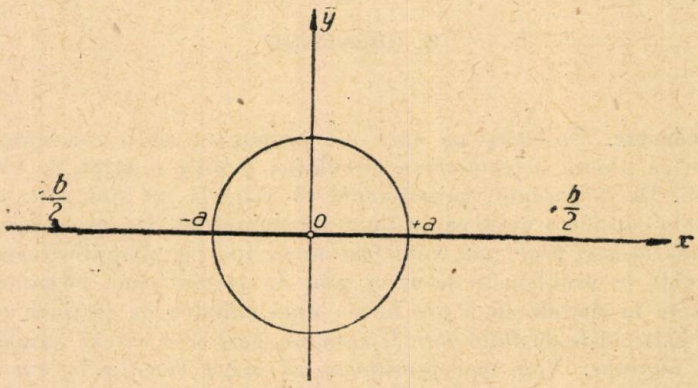


Fig. 1

Pentru rezolvarea problemei, este necesar să mai ținem seama și de relațiile pe care potențialele de viteze φ_e și φ_i le satisfac pe anvergura aripii. În acest scop, vom scrie ecuația circulației pentru exteriorul și interiorul suflului

$$\Gamma_e = kW_e\, c\left(\alpha + \frac{v_e}{W_e}\right), \quad \Gamma_i = kW_i\, c\left(\alpha + \frac{v_i}{W_i}\right) \tag{4}$$

v_e și v_i fiind vitezele induse corespunzătoare. Vom arăta mai jos că și în acest caz avem, ca și pentru aripa izolată,

$$\Gamma_e = 2\,(\varphi_e)_{y=0}, \quad \Gamma_i = 2\,(\varphi_i)_{y=0}, \tag{5}$$

unde valorile potențialelor sînt luate pe marginea superioară a tăieturii $\left(-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}\right)$, iar vitezele induse în dreptul aripii fiind de două ori mai mici decît cele de la infinit aval, putem scrie

$$v_e = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad v_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{6}$$

După cîteva calcule, relațiile (4) ne duc la condițiile

$$\frac{2}{kW_e c}(\varphi_e)_{y=0} = \alpha + \frac{1}{2W_e}\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial y}\right)_{y=0},$$
$$\frac{2}{kW_e c}(\varphi_i)_{y=0} = \varkappa\alpha + \frac{1}{2W_e}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{7}$$

care, împreună cu (3), sînt suficiente pentru rezolvarea problemei.

2. Determinarea circulației. Vom considera mai întîi semiplanul superior, pe care frontiera suflului (semicercul de rază a) îl împarte în două domenii. Pentru a găsi potențialul de viteze din interiorul suflului, vom observa că pe segmentul $(-a, +a)$ al axei Ox, viteza are atît o componentă u_i paralelă cu axa Ox, cît și o componentă v_i paralelă cu axa Oy. Vom descompune prin urmare potențialul de viteze φ_i în suma a două potențiale φ_{1i} și φ_{2i}, astfel încît φ_{1i} să dea pe segmentul $(-a, +a)$ numai o viteză $(u_{1i})_{y=0} = (u_i)_{y=0}$, iar φ_{2i} să dea numai o viteză $(v_{2i})_{y=0} = (v_i)_{y=0}$. În felul acesta, mișcarea din interiorul semicercului de rază a rezultă din combinarea unei mișcări, care admite axa Ox ca linie de curent, și a unei mișcări care admite aceeași axă ca linie de egal potențial. Mai mult încă, se observă că din cauza simetriei cîmpului de viteze, ambele mișcări admit axa Oy ca linie de curent.

Pentru mișcarea care admite axa Ox ca linie de curent, introducem potențialul complex

$$f_{1i}(z) = \varphi_{1i} + i\psi_{1i}, \tag{8}$$

care are pe axa Ox valori pur reale. Într-adevăr, această axă fiind linie de curent, putem pune, în orice puct al ei, $\psi_{1i} = 0$. Prin urmare, funcția $f_{1i}(z)$ se prelungește prin simetrie în semicercul de rază a din semiplanul inferior, luînd valori conjugate în punctele simetrice față de axa Ox.

La fel, pentru mișcarea care admite axa Ox ca linie echipotențială, introducem potențialul complex

$$f_{2i}(z) = \varphi_{2i} + i\psi_{2i}, \tag{9}$$

și putem pune $\varphi_{2i} = 0$ pe axa Ox. De aici rezultă că funcția $f_{2i}(z)$ se prelungește de asemenea prin simetrie în semicercul de rază a din semiplanul inferior, astfel încît în puncte simetrice față de axa Ox, partea ei reală ia valori de semne contrare, iar partea imaginară valori de același semn.

Funcțiile $f_{1i}(z)$ și $f_{2i}(z)$ sînt deci olomorfe în interiorul cercului de rază a cu centrul în origine. Suma lor

$$f_i(z) = f_{1i}(z) + f_{2i}(z) = \varphi_i + i\psi_i, \tag{10}$$

este de asemenea olomorfă în acest cerc și poate fi dezvoltată în serie Taylor

$$f_i(z) = bW_e \sum_{n=0}^{\infty} (p_n + iq_n)\left(\frac{z}{a}\right)^n, \tag{11}$$

unde p_n și q_n sînt coeficienți reali. Ținînd seama de condițiile pe care trebuie să

le îndeplinească funcţiile $f_{1i}(z)$ şi $f_{2i}(z)$, dezvoltarea precedentă trebuie să fie de forma

$$f_i(z) = bW_e\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} q_{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}\right], \tag{12}$$

de unde obţinem potenţialul de viteze

$$\varphi_i = bW_e\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\cos 2n\theta - \sum_{n=0}^{\infty} q_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\sin(2n+1)\,\theta\right]. \tag{13}$$

Un raţionament analog ne permite să găsim expresia potenţialului de viteze φ_e dinafara cercului de rază a. În acest scop, vom considera, în semiplanul superior, semicoroana circulară $a \leqslant |z| \leqslant \frac{b}{2}$ şi vom observa că pe segmentele $\left(-\frac{b}{2}, -a\right)$ şi $\left(+a, +\frac{b}{2}\right)$ de pe axa Ox, viteza are componenta u_e paralelă cu axa Ox şi componenta v_e paralelă cu axa Oy. Potenţialul de viteze φ_e se descompune prin urmare într-un potenţial φ_{1e} care dă pe segmentele amintite ale axei Ox numai viteza $(u_{1e})_{y=0} = (u_e)_{y=0}$ şi un potenţial φ_{2e} care dă pe aceleaşi segmente numai viteza $(v_{2e})_{y=0} = (v_e)_{y=0}$. Potenţialele complexe corespunzătoare $f_{1e}(z)$ şi $f_{2e}(z)$ se pot prelungi deci prin simetrie în semicoroana corespunzătoare din semiplanul inferior, întocmai ca şi în cazul precedent. Într-adevăr $f_{1e}(z)$ ia valori pur reale pe segmentele $\left(-\frac{b}{2}, -a\right)$ şi $\left(+a, +\frac{b}{2}\right)$, iar $f_{2e}(z)$ ia valori pur imaginare pe aceleaşi segmente. Suma acestor potenţiale complexe

$$f_e(z) = f_{1e}(z) + f_{2e}(z) = \varphi_e + i\psi_e, \tag{14}$$

este o funcţie olomorfă în coroana circulară $a \leqslant |z| \leqslant \frac{b}{2}$ şi admite dezvoltarea în serie Laurent

$$f_e(z) = bW_e\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(s_n + i\,t_n)\left(\frac{z}{a}\right)^n, \tag{15}$$

unde s_n şi t_n sînt coeficienţi reali. Dacă ţinem seama de faptul că, datorită simetriei cîmpului de viteze, axa Oy este linie de curent, obţinem

$$f_e(z) = bW_e\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[s_{2n}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n} + s_{-2n}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n}\right] + i\sum_{n=0}^{\infty}\left[t_{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1} + t_{-(2n+1)}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n+1}\right]\right\}, \tag{16}$$

de unde rezultă

$$\varphi_e = bW_e\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[s_{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} + s_{-2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right]\cos 2n\theta - \sum_{n=0}^{\infty}\left[t_{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} - t_{-(2n+1)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\right]\sin(2n+1)\,\theta\right. \tag{17}$$

Dacă introducem expresiile găsite pentru potențialele de viteze φ_e și φ_i în condițiile (3), printr-un calcul simplu, obținem următoarele relații între coeficienți

$$s_{2n} + s_{-2n} = \varkappa p_{2n}\,, \qquad s_{2n} - s_{-2n} = \frac{1}{\varkappa} p_{2n},$$
$$t_{2n+1} - t_{-(2n+1)} = \varkappa q_{2n+1}\,, \quad t_{2n+1} + t_{-(2n+1)} = \frac{1}{\varkappa} q_{2n+1}, \tag{18}$$

de unde găsim

$$s_{2n} = \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} p_{2n}\,, \qquad s_{-2n} = \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} p_{2n},$$
$$t_{2n+1} = \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} q_{2n+1}, \qquad t_{-(2n+1)} = -\frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} q_{2n+1}, \tag{19}$$

iar expresia potențialului φ_e devine

$$\varphi_e = b\,W_e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \left[\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \right] \cos 2n\theta - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} q_{2n+1} \left[\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} \right] \sin (2n+1)\theta \right\}. \tag{20}$$

Singurii coeficienți necunoscuți au rămas p_{2n} și q_{2n+1}; pentru determinarea acestora, ne vom servi de condițiile (7), în care introducem rezultatele precedente relațiile (13) și (20). Obținem astfel

$$\frac{2b}{kc} \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \left[\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} \left(\frac{a}{x}\right)^{2n} \right] = \alpha - \frac{b}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, q_{2n+1} \left[\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} \left(\frac{a}{x}\right)^{2n+2} \right], \tag{21}$$
$$\frac{2b}{kc} \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} = \varkappa\alpha - \frac{b}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, q_{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}.$$

Dacă introducem notațiile

$$\mu = \frac{kc}{2b}, \quad \mu_0 = \mu \frac{c_0}{c}, \quad \nu = \frac{b}{2a}, \tag{22}$$

după cîteva calcule simple, obținem

$$\frac{c_0}{c} \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \left[\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} \left(\frac{a}{x}\right)^{2n} \right] + \mu_0 \nu \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, q_{2n+1} \left[\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} \left(\frac{a}{x}\right)^{2n+2} \right] = \mu_0 \alpha\,, \tag{23}$$

pentru exteriorul suflului și

$$\frac{c_0}{c} \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \mu_0 \nu \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, q_{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} = \mu_0 \varkappa \alpha, \tag{24}$$

pentru interior.

Relaţiile (23) şi (24) reprezintă soluţia problemei. Dacă limităm dezvoltările la un număr convenabil de termeni şi alegem un număr corespunzător de puncte de pe anvergură în care relaţiile precedente trebuie să fie verificate, obţinem un sistem finit de ecuaţii liniare, care se rezolvă prin metode cunoscute. Rezultă astfel valorile coeficienţilor p_{2n} şi q_{2n+1}, iar în acest mod potenţialele de viteze φ şi φ_e sînt complete determinate pentru semiplanul superior.

Odată cunoscută soluţia pentru semiplanul superior, este uşor să o găsim şi pe aceea pentru semiplanul inferior. În acest scop, se observă că potenţialul complex al mişcării din afara cercului de rază a ia valori pur imaginare pe axa Ox, pentru $-\infty < x < -\frac{b}{2}$ şi $+\frac{b}{2} < x < +\infty$, deoarece aceste porţiuni ale axei Ox formează o linie de egal potenţial pe care putem lua, pentru potenţialul de viteze, valoarea zero. Prin urmare, potenţialul complex se prelungeşte prin simetrie în semiplanul inferior, astfel încît potenţialul de viteze ia valori egale şi de semne contrare în punctele simetrice faţă de axa Ox. Datorită relaţiilor care există între potenţialele de viteze din exteriorul şi din interiorul cercului de rază a, rezultatul obţinut se extinde şi la potenţialul de viteze din interiorul cercului. De aici rezultă imediat că pe cele două margini ale tăieturii $\left(-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}\right)$ atît φ_e cît şi φ_i iau valori egale şi de semne contrare; circulaţiile Γ_e şi Γ_i care sînt egale, în fiecare punct, cu diferenţa de potenţial dintre marginea superioară şi cea inferioară a tăieturii, vor avea prin urmare valorile date de relaţiile (5), pe care le justificăm pe această cale. Putem scrie deci, ţinînd seama de rezultatele precedente

$$\Gamma_e = 2b\,W_e \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}\left[\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa}\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}\right] \tag{25}$$

şi

$$\Gamma_i = 2b\,W_e \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}, \tag{26}$$

expresiile corespunzătoare ale portanţei şi rezistenţei induse deducîndu-se din formulele cunoscute.

CONCLUZII

Rezultatele găsite rezolvă problema propusă în cadrul ipotezelor admise la început. Metoda de tratare se poate extinde şi la cazuri mai complexe, de pildă la aripile avioanelor multimotoare, unde calculele devin însă mai complicate.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ВОКРУГ КРЫЛА ПРИ НАЛИЧИИ АКСИАЛЬНОЙ СТРУИ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении определяется циркуляция вокруг крыла самолета под действием струи пропеллера. Для упрощения определения автор предполагает, что струя имеет форму цилиндра круглого сечения и рассматривает только аксиальную скорость частиц.

Задача рассматривается в плоскости, продолженной в бесконечность по направлению течения струи, где движение плоское; при введении в виде рядов сложных потенциалов для внутренней (11) и внешней части струи (15) были найдены на основании условий на пределе струи (3) соотношения коэффициентов (18).

Далее, на основании условий на крыле (7), автором написана система уравнений (23) и (24), дающая возможность вычислить методом приближения неизвестные коэффициенты. Найденное таким образом для верхней полуплоскости решение может быть распространено аналитическим путем на нижнюю полуплоскость, что позволит получить выражения (25) и (26) циркуляции внутри и вне струи.

LA DÉTERMINATION DE LA CIRCULATION POUR L'AILE EN PRÉSENCE D'UN SOUFFLE AXIAL DE SECTION CIRCULAIRE

(RÉSUMÉ)

Dans cette Note, l'Auteur détermine la circulation autour d'une aile d'avion soumise au souffle de l'hélice. Il admet pour hypothèses simplificatrices que le souffle ait la forme d'un cylindre de section circulaire et ne considère que la vitesse axiale des particules. Le problème est traité dans un plan situé à l'infini aval, où le mouvement est plan — parallèle ; en introduisant les potentiels complexes, pour l'intérieur du souffle (11) et pour l'extérieur de celui-ci (15), sous la forme de séries, on trouve des relations entre les coefficients (18), à l'aide des conditions à la limite (3).

En utilisant les conditions sur l'aile (7) on écrit ensuite un système d'équations (23) et (24) permettant de calculer les coefficients inconnus par des méthodes d'approximation. La solution ainsi obtenue pour le demi-plan supérieur peut être prolongée analytiquement dans le demi-plan inférieur, ce qui permet d'obtenir les expressions (25) et (26) pour la circulation, à l'extérieur et à l'intérieur du souffle.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Aerodinamica*. Ed. tehnică, București, 1951, p. 420, 424, 453 și 454.
2. C. Koning, *Aerodynamic Theory* (ed. Durand). Julius Springer, Berlin, 1935, vol. IV, div. M.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

AERODINAMICA

DETERMINAREA SCURGERILOR ÎN JURUL ECRANELOR PERMEABILE DATE

DE

N. PATRAULEA

1. Consideraţii generale. Într o lucrare anterioară [1], am obţinut condiţiile la limită care, în baza ipotezelor Oseen, determină scurgerea în jurul suprafeţelor permeabile. Aceste condiţii, în cazul unei suprafeţe plane S de anvergură infinită, perpendiculară pe direcţia vitezei de deplasare (ecrane permeabile), U, deveneau

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

$$(\text{grad}\,\varphi)_\infty = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_1, \quad \text{pe} \quad S_2 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_2, \quad \text{pe} \quad S_2 \tag{4}$$

unde $\varphi\,(x, y)$ este potenţialul vitezelor u, v, în afara domeniului turbionar, considerate faţă de fluidul în repaus de la infinit, iar axele Oxy ca în figura 1. Indicii 1, 2 se referă la faţa anterioară, respectiv posterioară, a ecranului.

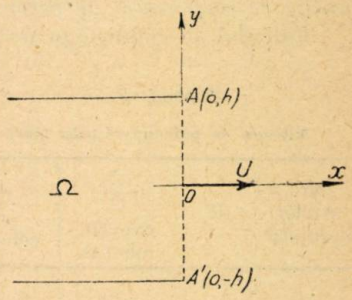


Fig. 1

Menţionam în aceeaşi lucrare cum se poate determina ecranul permeabil atunci cînd ni se dă distribuţia vitezelor la infinit aval în vîna turbionară. În această lucrare vom da o metodă de rezolvare a problemei directe, care constă în aflarea scurgerii în jurul unui ecran dat, cu o repartiţie oarecare a permeabilităţii.

2. Viteza de pătrundere prin placă. Vom defini coeficientul de permeabilitate al unei suprafeţe permeabile, numărul dat de expresia

$$K = \frac{\frac{\rho}{2} v_n^{*2}}{\delta p}, \tag{5}$$

unde v_n^* este viteza normală, în raport cu placa, datorită diferenței de presiune δp dintre fața anterioară și cea posterioară. Coeficientul K astfel definit, pentru viteze v_n^* suficient de mari, este practic constant. În general el variază cu numărul Reynolds și deci pentru aceeași suprafață, va fi o funcție de v_n^*. Această funcție se determină experimental și este caracteristică structurii permeabile respective.

Fie o placă permeabilă verticală, cu o repartiție oarecare a permeabilității în înălțime. Într-un punct al ecranului, diferența de presiune δp va fi dată de relația

$$\delta p = \rho U \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right] - \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V_2^2), \tag{6}$$

unde prin V s-a notat modulul vitezei.

Am arătat în lucrarea mai sus menționată că fiecărui strat de surse pozitive și vîrtejuri puse pe placa permeabilă îi corespunde un potențial Oseen.

Fie u_s, v_s și u_φ, v_φ, componentele vitezelor induse de stratul de surse, respectiv de stratul de vîrtejuri. Ținînd seama de comportarea vitezelor la traversarea acestor straturi, formula (1) devine

$$u^{*2} = 4K (U u_{s1} - v_{s1} v_{\varphi 1}), \tag{7}$$

unde u^* este componenta orizontală a vitezei de trecere prin placă, în valoare absolută. Vom neglija termenul v_{s1}, $v_{\varphi 1}$, iar pe de altă parte, avem evident

$$u_{s1} = U - u^* - u_{\varphi 1}. \tag{8}$$

Introducînd în formula (7) și rezolvînd în raport cu u^*, obținem

$$u^* = -2KU + \sqrt{4K^2U^2 + 4KU(U - u_{\varphi 1})}. \tag{9}$$

Neglijînd aici termenul $u_{\varphi 1}$ față de U, ceea ce este admisibil pentru ecrane suficient de permeabile, căpătăm

$$u^* = 2U\left(-K + \sqrt{K^2 + K}\right), \tag{10}$$

rezultat simplu, care ne arată că viteza de pătrundere u^* se poate calcula algebric în funcție de coeficientul de permeabilitate K.

Calculul se conduce prin aproximații succesive. Se pornește de la un K mediu, se determină u^*, care la rîndul lui fixează o nouă valoare pentru K din funcția $K(u^*)$ ș.a.m.d.

Formula (10) este verificată în mod remarcabil de experiență. Pentru plăcile omogene, rezultă că u^* este constantă pe placă, ceea ce s-a dovedit și experimental.

Pentru a se vedea gradul de apropiere a prezentei teorii de rezultatele experimentale *), dăm alăturat tabloul nr. 1.

S-au făcut experiențe și cu modele cu repartiție variabilă a permeabilității, rezultatele obținute fiind asemănătoare.

Tabloul nr. 1

Vitezele de pătrundere prin placă

Nr. sitelor suprapuse	K	$\frac{u^*}{U}$ experimental	$\frac{u^*}{U}$ calculat
1	0,5	0,71	0,73
2	0,25	0,60	0,618
3	0,164	0,52	0,546
4	0,125	0,5	0,502
5	0,1	0,43	0,464

*) Rezultatele sînt luate dintr-o lucrare experimentală anterioară [2].

3. Determinarea vitezelor în domeniul mişcării potenţiale. Fie $w = u - iv$ viteza complexă, în planul complex $z = x + iy$. Prin transformarea conformă

$$Z - = \frac{hi}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{11}$$

exteriorul plăcii este transformat în exteriorul cercului unitar din planul $Z = X + iY$.

Punînd

$$w\,[z\,(Z)] = W\,(Z); \quad Z = \rho e^{i\theta}, \tag{12}$$

funcţia $w\,(Z)$ trebuie să satisfacă următoarele condiţii la limită

$$W = 0, \quad |Z| = \infty \tag{13}$$

$$\text{Re}\, W = U - u^*; \quad \pi < \theta < 2\pi \tag{14}$$

$$\text{Im}\, W = -v^*; \quad 0 < \theta < \pi. \tag{15}$$

Funcţia $u^*\,(\theta)$ a fost determinată mai sus, iar funcţia $v^*\,(\theta)$ este cunoscută, dacă se dă direcţia vectorului viteză pe partea posterioară a plăcii. Practic această direcţie poate fi asigurată cu ajutorul unor plăcuţe deflectoare. În lipsa acestora, problema nu este determinată.

Două ipoteze extreme se pot face în acest din urmă caz:

a) Liniile de curent sînt normale pe faţa posterioară a plăcilor (cazul plăcilor aproape opace).

b) Liniile de curent nu suferă nici o refracţie la traversarea plăcii (cazul plăcilor cu permeabilitate mare).

Desigur, în general trebuie să adoptăm condiţii intermediare.

Condiţiile (14) şi (15) definesc o problemă Voltera care se poate reduce la o problemă Dirichlet. În vederea confruntării cu experienţa, vom considera acum numai ecrane omogene, în ipotezele *a)* şi *b)*.

În ipoteza *a)* se găseşte soluţia

$$W\,(Z) = -\frac{i + Z}{\sqrt{(Z-1)\,(Z+1)}}\,(U - u^*) + U - u^*, \tag{16}$$

care evident are defectul soluţiei Oseen pentru placa opacă, adică discontinuităţi, fizic, nepermise pe liniile care mărginesc domeniul turbionar Ω. Din acest punct de vedere ipoteza *b)* este mai reală.

În ipoteza *b)*, singularităţile de pe placă ce definesc funcţia W, sînt surse. Problema Dirichlet, în planul Z, va avea următoarele condiţii la limită

$$\begin{aligned} &\text{Re}\, W = U - u^* \quad , \quad \pi < \theta < 2\pi \\ &\text{Re}\, W = -\,(U - u^*) \quad , \quad 0 < \theta < \pi. \end{aligned} \tag{17}$$

În particular, pentru plăcile uniforme vom avea soluţia

$$W\,(Z) = \frac{2i}{\pi}\,(U - u^*)\,\log\frac{Z-1}{Z+1}. \tag{18}$$

Pentru plăcile foarte permeabile atît formula (16) cît şi formula (18) dau valori destul de apropiate de cele experimentale, în vecinătatea modelului.

Pentru obstacolele mai opace, influenţa frontierelor tunelului în care s-au făcut experienţele devine mare, astfel încît concluzii definitive nu se pot face înainte de a se elabora o teorie a acestor scurgeri în prezenţa frontierelor.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

4. Determinarea mişcării în jurul unei plăci permeabile situată într-un tunel de secţiune dreptunghiulară. Fie OA placa permeabilă de înălţime h care se reazemă în O, pe podeaua sufleriei de înălţime H. Vom considera mişcarea reală împreună cu mişcarea imagine faţă de podeaua Ox (fig. 2). Problema este aceea a aflării scurgerii provocate de ecranul $A'A$ cu distribuţie simetrică a permeabilităţii, şi care se deplasează cu viteza U prin sufleria de înălţime $2H$. Viteza complexă $w = u - iv$, care derivă din potenţialul Oseen, provine, făcînd abstracţie de o constantă reală $-C$, de la singularităţi aşezate pe placă (surse şi vîrtejuri) şi pe imaginile în număr infinit ale plăcii faţă de frontiere.

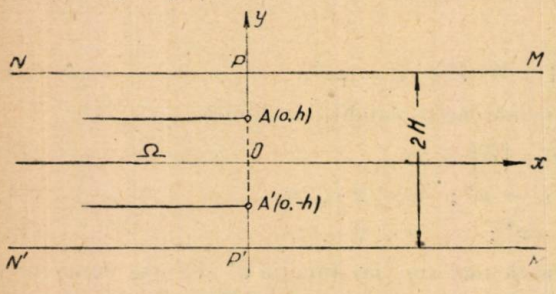


Fig. 2

Notînd cu u_s, v_s şi u_v, v_v, vitezele care provin de la surse, respectiv vîrtejuri, cu u^* valoarea absolută a vitezei de pătrundere prin placă datorită diferenţei de presiune δp, dintre faţa anterioară S_1 şi faţa posterioară S_2 se găseşte aceeaşi relaţie ca mai înainte.

$$u^{*2} = 4K\,(U\,u_{s1} - v_{s1}\,v_{v1}), \tag{19}$$

unde K este coeficientul de permeabilitate în punctul respectiv al plăcii.

Neglijînd termenul $v_{s1}\,v_{v1}$ din formula (19) şi remarcînd că avem

$$u_{s1} + u_{v1} + C = U - u^*, \tag{20}$$

ecuaţia (19) devine

$$u^* = 2\,U\left[-K + \sqrt{K^2 + K\left(1\,\frac{u_{v1}}{U} - \frac{C}{U}\right)}\right]. \tag{21}$$

Vom admite sub rezerva verificării *a posteriori* că $\frac{u_v}{U}$ este neglijabil faţă de unitate. Constanta C se determină în funcţie de suma Q a surselor aşezate pe placă, punînd condiţia ca la infinit amonte viteza să fie nulă:

$$u_{s\infty} + C = 0. \tag{22}$$

Pe de altă parte avem evident

$$Q = 4H\;u_{s\infty} = 4h\bar{u}_{s1}, \tag{23}$$

unde prin u_{s1} s-a notat media vitezii u_{s1} pe placă, aşa încît

$$C = -\frac{Q}{4UH} = -\,\bar{u}_{s1}\frac{h}{H} \tag{24}$$

şi

$$u^* = 2\,U\left[-K + \sqrt{K^2 + K\left(1 + \frac{\bar{u}_{s1}}{U}\cdot\frac{h}{H}\right)}\right]. \tag{25}$$

În general se poate neglija, cel puţin în prima aproximaţie şi termenul $\frac{\bar{u}_{s1}}{U}\cdot\frac{h}{H}$ faţă de 1, astfel că formula (21) devine ca şi în fluid nelimitat

$$u^* = 2U\left[-K + \sqrt{K^2 + K}\right]. \tag{26}$$

5. Condiţiile la limită pentru determinarea funcţiei w (z), ($z = x + iy$). Acestea vor diferi după ipotezele ce se fac în legătură cu direcţia vitezei pe S_2. Oricare ar fi ipoteza însă, condiţiile la limită conţin condiţia ca pe frontierele tunelului (NM şi $N'M'$) funcţia w să fie reală. Pentru a evita complicaţiile care provin din considerarea tuturor mişcărilor imagine faţă de frontiere, vom face o transformare conformă a benzii NM, $N'M'$, astfel ca ultima condiţie să se realizeze de la sine.

Într-adevăr funcţia $Z(z)$, definită de relaţiile

$$Z_1 = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{2}\frac{Z}{H}}}{1 + e^{-\frac{\pi}{2}\frac{Z}{H}}}, \quad Z_2 = \frac{Z_1}{1 + Z_1^2}$$
$$Z_2 = \frac{i}{4}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{h}{H}\right), \tag{27}$$

transformă conform, banda $NMN'M'$ cu tăietura reprezentată de ecranul $A'A$, în exteriorul cercului unitate din planul $Z = X + iY$, cu tăieturile MP şi NP (fig. 3).

Imaginea plăcii în planul Z fiind chiar cercul unitate, condiţiile la limită de pe placă vor deveni condiţii la limită pe cercul unitate pentru funcţia

$$W(Z) = w[z(Z)]. \tag{28}$$

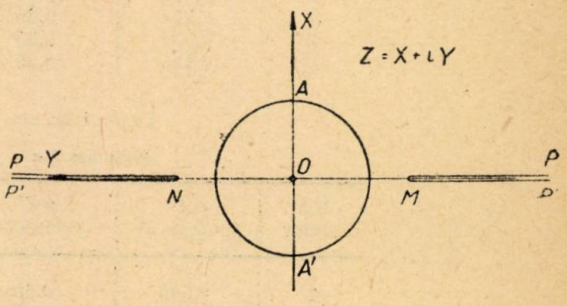


Fig. 3

Este evident că condiţia de frontieră este îndeplinită pe tăieturile NP şi MP, ca urmare a simetriei mişcării, aşa încît nu avem condiţii decît pe cerc şi la infinit în planul Z unde W ia valoarea din punctul P (sau P') al planului z.

Ipoteza a. Viteza este perpendiculară pe faţa posterioară S_2. Condiţiile la limită pe cercul unitar $Z = e^{i\theta}$ vor fi

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} W = U - u^*(\theta) \\ &\operatorname{Im} W = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

în plus

$$W_\infty = u_p. \tag{30}$$

Rezolvarea acestei probleme Voltera ne face cunoscută viteza W. Constanta u_p care intervine în soluţie se determină scriind că în punctul M (imaginea punctului de la infinit amonte) avem,

$$W_M = 0. \tag{31}$$

În particular pentru ecranele uniforme găsim

$$W(Z) = -\frac{i + Z}{\sqrt{(Z-1)(Z+1)}}(U - u^* - u_p) + U \quad u^*. \tag{32}$$

Ipoteza b. Liniile de curent nu suferă nici o *refracţie* pe placa permeabilă, ceea ce înseamnă că nu avem strat de vîrtejuri pe ecran, ci numai un strat de

surse. Această ipoteză este verificată cu atît mai exact cu cît obstacolul este mai permeabil.

Funcţia $W(Z)$ trebuie să îndeplinească următoarele condiţii la limită pe cercul unitar

$$\begin{aligned} &\text{Re } W = U - u^*, \quad \pi < \theta < 2\pi, \\ &\text{Re } W = -(U - u) + 2C \quad , \quad 0 < \theta < \pi. \end{aligned} \tag{33}$$

Pentru obstacole uniforme se găseşte soluţia

$$w(Z) = C + \frac{2i}{\pi}(U - u^* - C) \log \frac{Z - 1}{Z + 1}. \tag{34}$$

Tabloul nr. 2

Secţiunea 2,5 h

Nr. sitelor	u ipoteza a	u experimental	u ipoteza b
1	0,586	0,58	0,53
2	0,548	0,47	0,37
3	0,524	0,39	0,215
4	0,507	0,30	0,171
5	0,496	0,25	0,104

Tabloul nr. 3

Secţiunea 3 h

Nr. sitelor	u/U ipoteza a	u/U experimental	u/U ipoteza b
1	0,596	0,55	0,506
2	0,559	0,42	0,338
3	0,535	0,33	0,176
4	0,519	0,23	0,132
5	0,508	0,22	0,064

Tabloul nr. 4

Vitezele pe placă

Nr. sitelor	u/U ipoteza a	u/U experimental	u/U ipoteza b
1	0,412	0,71	0,753
2	0,358	0,62	0,665
3	0,324	0,52	0,583
4	0,300	0,50	0,561
5	0,284	0,43	0,523

În cazul experienţelor făcute, s-a luat $\frac{h}{H} = \frac{1}{5}$. Comparaţia cu valorile obţinute experimental la 2,5 h, respectiv la 3 h înapoia modelului, este dată în tablourile nr. 2, nr. 3 şi nr. 4.

După cum se vede, rezultatele experimentale sînt întotdeauna cuprinse între cele două ipoteze extreme.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБТЕКАНИЯ ВОКРУГ ДАННЫХ ПРОНИЦАЕМЫХ ЭКРАНОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении излагается метод вычисления движения вокруг проницаемых вертикальных экранов бесконечного протяжения. Метод основан на предельном движении Осеена и на предыдущем сообщении [1], в котором автор установил общие предельные условия для проницаемых поверхностей.

Таблицы 1, 2, 3, 4 показывают, что теория достаточно проверена на опыте.

L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES ÉCRANS PERMÉABLES DONNÉS

(RÉSUMÉ)

On expose, dans ce travail, une méthode pour le calcul du mouvement autour des écrans perméables, verticaux, d'envergure infinie. La méthode est basée sur le mouvement limite d'Oseen et sur un travail antérieur [1] dans lequel l'Auteur avait établi les conditions générales à la limite pour les surfaces perméables.

Les tableaux n°s 1, 2, 3, 4 montrent que la théorie est suffisamment vérifiée par l'expérience.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Patraulea, Comunicările Academiei R.P.R., t. II, nr. 11—12, noiembrie-decembrie 1952, p. 737.
2. E. Carafoli, I. Stroescu şi N. Cămărăşescu, Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 207.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

INFLUENŢA EFECTULUI GIROSCOPIC AL ROTORULUI ÎN STABILITATEA LONGITUDINALĂ A ELICOPTERULUI

DE

AL. MARINESCU

NOTAŢII

C_gXYZ = sistemul de coordonate al elicopterului

$Oxyz$ = sistemul fix de coordonate al rotorului

$O\xi'\eta'\zeta'$ = sistem ce se roteşte faţă de $Oxyz$ cu viteza unghiulară ω_1

$O\xi\eta\zeta$ = sistem legat de rotorul ale cărui pale sînt în poziţie de zbor la punct fix, ce se roteşte cu viteza unghiulară ω' faţă de $O\xi'\eta'\zeta'$

D = diametrul rotorului

R = raza rotorului

r = raza într-un punct oarecare al palei

F = suprafaţa măturată de rotor

t_0 = profunzimea la pale 0,7 R

σ_0 = suprafaţa tuturor palelor / suprafaţa măturată de rotor

a = raza cercului descris de articulaţiile de bătaie

h = distanţa punctului neutru de planul xoy

d_s = distanţa punctului neutru de centrul de greutate al elicopterului

z = numărul de pale

R_t = forţa rezultantă pe rotor

P = portanţa, normala direcţiei vitezei

$+ W_R$ = rezistenţa rotorului în cazul autogir

$- W_R$ = tracţiunea rotorului în cazul elicopter

W_p = rezultanta rezistenţelor pasive ale elicopterului

R_x = componenta lui R_t pe axa Ox

P_A = componenta pe Oz a forţei din lungul palei

X_A = forţa în lungul palei

G = greutatea elicopterului

m = masa elicopterului

M_R = momentul rezultantei rotorului în jurul centrului de greutate al elicopterului

M_y = momentul rezultantei rotorului în jurul axei y

$M_\xi M_\eta M_\zeta$ = momentele forţelor de pe rotor respectiv faţă de axele $\xi\eta\zeta$

M_A = momentul ampenajului în raport cu centrul de greutate al elicopterului

$I_\xi I_\eta I_\zeta$ = momentele de inerţie respectiv faţă de axele $\zeta\eta\zeta$ ale rotorului cu palele în poziţie de zbor la punct fix

J_Y = momentul de inerţie al elicopterului în jurul axei transversale, Y

t = timpul

v = viteza de zbor

U = viteza periferică a rotorului

ω = viteza unghiulară a rotorului

ω_0 = viteza unghiulară inițială a sistemului $O\xi\eta\zeta$ în jurul lui $O\zeta$ făcînd unghiul α_1 cu Oz

ω' = viteza unghiulară a sistemului $O\xi\eta\zeta$ în jurul lui $O\xi$ făcînd unghiul α cu Oz

ω_1 = viteza unghiulară a sistemului $O\xi'\eta'\zeta'$ în jurul lui Oz sau viteza de precesie

ω_Y = viteza unghiulară a elicopterului în jurul axului transversal Y

q = presiunea dinamică

ρ = densitatea aerului

l_s = unghiul dintre direcția vitezei și planul de rotație al articulațiilor de bătaie xoy

i = unghiul cuprins între direcția vitezei și un plan normal axei de comandă

θ = incidența palelor la 0,7 R

θ_s = amplitudinea variației ciclice a pasului palelor

χ = unghiul de rotație al rotorului

$\beta = \alpha_0 - \alpha_1 \cos\chi - \alpha_2 \sin\chi$ = unghiul de bătaie al unei pale funcție de $\chi \cdot \alpha_0$ se numește conicitate

Θ = unghiul dintre traiectorie și orizontală

ε = unghiul între planul de rotație al articulațiilor de bătaie și orizontală

δ = unghiul dintre axa de comandă și axa rotorului a cărei valoare absolută este amplitudinea variației ciclice a pasului

ν = unghiul dintre rezultanta rotorului și axa de comandă

σ = unghiul dintre axa de rotație a rotorului și linia unind centrul de greutate al elicopterului cu punctul neutru

K = unghiul dintre axa X a elicopterului și planul de rotație al articulațiilor de bătaie

i_w = unghiul de deflecțiune la ampenajul orizontal

Φ = calajul ampenajului orizontal față de axa X a elicopterului

k_0 = constanta palei

$\lambda = \frac{v}{U}$ = indice de progresie

S = suprafața ampenajului orizontal

l = distanța focarului ampenajului orizontal de centrul de greutate al elicopterului

C_a = coeficientul de portanță al rotorului raportat la viteza v de zbor;

$$P = C_a \frac{\rho}{2} v^2 F$$

k_r = coeficientul de portanță al rotorului raportat la viteza periferică

$$U;\ P = k_n \frac{\rho}{2} U^2 F$$

k_W = coeficientul de rezistență al rotorului raportat la viteza periferică

$$U;\ W_R = k_W \frac{\rho}{2} U^2 F$$

C_p = coeficientul de rezistență al părților pasive ale elicopterului raportat la viteza de zbor v; $W_p = \frac{\rho}{2} C_p v^2 F$

C'_H = panta portanței ampenajului funcție de incidență

$A_1, A_2 A_3$ = coeficienții ecuației caracteristice

μ = rădăcina ecuației caracteristice

k_1 = amortizment

k_2 = frecvență

T = perioada oscilațiilor

t_j = timpul necesar pentru ca amplitudinea oscilațiilor amortizate să ajungă la jumătate

t_α = timpul necesar pentru ca amplitudinea oscilațiilor neamortizate să ajungă dublă.

Observații. Sistemul de măsură adoptat este: metru, kilogram, secundă.

După cum semnalează unii autori efectul giroscopic al rotorului elicopterului nu este un fenomen peste care putem trece ușor spunînd că este complet neglijabil.

Lucrarea de față, care urmărește îndeaproape pe cea a lui V. J u s t [2], are drept scop, tocmai, de a scoate în evidență acest efect care se traduce prin importante consecințe atît în ce privește stabilitatea dinamică cît și în ce privește solicitarea palelor de care nu ne vom ocupa. Deoarece majoritatea evoluțiilor elicopterului se fac în planul de simetrie vom căuta efectul giroscopic cauzat de forțele din planul de simetrie și modul cum el se traduce în stabilitatea dinamică longitudinală.

Natural că vom face acest lucru adoptînd ipoteze simplificatoare, admițînd că mișcarea palelor și forțele acționînd pe rotor se adaptează instantaneu la starea de zbor, neglijînd efecte absolut secundare ca deplasări transversale (elicopterele monorotor) torsionarea palelor, deviația venei de aer etc.

A. CONSIDERAȚII PRIVIND AERODINAMICA ROTORULUI

a) Vom cerceta un rotor prevăzut cu duble articulații, ale cărui pale au o mișcare de bătaie de unghi instantaneu β față de planul de rotație al articulațiilor, și o mișcare în planul lor, zisă de baleiaj.

Neglijînd provizoriu comanda rotorului, vom putea spune că în zbor la punct fix adică $v = 0$ unghiul de bătaie β este constant $\beta \sim \alpha_0$ și palele descriu un con cu axa pe Oz care coincide cu axa de rotație, rezultanta R_t de pe rotor găsindu-se deci din motive de simetrie pe Oz (poziția punctată din fig. 1).

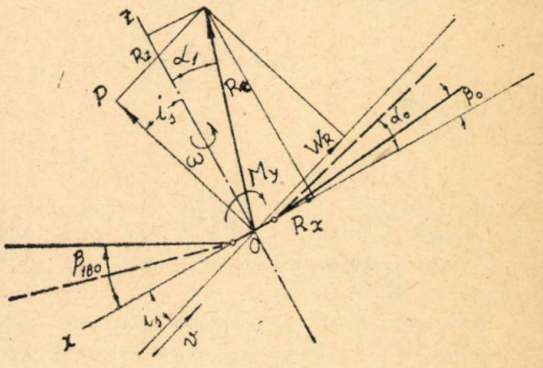


Fig. 1

Dacă elicopterul se mișcă înainte adică într-un zbor translatoriu, apare o disimetrie datorită faptului că în cursul unei rotații palele atacă aerul într-un mod diferit de la o poziție azimutală la alta.

În figura 2 privind rotorul de deasupra vedem că extremitatea palei are la poziția $\chi = 90°$ viteza $(U + v)$ și la $\chi = 270°$ viteza $(U - v)$. În concluzie, unghiul β variază datorită acțiunii aerodinamice variabile și se poate pune sub următoarea formă a seriei Fourier:

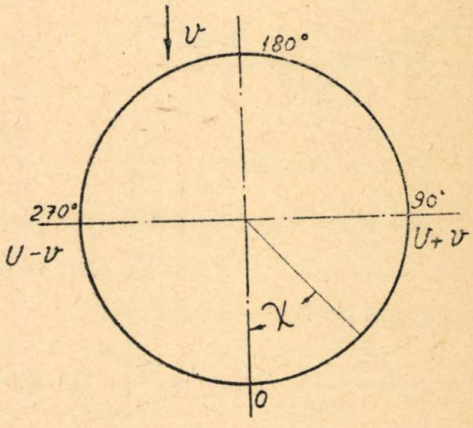


Fig. 2

$$\beta = \alpha_0 - \alpha_1 \cos \chi - \alpha_2 \sin \chi - \ldots \quad (1)$$

Pentru planul longitudinal ne interesează numai α_0 și α_1 care au următoarele expresii:

$$\alpha_0 = K_0 \left(\frac{k_n}{8{,}75\,\sigma_0} + 0{,}0215\,\theta \right) \quad (2) \qquad \alpha_1 = \lambda \left(\frac{k_n}{1{,}14\,\sigma_0} + 1{,}40 \right), \quad (3)$$

constanta palei K_0 putînd fi aproximată de $K_0 \sim 5\frac{\rho}{\rho_0}$, ρ_0 fiind densitatea aerului la sol.

Din relaţia (1) se vede că la $\chi = 0°$, $\beta = \alpha_0 - \alpha_1$, iar la $\chi = 180°$; $\beta = \alpha_0 + \alpha_1$ ceea ce înseamnă că, conul descris de pale este înclinat cu unghiul α_1, faţă de axa de rotaţie a rotorului.

Cum rezultanta R_t a rotorului coincide aproximativ cu axul conului înseamnă că ea face unghiul α_1 cu axa de rotaţie a rotorului.

Unghiul dintre traiectorie şi planul (xy) de rotaţie al articulaţiilor fiind i_s, rezistenţa rotorului este dată de următoarea relaţie

$$W_R = R_t \sin (i_s + \alpha_1) \tag{4}$$

au din cauza unghiurilor mici i_s şi α_1

$$W_R \sim R_t (i_s + \alpha_1) \sim P (i_s + \alpha_1). \tag{5}$$

Dacă mai ţinem seama că am notat

$$P = k_n \frac{\rho}{2} U^2 F \text{ şi } W_R = k_W \frac{\rho}{2} U^2 F,$$

Obţinem

$$k_W = k_n (i_s + \alpha_1). \tag{6}$$

Schema din figura 1 a rezultantei R_t ce acţionează în O, plus şi momentul M_y, poate fi înlocuită cu o alta, după un artificiu utilizat în mecanică, unde R are aceeaşi mărime şi direcţie, însă este situată în alt punct astfel ca să dea momentul M_y faţă de O,

Admiţînd acum că rezultanta tuturor forţelor acţionează pe o pală se găseşte aproximativ de-a lungul ei, şi presupunînd-o aproape egală cu forţa centrifugă a palei (fig. 3) vom avea

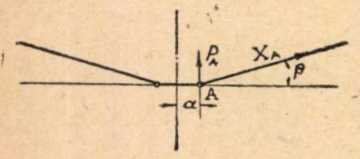


Fig. 3

$$X_A = \int_A^B \omega^2 r \, dm. \tag{7}$$

Notînd $H = \int_A^B r \, dm$,

forţa din articulaţie este dată de următoarea relaţie:

$$P_A = X_A \sin \beta \sim X_A \cdot \beta \sim \omega^2 \cdot H \cdot \beta. \tag{8}$$

Rezultanta pe întreg rotorul va fi

$$R_t = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \, d\chi = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega^2 \cdot H \cdot (\alpha_0 - \alpha_1 \cos \chi - \alpha_2 \sin \chi \ldots) \, d\chi \tag{9}$$

care, după ce se fac calculele, devine

$$R_t = z \cdot \omega^2 \cdot H \cdot \alpha_0. \tag{10}$$

Observînd că rezultanta aerodinamică R_t dă, în planul de rotaţie al articulaţiilor, componenta $R_x \sim R_t \cdot \alpha_1$ (fig. 1), punctul în care R_t întîlneşte axa de rotaţie

va fi față de planul articulațiilor la distanța

$$h = \frac{M_y}{R_x}. \tag{11}$$

Momentul M al unei pale în jurul axei y (fig. 4) are următoarea expresie

$$M = -P_A \cdot a \cdot \cos\chi = -\omega^2 \cdot H \cdot a \cdot \cos\chi \cdot \beta. \tag{12}$$

Pe întreg rotorul avem

$$M_y = \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} M d\chi = \frac{z}{2\pi} \cdot H \cdot a \cdot \left[\int_0^{2\pi} \alpha_1 \cos^2\chi\, d\chi + \right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi} \alpha_2 \sin\chi \cos\chi\, d\chi - \int_0^{2\pi} \alpha_0 \cos\chi\, d\chi\right], \tag{13}$$

sau, după ce s-au efectuat integralele obținem $M_y = \frac{z}{2} \cdot \omega^2 \cdot H \cdot a \cdot \alpha_1$, (14)

cu care

$$h = \frac{\frac{z}{2}\omega^2 H a \alpha_1}{z \cdot \omega^2 \cdot H \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1} = \frac{a}{2\alpha_0}. \tag{15}$$

Deoarece α_0 este unghiul de bătaie al palelor la punct fix, care practic nu schimbă viteza de zbor, înseamnă că h este independent de viteză pentru că a este

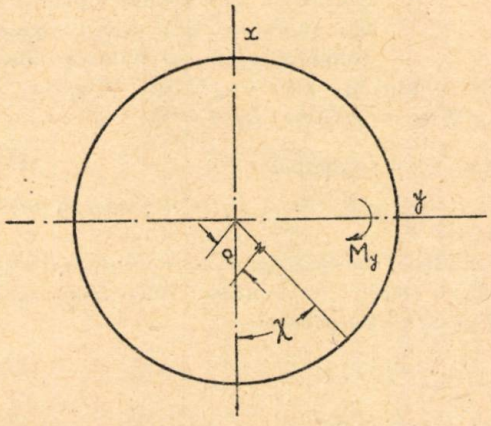


Fig. 4

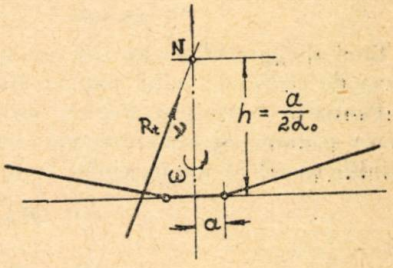


Fig. 5

constant. De aceea, punctul N (fig. 5) de intersecție al direcției lui R_t cu axa de rotație a rotorului se numește punct neutru.

În felul acesta, rezultanta aerodinamică R_t, înclinația ei și înălțimea h a punctului neutru ne dă posibilitatea determinării acțiunilor aerodinamice pe rotor.

b) Ne vom ocupa acum de influența comenzii rotorului.

Am văzut că în cazul rotorului necomandat la punct fix, rezultanta rotorului coincide cu axa lui.

Efectul comenzii în planul longitudinal se explică prin înclinarea rezultantei R_t înainte sau înapoi, înclinare ce se realizează cu ajutorul unui mecanism (disc oblic) care imprimă palelor o deplasare unghiulară periodică în jurul axei lor longitudinale de forma $\Delta\theta = \theta_s \sin\chi$.

Introducem cu această ocazie noţiunea de axă de comandă a rotorului care face cu axa de rotaţie a rotorului unghiul δ, avînd semnul plus, cînd axa de comandă este în urmă, şi minus, invers. Observăm acum, privind şi figura 6, că poziţia rezultantei R_t se poate defini prin unghiul ν faţă de axa de comandă şi nu faţă de axa rotorului. De aici reiese o concluzie importantă, aceea că prin comanda rotorului la punct fix, rezultanta R_t, care coincide cu axa de comandă, nu mai coincide cu axa de rotaţie a rotorului.

Variaţia ciclică a pasului $\Delta\theta = \theta_s \sin \chi$ cum se mai numeşte, dă palelor o mişcare de bătaie.

Variaţia ciclică $\Delta\theta$ este zero pentru $\chi = 0°$ şi $+\theta_s$ pentru $\chi = 90°$, apoi din nou devine zero pentru $\chi = 180°$. Pentru $\chi = 90°$ unghiul de bătaie nu va fi $\Delta\beta = +\theta_s$ ci numai pentru $\chi = 180°$, fapt care s-a explicat prin acţiunea forţelor de inerţie. Conchidem ca pentru $\chi = 0°$ unghiul de bătaie să fie $-\theta_s$ iar pentru $\chi = 90°$ şi $\chi = 270°$ el să fie nul. Cu această ocazie iese în evidenţă defazajul dintre variaţia unghiului de incidenţă şi al unghiului de bătaie β.

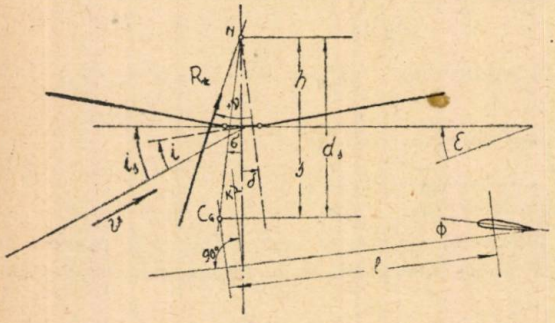


Fig. 6

Această bătaie secundară $\Delta\beta$, pentru o amplitudine pozitivă θ_s, va face să basculeze în urmă conul descris de pale şi împreună cu acesta şi rezultanta R_t cu un unghi θ_s. Ca o aplicaţie, după cele arătate mai sus, avem la punct fix pentru o alegere $\theta_s = -\delta$

$$-\delta_{\text{comandă}} = +\theta_{s\,\text{pală}} = -\delta_{\text{rezultantă}}. \tag{16}$$

Cînd elicopterul zboară cu viteza v atunci rezultanta R_t se deplasează faţă de axa de comandă luînd poziţia din figura 6.

Pentru a determina unghiul de comandă δ, în cazul general, cînd elicopterul ar avea şi ampenaj orizontal, vom considera ecuaţia de echilibru între momentul rotorului şi cel al ampenajului faţă de centrul de greutate

$$M_R - M_A = 0, \tag{17}$$

unde

$$M_R = R_t \cdot d_s \cdot (\nu - \delta - \sigma) \tag{18}$$

în care $d_s = h + s$.

Pentru momentul ampenajului punînd $i = i_s - \delta$ avem:

$$M_A = S \cdot l \cdot \frac{\rho}{2} v^2 C_H' (i - i_w + \Phi - K + \delta). \tag{19}$$

În ecuaţia (17) notînd $R_t = C_a \cdot q \cdot F$,

unde $q = \frac{\rho}{2} v^2$, rezultă

$$\delta = \frac{C_a \cdot F \cdot d_s (\nu - \sigma) - S \cdot l \cdot C_H' (i - i_w + \Phi - K)}{F \cdot C_a \cdot d_s + S \cdot l \cdot C_H'} \tag{20}$$

pe care-l calculăm cunoscînd $k_n = f(i)$ şi valoarea lui i_w.

În cazul elicopterului fără ampenaj orizontal, se vede din figura 6 că va trebui ca rezultanta să se găsească pe o linie ce trece prin centrul de greutate, astfel că $-\delta = \sigma$ și $\nu = 0$, de aceea unghiul constructiv σ joacă un rol important, constituind factorul asupra căruia se acționează în cazuri de instabilitate.

B. EFECTUL GIROSCOPIC AL ROTORULUI

În cele ce urmează vom stabili anumite rezultate ce se referă în special la rotoarele simetrice.

Unghiul de comandă δ precizat anterior, avînd valori mici și punctul neutru fiind situat aproape de originea O a axelor fixe ale rotorului, momentul suplimentar față de O introdus de comanda rotorului este neglijabil. Nu se mai întîmplă același lucru atunci cînd este vorba de momentul față de centrul de greutate.

Deci în stabilirea efectului giroscopic vom lua elementele rotorului necomandat, mai ales că pentru stabilitate, presupunem că pilotul lasă comenzile blocate.

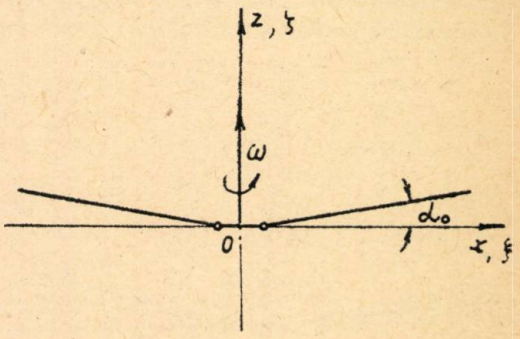


Fig. 7

Să considerăm din nou rotorul la punct fix, figura 7 (într-o atmosferă neperturbată), rotindu-se cu viteza ω în jurul lui $O\zeta$ care coincide cu Oz. Deoarece momentul tuturor forțelor de pe rotor este presupus nul față de centrul O, nu vom avea mișcare de precizie (efect giroscopic); în această situație voim să dovedim stabilitatea axei $O\zeta$. Presupunem că viteza ω a încercat o mică abatere față de axa $O\zeta$ astfel că pe axele legate de rotor avem rotațiile ω_ξ, ω_η, ω_ζ care la rîndul lor sînt și ele mici.

Pentru rotorul considerat care presupunem că-și păstrează forma din figura 7, avem $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$ în plus $I_\xi = I_\eta$ și deci ecuațiile lui Euler vor fi

$$\begin{aligned} I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + (I_\zeta - I_\xi)\,\omega_\eta \cdot \omega_\zeta &= 0, \\ I_\xi \frac{d\omega_\eta}{dt} + (I_\xi - I_\zeta)\,\omega_\xi\,\omega_\zeta &= 0, \\ I_\zeta \frac{d\omega_\xi}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Din ultima ecuație (21) rezultă că $\omega_\zeta = \text{const.}$, iar pe primele două le putem scrie notînd cu $\bar{u}_1 = \dfrac{I_\zeta - I_\xi}{I_\xi}\omega_\zeta$ și derivînd

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega_\xi}{dt^2} + \bar{u}_1 \frac{d\omega_\eta}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2\omega_\eta}{dt^2} - \bar{u}_1 \frac{d\omega_\xi}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Ţinînd seama de expresiile iniţiale (21), înlocuind $\frac{d\omega_\eta}{dt}$ şi $\frac{d\omega_\xi}{dt}$ obţinem,

$$\frac{d^2\omega_\xi}{dt^2} + \bar{u}_1^2\omega_\xi = 0,$$
$$\frac{d^2\omega_\eta}{dt^2} + \bar{u}_1^2\omega_\eta = 0, \tag{23}$$

ale căror soluţii sînt

$$\omega_\xi = C' \sin \bar{u}_1 t + C'' \cos \bar{u}_1 t,$$
$$\omega_\eta = D' \sin \bar{u}_1 t + D'' \cos \bar{u}_1 t, \tag{24}$$

cum mărimile $\sin \bar{u}_1$, t şi $\cos \bar{u}_1 t$ rămîn mărginite în modul de la şi mărimile $C'C''D'D''$ depinzînd de condiţiile iniţiale sînt mici, rezultă că ω_ξ şi ω_η vor fi şi ele mici.

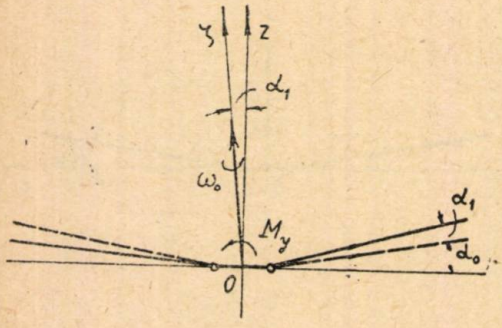


Fig. 8

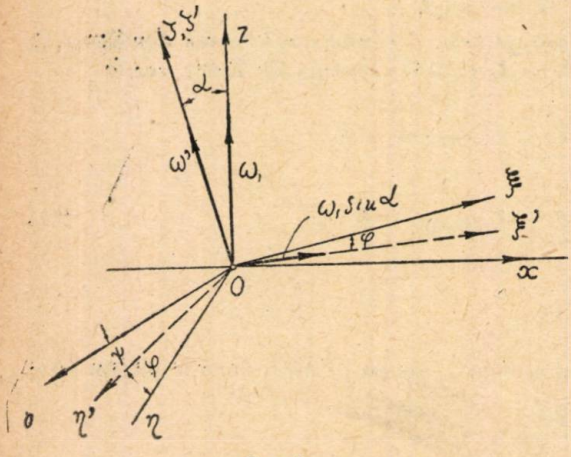


Fig. 9

Acest lucru dovedeşte stabilitatea axei $O\zeta$, adică, micile perturbaţii în zborul la punct fix în atmosfera liniştită nu antrenează rotorul în nici o mişcare de precesie mai importantă.

În momentul cînd apare o disimetrie (fig. 8) adică într-un zbor de translaţie sau la punct fix, cînd apar perturbaţii, rafale etc., lucrurile stau ca şi cum conul indeformabil de conicitate α_0 al palelor ar bascula în jurul lui O şi s-ar roti în jurul axei $O\zeta$ cu viteza $\omega_0 = \omega \cos \alpha_1$, momentul forţelor ce acţionează asupra rotorului, în raport cu punctul O, fiind My. Dacă nu ţinem seama de efectul giroscopic, axa $O\zeta$ face unghiul constant α_1 cu Oz, viteza ω_0 rămînînd constantă. Cum însă vrem să ţinem seama de acest efect, să raportăm rotorul, care presupunem că-şi menţine aproximativ dispoziţia palelor de la punctul fix, la un sistem Euler, figura 9. În condiţiile momentului existent My faţă de O, se ştie că — din mecanică — avem o mişcare de precesie în aşa fel, încît viteza ω' în jurul lui $O\zeta$ este variabilă, unghiul de nutaţie nu mai rămîne α_1 ci devine α, care şi el la rîndul lui este variabil, viteza de precesie fiind ω_1. Schema din figura 9 arată la un moment dat situaţia rotorului.

Sistemul $O\xi\eta\zeta$ se roteşte cu viteza ω' faţă de $O'\xi\eta'\zeta$ ($O\zeta$ coincide cu $O\zeta'$) iar $O\xi'\eta'\zeta$ cu viteza ω_1, faţă de sistemul fix $Oxyz$, viteza în jurul axei nodurilor $O\eta'$

este $\alpha = \frac{d\alpha}{dt}$, iar vitezele unghiulare de pe axele principale de inerție $\xi\ \eta\ \zeta$ fiind:

$$\begin{aligned} \Omega_{t\xi} &= -\frac{d\alpha}{dt}\sin\varphi + \omega_1 \sin\alpha\cos\varphi, \\ \Omega_{t\eta} &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\varphi + \omega_1 \sin\alpha\sin\varphi, \\ \Omega_{t\zeta} &= \omega' + \omega_1\cos\alpha. \end{aligned} \tag{25}$$

De-a lungul aceloraşi axe, proiecțiile momentului cantității de mișcare $\overline{K}$ sînt

$$\begin{aligned} K_\xi &= I_\xi \Omega_{t\xi} = I_\xi\left(-\frac{d\alpha}{dt}\sin\varphi + \omega_1\sin\alpha\cos\varphi\right) \\ K_\eta &= I_\eta \Omega_{t\eta} = I_\eta\left(\frac{d\alpha}{dt}\cos\varphi + \omega_1\sin\alpha\sin\varphi\right) \\ K_\zeta &= I_\zeta \Omega_{t\zeta} = I_\zeta(\omega' + \omega_1\cos\alpha). \end{aligned} \tag{26}$$

Cînd apare disimetria, momentul forțelor asupra rotorului fiind dirijat după $O\eta'$ (care la punct fix coincidea cu Oy), înseamnă că este nul față de axele $O\zeta$, Oz şi din relația fundamentală din mecanică $\frac{dK}{dt} = \mathfrak{M}$ (derivata în raport cu timpul momentului cantității de mișcare față de un punct este egală cu momentul forțelor exterioare față de același punct), rezultă că K_ζ şi K_z sînt constante. Ultima relație (26) în care $K_\zeta = \text{const.}$ atrage

$$\omega' + \omega_1\cos\alpha = \omega_0 = \text{const.} \tag{27}$$

Prin proiecția lui $\overline{K}$ pe Oz se obține

$$K_z = K_\xi\cos\varphi\sin\alpha + K_\eta\sin\varphi\sin\alpha + K_\zeta\cos\alpha. \tag{28}$$

Ținînd seama de expresiile (26) ale lui K_ξ, K_η, K_ζ şi de relația (27) obținem

$$K_z = I_\xi\,\omega_1\sin^2\alpha + I_\zeta\,\omega_0\cos\alpha = I_\zeta\,\omega_0\cos\alpha_1. \tag{29}$$

Energia cinetică inițială a sistemului este $L_0 = \frac{I_\zeta}{2}\omega_0^2$, iar la un moment dat

$$L = \frac{I_\xi}{2}\Omega_{t\xi}^2 + \frac{I_\xi}{2}\Omega_{t\eta}^2 + \frac{I_\xi}{2}\Omega_{t\zeta}^2 \tag{30}$$

în care înlocuind valorile (25) ale lui $\Omega_{t\xi}$, $\Omega_{t\eta}$, $\Omega_{t\zeta}$ se obține

$$L = \frac{I_\xi}{2}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \omega_1^2\sin^2\alpha\right] + \frac{I_\zeta}{2}\omega_0^2 \tag{31}$$

Considerînd cu o uşoară aproximaţie că momentul M_y din jurul punctului O s-ar datora unei forţe verticale $R_{t\varepsilon} = \varepsilon R_t$ acţionînd la o distanţă h_ε (figura 10), atunci variaţia energiei cinetice se regăseşte în variaţia lucrului mecanic echivalent al forţei $R_{t\varepsilon}$ sub forma

$$\Delta L = \frac{I_\xi}{2}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \omega_1^2 \sin^2\alpha\right] = R_{t\varepsilon}\, h_\varepsilon\, (\cos\alpha_1 - \cos\alpha) \tag{32}$$

ε fiind de ordinul 0,015.

Eliminînd pe ω_1 între ecuaţiile (29) şi (32) obţinem

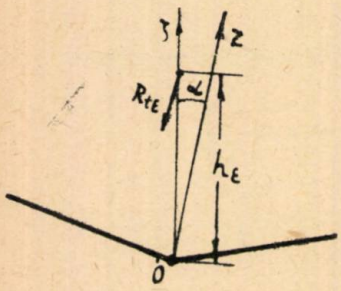


Fig. 10

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{I_\zeta\,\omega_0^2\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha)}{I_\xi \sin^2\alpha} = \frac{2R_{t\varepsilon}}{I_\xi}\, h_\varepsilon\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha). \tag{33}$$

Prin substituţia $u = \cos\alpha$ ecuaţia (33) devine

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{I_\zeta\,\omega_0^2\,(u_1 - u)^2}{I_\xi^2} = \frac{2R_{t\varepsilon}}{I_\xi}\, h_\varepsilon\,(u_1 - u)\,(1 - u^2) \tag{34}$$

care se mai poate scrie notînd cu $\Lambda = 2\,h_\varepsilon$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{U_1 - U}{I_\xi^2}\,[I_\xi\, R_{t\varepsilon}\,\Lambda\,(1 - u^2) - I_\zeta^2\,\omega_0^2\,(u_1 - u)]. \tag{35}$$

Condiţia ca fenomenul giroscopic să existe este ca

$$\frac{R_{t\varepsilon}\,\Lambda}{I_\xi}(u_1 - u)\,(u - u_1')\,(u_2 - u_1) > 0 \tag{36}$$

în care u_1 şi u_2 sînt rădăcini ale ecuaţiei

$$V(u) = I_\xi\, R_{t\varepsilon}\,\Lambda\,(1 - u^2) - I_\zeta\,\omega_0^2 (u_1 - u) = 0 \tag{36'}$$

Deoarece $\Lambda \neq 0$ presupunînd $u_2 > u_1'$ avem $V(-1) < 0$; $V(u_1) > 0$; $V(+1) > 0$; $V(+\infty) < 0$. Cum u este mărginit de 1 şi u_1' se găseşte între -1 şi u_1, denotă că u_2 nu este acceptabilă deoarece se găseşte între $+1$ şi $+\infty$. Rămîne ca $(u_1 - u)\,(u - u_1') > 0$ care atrage

$$\cos\alpha_1 \geqslant \cos\alpha \geqslant \cos\alpha_1' \quad \text{sau} \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1'$$

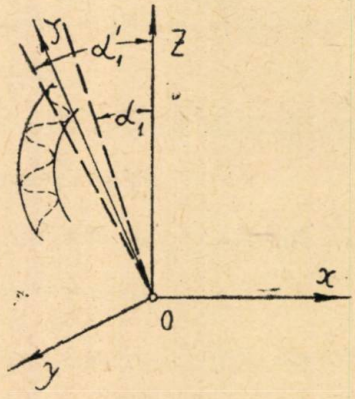


Fig. 11

care nu spune altceva decît că în mişcarea de precesie axa $O\zeta$ oscilează între două conuri de semideschidere α_1 şi α_1' (fig. 11) cu alte cuvinte conul indeformabil al palelor de conicitate α_0 basculează între aceste două unghiuri.

Din acest efect giroscopic pe noi ne interesează variaţia de unghi $\alpha_1' - \alpha_1$ avînd importanţă în stabilitatea longitudinală. Sub efectul reacţiilor laterale care apar, mişcarea de precesie propriu-zisă se manifestă destul de puţin, rotorul este readus în poziţia iniţială dominînd în special, pentru ceea ce ne interesează, mişcarea de

nutație. Această variație de unghi între poziția aerodinamică α_1 a axei $O\zeta$ și poziția giroscopică α_1' își atinge maximul în planul longitudinal și în acest scop ne propunem a o determina. Variația de unghi fiind mică vom scrie

$$\cos\alpha_1 - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha}{2} \sim (\alpha-\alpha_1)\sin\alpha_1\frac{d\alpha}{dt} =$$

$$= \frac{d(\alpha-\alpha_1)}{dt}\,;\ \sin\alpha \sim \sin\alpha_1$$

cu care ecuația diferențială (33) devine

$$\left[\frac{d(\alpha-\alpha_1)}{dt}\right]^2 = \frac{R_{t\varepsilon}}{I_\xi}\Lambda\sin\alpha_1(\alpha-\alpha_1) - \frac{I_\zeta^2\omega_0^2}{I_\xi^2}(\alpha-\alpha_1)^2. \tag{37}$$

Derivînd în raport cu t și efectuînd obținem

$$\frac{d^2(\alpha-\alpha_1)}{dt^2} + \frac{I_\zeta^2\omega_0^2}{I_\xi^2}(\alpha-\alpha_1) = \frac{R_{t\varepsilon}\Lambda\sin\alpha_1}{2I_\xi}, \tag{38}$$

a cărei integrală este

$$\alpha-\alpha_1 = \frac{R_{t\varepsilon}I_\xi\Lambda\sin\alpha_1}{2I_\zeta^2\omega_0^2}\left[1-\cos\frac{I_\zeta\omega_0}{I_\xi}\cdot t\right]. \tag{39}$$

Perioada de nutație fiind $T_r = \dfrac{2\pi I_\xi}{I_\zeta\omega_0}$, atunci amplitudinea oscilației de nutație va fi făcînd în relația (39) $t = \dfrac{\pi I_\xi}{I_\zeta\omega_0}$

$$\Delta\alpha_1 = \alpha_1' - \alpha_1 = \frac{R_{t\varepsilon}I_\xi\Lambda\sin\alpha_1}{I_\zeta^2\omega_0^2} \sim \frac{R_{t\varepsilon}I_\xi\Lambda}{I_\zeta^2\omega_0^2}\alpha_1. \tag{40}$$

Deci pentru calculul de stabilitate vom avea de considerat unghiul rezultantei

$$\alpha_{1t} = \frac{v}{U}\left(\frac{k_n}{1{,}14\,\sigma_0} + \theta\cdot 1{,}4\right)\left(1+\frac{R_{t\varepsilon}I_\xi\Lambda}{I_\zeta^2\omega_0^2}\right), \tag{41}$$

care cuprinde și efectul giroscopic. Trecem să vedem care sînt consecințele acestui unghi real.

C. STABILITATEA DINAMICĂ LONGITUDINALĂ

În mișcarea din planul longitudinal al elicopterului, ca urmare a ipotezelor făcute, vom adopta ca variabile viteza v din lungul traiectoriei, incidența i a rotorului, adică unghiul dintre planul normal axei de comandă și direcția vitezei, precum și unghiul Θ dintre traiectorie și orizontală, figura 12.

Avem la dispoziție trei ecuații, dintre care două de proiecție a forțelor lucrînd asupra aerodinei în direcția de zbor și normal ei, și încă una de momente a forțelor în jurul centrului de greutate. Vom avea în direcția de zbor

$$\pm W_R \pm m\frac{dv}{dt} + W_p \pm G\sin\Theta = 0 \tag{42}$$

care exprimă că tracţiunea sau rezistenţa rotorului, forţa de inerţie, rezistenţa pasivă a fuzelajului şi componenta greutăţii pe direcţia de zbor sînt în echilibru. Perpendicular pe direcţia de zbor avem

$$+ P - mv \frac{d\Theta}{dt} - G \cos \Theta = 0, \tag{43}$$

adică portanţa rotorului, forţa centrifugă şi componenta greutăţii perpendiculare pe direcţia de zbor sînt în echilibru.

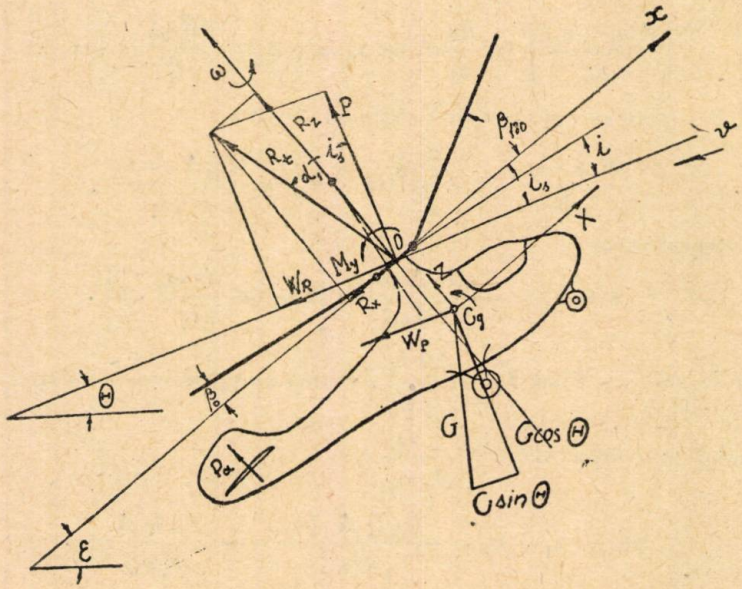


Fig. 12

Echilibrul momentelor în jurul axei transversale a aerodinei dă

$$- J_Y \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + M_R - M_A = 0, \tag{44}$$

cu alte cuvinte momentul forţelor de inerţie în jurul axei transversale, momentul rotorului şi al ampenajului sînt în echilibru.

Reamintim că portanţa $P = k_n \frac{\rho}{2} U^2 F = C_a \frac{\rho}{2} v^2 F$ rezistenţa rotorului $W_R = k_w \frac{\rho}{2} U^2 F$ şi rezistenţa fuzelajului $W_P = C_P \frac{\rho}{2} U^2 F$. Indicele de progresie $\lambda = \frac{v}{U}$, în cazurile obişnuite variază în jurul cifrei 0,3 pentru care portanţa P este aproape independentă de incidenţă. În aceste condiţii vom considera traiec-

toria elicopterului aproape rectilinie, neglijînd curbura ei, astfel că rămîn numai variabilele ν și i. Vom porni de la ecuațiile

$$\pm k_W \frac{\rho}{2} U^2 F \pm m \frac{d\nu}{dt} + C_P \frac{\rho}{2} \nu^2 F \pm G \sin \Theta = 0, \tag{45}$$

$$-\int_\gamma \frac{d^2 i}{dt^2} + R_t d_s (\nu - \delta - \sigma) - S \cdot l \cdot q C_H' \left(i - i_W + \Phi - K + \delta + \frac{l}{\nu} \frac{di}{dt} \right) = 0,$$

unde în ecuațiile (46) am pus $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \sim \frac{d^2 i}{dt^2}$ dată fiind independența unghiului Θ și δ de timp.

Facem o reducere a celei de a doua ecuații (45) introducînd o variabilă auxiliară τ astfel încît sistemul (45) să ia forma echivalentă

$$\frac{d\nu}{dt} = f_1 = -k_W \frac{g}{G} \frac{\rho}{2} U^2 F - \frac{g}{G} C_P \frac{\rho}{2} \nu^2 F - g \sin \Theta, \tag{46}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = f_2 = \frac{R_t d_s}{J_\gamma} (\nu - \delta - \sigma) - \frac{S}{J_\gamma} l \cdot q C_H' \left(i - i_W + \Phi - K + \delta + \frac{l}{\nu} \tau \right),$$

$$\frac{di}{dt} = f_3 = \tau.$$

Procedînd prin metoda micilor oscilații vom pune

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \nu_1 e^{\mu t}, \\ \Delta\tau &= \tau_1 e^{\mu t}, \\ \Delta i &= i_1 e^{\mu t}. \end{aligned} \tag{47}$$

Cu aceste înlocuiri obținem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\nu + \Delta\nu) &= f_1(\nu + \Delta\nu, \quad \tau + \Delta\tau, \quad i + \Delta i), \\ \frac{d}{dt}(\tau + \Delta\tau) &= f_2(\nu + \Delta\nu, \quad \tau + \Delta\tau, \quad i + \Delta i), \\ \frac{d}{dt}(i + \Delta i) &= f_3(\nu + \Delta\nu, \quad \tau + \Delta\tau, \quad i + \Delta i), \end{aligned} \tag{48}$$

Dezvoltînd în serie Taylor și reținînd primii termeni avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta\nu) &= \frac{\partial f_1}{\partial \nu} \Delta\nu + \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial f_1}{\partial i} \Delta i, \\ \frac{d}{dt}(\Delta\tau) &= \frac{\partial f_2}{\partial \nu} \Delta\nu + \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial f_2}{\partial i} \Delta i, \\ \frac{d}{dt}(\Delta i) &= \frac{\partial f_3}{\partial \nu} \Delta\nu + \frac{\partial f_3}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial f_3}{\partial i} \Delta i. \end{aligned} \tag{49}$$

Cu notaţiile

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = a_1^1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial \tau} = a_1^2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial i} = a_1^3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho} = a_2^1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = a_2^2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial i} = a_2^3$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \rho} = a_3^1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial \tau} = a_3^2 \quad \frac{\partial f_3}{\partial i} = a_3^3,$$

ţinînd seama de substituţiile (47), condiţia de compatibilitate a sistemului liniar ce se formează în ρ_1, τ_1, i_1, ne conduce la determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \mu & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 - \mu & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 - \mu \end{vmatrix} = 0, \tag{50}$$

din care obţinem ecuaţia caracteristică

$$\mu^3 + A_1 \mu^2 + A_2 \mu + A_3 = 0, \tag{51}$$

unde

$$A_1 = -(a_1^1 + a_2^2 + a_3^3)$$

$$A_2 = a_2^2 a_3^3 + a_1^1 a_3^3 + a_1^1 a_2^2 - a_1^3 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 - a_2^3 a_3^2$$

$$A_3 = a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^3 a_3^1 a_2^2 - a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^2 a_3^1 a_2^3 - a_1^3 a_2^1 a_3^2.$$

Ţinînd seama că $G \sim P$ şi $\frac{\partial \nu}{\partial i} = 0$, punînd $S \cdot l \cdot C_H' = Q$, făcînd toate calculele, obţinem

$$A_1 = \frac{g}{k_n} \frac{\partial k_w}{\partial \rho} + \rho \rho \left(\frac{C_p F g}{G} + \frac{Ql}{2 J_\gamma} \right)$$

$$A_2 = \frac{\partial k_w}{\partial \rho} \frac{g}{J_\gamma k_n} Ql \frac{\rho}{2} \rho + \frac{Q}{J_\gamma} \cdot q \left(1 + \frac{g C_p F \rho l}{G} \right)$$

$$A_3 = Qq \left(\frac{\partial k_w}{\partial \rho} \frac{g}{J_\gamma k_n} + \frac{g C_p F \rho \rho}{G J_\gamma} \right) + \frac{g}{J_\gamma k_n} \frac{\partial k_w}{\partial i} \left(G d_s \frac{\partial \nu}{\partial \rho} - Q \cdot \rho \cdot \rho \alpha_{H_s} \right),$$

cu care ecuaţia caracteristică este definită. Ea are în cazurile obişnuite o rădăcină, μ_1 reală, care se traduce printr-o mişcare aperiodică amortizată, de care nu ne ocupăm în studiul de faţă, şi două complexe.

Ne fixăm atenţia asupra celorlalte rădăcini care sînt complexe $\mu_2 = k_1 + ik_2$ şi $\mu_3 = k_1 - ik_2$ reprezentînd mişcări oscilatorii, şi revenind la substituţiile (47) în care $\Delta\tau$ este introdus artificial şi nu ne interesează, vom reţine

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= C_1 e^{k_1 t} \sin (k_2 t - C_1') \\ \Delta i &= C_2 e^{k_1 t} \sin (k_2 t - C_2') \end{aligned} \tag{52}$$

în care C_1 şi C_2 sînt constante de integrare.

Observăm că perturbațiile au o formă sinusoidală ale cărei maxime se găsesc pe două anvelopante simetrice.

Timpul după care amplitudinea anvelopantei ajunge la jumătate pentru $k_1 < 0$ este

$$t_j = -\frac{\ln 2}{k_1}, \tag{53}$$

iar numărul de oscilații, pentru același lucru, notînd perioada oscilațiilor $T = \frac{2\pi}{k_2}$ este

$$\frac{t_j}{T} = -\frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \frac{k_2}{k_1}. \tag{54}$$

Analog pentru cazul de instabilitate dinamică cînd amplitudinea anvelopantei se dublează $k_1 > 0$ avem

$$t_d = \frac{\ln 2}{k_1} \tag{55}$$

și

$$\frac{t_d}{T} = \frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \frac{k_2}{k_1} \tag{56}$$

Cazul cel mai delicat îl constituie, din punctul de vedere al efectului giroscopic, zborul la punct fix într-o atmosferă agitată; rezultatele pe care le vom stabili putînd servi și pentru zboruri în translație cu viteze mici. Considerăm în figura 13 poziția I un elicopter zburînd la punct fix în atmosferă complet liniștită. Vedem că rezultanta zborului se găsește în prelungirea axei rotorului.

De îndată ce a intervenit o perturbație, de exemplu o rafală, elicopterul este aplecat în față cu care ocazie el prinde și o oarecare viteză. În acest caz apar disimetrii și rezultanta rotorului părăsește axul rotorului spre a face cu acesta unghiul ν figura 13 poziția II.

După aceasta, apare un moment redresor, elicopterul se rotește în partea cealaltă în care se petrece același lucru și oscilațiile continuă.

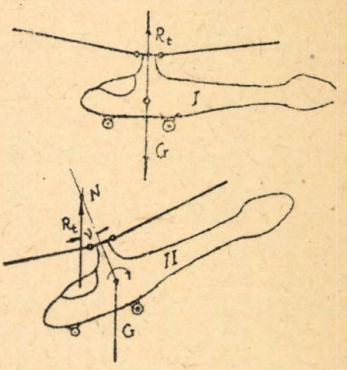


Fig. 13

Pentru această situație, rezolvînd ecuația caracteristică (59), vom obține amortizmentul, respectiv frecvența

$$k_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{Gg}{J_\gamma} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial v} \cdot d_s} - \frac{g}{3k_n} \cdot \frac{\partial k_w}{\partial v} \tag{57}$$

și

$$k_2 = 0{,}867\sqrt[3]{\frac{Gg}{J_\gamma} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial v} \cdot d_s}. \tag{58}$$

Cum efectul comenzii l-am neglijat vom pune

$$\nu \sim \alpha_{1l} = \frac{\rho}{U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0\cdot 1,4\right)\left(1 + \frac{R_{l\varepsilon}\cdot I_\xi \Lambda}{I_\zeta^2 \omega_0^2}\right) \tag{59}$$

astfel că

$$\frac{\partial \nu}{\partial \rho} = \frac{1}{U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0\cdot 1,4\right)\left(1 + \frac{R_{l\varepsilon} I_\xi \Lambda}{I_\zeta^2 \omega_0^2}\right). \tag{60}$$

Ţinînd seamă de relaţia (6) în care vom considera $l_s \sim i$ obţinem

$$\frac{\partial k_W}{\partial \rho} = \frac{k_n}{U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0\cdot 1,4\right)\left(1 + \frac{R_{l\varepsilon} I_\xi \Lambda}{I_\zeta^2 \omega_0^2}\right) = k_n \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \tag{61}$$

şi încă

$$\frac{\partial k_W}{\partial i} = k_n. \tag{62}$$

Cu aceste observaţii vom obţine perioada de oscilaţie

$$T = \frac{7,25}{\sqrt[3]{\frac{Gg}{J_\gamma}\frac{d_s}{U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0.1,4\right)\left(1 + \frac{R_{l\varepsilon} I_\xi \Lambda}{I_\zeta^2 \omega_0^2}\right)}} \tag{63}$$

şi notînd $\frac{R_{l\varepsilon} I_\xi \Lambda}{I_\zeta^2 \omega_0^2} = B$, obţinem timpul, după care amplitudinea ajunge pe jumătate sau dublă

$$t_j = \frac{0,693}{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gg\,d_s}{J_\gamma U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0\cdot 1,4\right)(1+B) + \frac{3,26}{U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0\cdot 1,4\right)(1+B)}} \tag{64}$$

şi

$$t_d = \frac{0,693}{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gg}{J_\gamma}\frac{d_s}{U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0\cdot 1,4\right)(1+B) - \frac{3,26}{U}\left(\frac{k_n}{1,14\,\sigma_0} + 0\cdot 1,4\right)(1+B)}} \tag{65}$$

Termenul de corecţie B pe care-l introduce efectul giroscopic aduce diferenţe asupra perioadei de oscilaţie şi asupra timpilor t_j şi t_d, faţă de cazul cînd îl neglijăm. În felul acesta, după cum de altfel a arătat şi experienţa, ne apropiem mai mult de realitate care spune că perioada de oscilaţie reală T este mai mică decît cea calculată cu termenul necorectat.

Deci, se pare că formula (63) dă o valoare a perioadei mai apropiată de realitate şi determinarea razei cercului, descris de articulaţii pentru o perioadă dată, este mai prudentă.

Totodată aprecierea timpurilor t_j şi t_d este mai corectă.

ВЛИЯНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА РОТОРА НА ПРОДОЛЬНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ГЕЛИКОПТЕРА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор исследует гироскопический эффект ротора, вызванный аэродинамическими противодействиями в симметричной плоскости и влияние его на продольную устойчивость.

Указывая способ вычисления аэродинамических противодействий автор рассматривает упрощающую гипотезу, согласно которой средний конус лопастей (за исключением небольших отклонений, не принимаемых во внимание) можно рассматривать в целом как вращающееся твердое тело, могущее в то же время качаться вокруг некоторой точки.

Вычисляя на основании этой гипотезы дополнительный гироскопический угол равнодействующей ротора, автор выводит характеристическое уравнение дифференциальной системы, образуемой уравнениями движения аэродины.

Сложные корни характеристического уравнения дают возможность определить с учетом гироскопического эффекта ротора период колебания и времени, после которых амплитуда колебания уменьшается на половину или удваивается.

INFLUENCE DE L'EFFET GYROSCOPIQUE DU ROTOR SUR LA STABILITÉ LONGITUDINALE DE L'HÉLICOPTÈRE

(RÉSUMÉ)

L'Auteur étudie l'effet gyroscopique du rotor, dû aux réactions aérodynamiques dans le plan de symétrie, et le mode dont cet effet se traduit dans la stabilité longitudinale.

Après avoir montré la manière dont on peut calculer les réactions aérodynamiques, l'Auteur fait une hypothèse simplificatrice: le cône moyen des pales (excepté de faibles écarts que l'on néglige) peut être considéré, d'une manière globale, comme un solide en mouvement de rotation pouvant, en même temps, basculer autour d'un point.

Dans cette hypothèse, l'Auteur calcule l'angle supplémentaire, de nature gyroscopique, de la résultante du rotor et établit l'équation caractéristique du système différentiel formé par les équations de mouvement de l'aérodyne.

Les racines complexes de l'équation caractéristique rendent possible la détermination de la période d'oscillation et des temps pour lesquels l'amplitude de l'oscillation diminue jusqu'à la moitié ou augmente jusqu'au double, comprenant également l'effet gyroscopique du rotor.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Vîlcovici, *Curs de mecanică* (curs litografiat de Univ. C. I. Parhon), vol. I, Bucureşti, 1951 p. 477.
2. V. Just, Interavio, 1947, decembrie, p. 31.
3. A. Stoenescu şi Gh. Ţiţeica, *Teoria giroscopului şi aplicaţiile sale tehnice*. Ed. I. Gorjanu, Bucureşti, 1945, p. 59.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4. 1954

REZISTENŢA MATERIALELOR

METODE AMELIORATE DE CALCUL LA ÎNCOVOIERE PENTRU BARE DE FONTE, CUPRU ŞI ALAME, PE BAZA CURBELOR CARACTERISTICE RIDICATE EXPERIMENTAL

DE

GH. MANEA, GH. BUZDUGAN şi P. FREUND

I. CONTURAREA PROBLEMEI

1. Domeniul de utilizare a formulei lui Navier la calculul de încovoiere a barelor drepte şi măsurile preconizate în cazul cînd formula nu este aplicabilă

În toate calculele de încovoiere, se admite ipoteza lui Bernoulli, sau a secţiunii plane, verificată experimental. În virtutea acestei ipoteze, lungirea specifică a barei variază liniar pe secţiune, de o parte şi de alta a axei neutre, adică

$$\varepsilon = Cy. \tag{1}$$

Se demonstrează că valoarea constantei C este inversul razei de curbură r a fibrei medii deformate în secţiunea considerată, adică

$$\varepsilon = \frac{y}{r}. \tag{2}$$

În cazul materialelor cu curbă caracteristică rectilinie în domeniul elastic, în speţă oţel şi lemn, calculul de încovoiere se bazează şi pe legea proporţionalităţii a lui Hooke. De data aceasta, eforturile unitare variază liniar pe secţiune, de o parte şi de alta a axei neutre şi se ajunge la formula clasică a lui Navier

$$\sigma = \frac{yM}{I_z} \tag{3}$$

Formula lui Navier se consideră neaplicabilă pentru:

a) Materiale care de obicei nu au curbă caracteristică rectilinie: fontă, cupru, alamă, bronz, aluminiu, zinc, aliaje uşoare etc.

b) Oţeluri a căror curbă caracteristică nu mai este rectilinie atunci cînd se merge cu solicitarea pînă în zona plastică.

Pentru materialele sus-menţionate, se preconizează fie metode speciale de calcul, pe care le vom cita în cele ce urmează, fie folosirea cu rezerve a formulei lui Navier, cu erori ce ne propunem a le examina în studiul de faţă, pentru cîteva din materialele indicate.

2. Metode de calcul utilizate pentru studiul încovoierii la materiale cu curbă caracteristică neliniară

Metoda generală de calcul pentru studiul încovoierii la materiale cu curbă caracteristică neliniară, de fapt veche, constă în a exprima relaţia ce dă ecuaţia curbei caracteristice

$$\sigma = f(\varepsilon) \tag{4}$$

şi a aplica apoi, în secţiunea barei încovoiate, cele două ecuaţii din mecanică: ecuaţia de proiecţii pe axa barei, dînd poziţia axei neutre

$$\int_A \sigma dA = 0 \tag{5}$$

şi ecuaţia de momente faţă de axa neutră, dînd valoarea momentului încovoietor

$$\int_A \sigma y\, dA = M_i \tag{6}$$

Deşi ca idee este foarte simplă — metoda fiind identică cu cea folosită de Navier cînd se aplică legea lui Hooke — această metodă duce la dificultăţi de calcul extrem de mari, ceea ce o face, practic, imposibil de aplicat în forma teoretică expusă. Spre a se ajunge la metode practice, diferiţi cercetători au imaginat simplificări sau schematizări, dintre care vom arăta pe cele mai cunoscute.

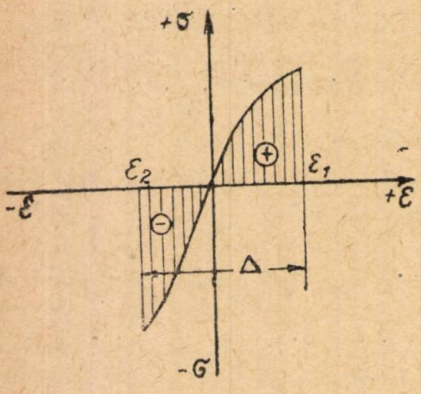


Fig. 1

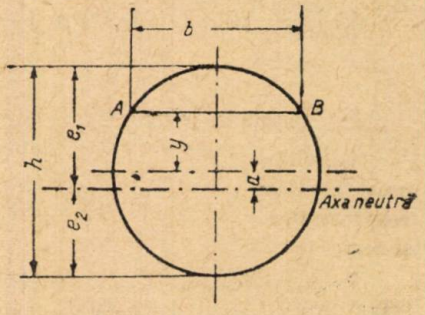


Fig. 2

a. *Metoda grafico-analitică.* Considerăm în figura 1 curbele caracteristice pentru tracţiune şi compresiune ale materialului ce dorim a studia. Pentru generalitate, se face ipoteza că acestea sînt neliniare şi nesimetrice.

În figura 2 s-a reprezentat secţiunea barei studiate, care în cazul experienţelor noastre a fost circulară. În general, din cauza asimetriei curbelor caracteristice, axa neutră are o excentricitate a, ceea ce face ca fibrele extreme să fie la distanţele e_1 şi e_2 de această axă astfel încît să fie satisfăcută relaţia

$$e_1 + e_2 = h \tag{7}$$

Dacă se presupune că fibra depărtată cu e_1 este fibra extremă întinsă, aplicarea formulei (2) în fibrele extreme dă

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{r} \; ; \quad \varepsilon_2 = \frac{e_2}{r}$$

respectiv

$$\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| = \frac{e_1 + e_2}{r} = \frac{h}{r}. \tag{8}$$

Dezvoltarea metodei se poate face pe două căi, după forma secţiunii barei:

α. La bara de secţiune dreptunghiulară, elementul de arie se poate scrie

$$dA = bdy,$$

unde lăţimea b este constantă.

Pentru găsirea poziţiei axei neutre, se aplică formula (5)

$$\int_A \sigma dA = \int_A b\sigma\, dy = b\int_A \sigma dy = 0,$$

sau, luînd în consideraţie relaţia (2)

$$\int_A \sigma r d\varepsilon = r\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon = 0 \tag{9}$$

Deci, poziţia axei neutre este astfel situată, încît suprafaţa închisă de curba caracteristică să fie nulă, adică bucla pozitivă să fie egală cu cea negativă (fig. 1). Luînd o valoare oarecare pentru Δ, respectiv pentru $r = \frac{d}{\Delta}$, se aşează segmentul Δ pe curba caracteristică, spre a satisface relaţia (9), obţinîndu-se poziţia axei neutre.

Momentul încovoietor ia forma

$$M_i = \int_A \sigma y dA = \int_A \sigma y b dy = br^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma\varepsilon d\varepsilon. \tag{10}$$

Calcularea grafică a acestei integrale impune trasarea prin puncte a curbei $\sigma\varepsilon = f(\varepsilon)$. Se obţine astfel valoarea momentului M pentru o valoare dată a lui Δ, respectiv a cuplului de valori ε_1, ε_2. Variind pe Δ, rezultă alte valori ale lui M_i şi se poate construi curba $M_i = f(\Delta)$ sau curba $M_i = f(r)$, care dă soluţia problemei.

β. La bara cu secţiune de formă oarecare, lăţimea b este variabilă şi nu se mai poate scoate de sub integrală. În acest caz, ecuaţia ce dă poziţia axei neutre, dedusă din formula (5), este

$$\int_A \sigma dA = \int \sigma b r d\varepsilon = r\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} b\sigma d\varepsilon = 0. \tag{11}$$

Pentru efectuarea acestor integrale trebuie reprezentată în prealabil şi integrată curba $b\sigma = f(\varepsilon)$. Rezolvarea acestei integrale nu se poate face, deoarece limitele ε_1, ε_2 sînt necunoscute, dificultate ce se elimină prin aproximaţii succesive.

După determinarea limitelor ε_1, ε_2, se explicitează formula (6)

$$M_i = \int_A \sigma y dA = \int_A \sigma r\varepsilon b r d\varepsilon = r^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} b\sigma\varepsilon d\varepsilon \tag{12}$$

Pentru efectuarea integralei, se construieşte curba $b\sigma\varepsilon = f(\varepsilon)$ şi se planimetrează. Rezultă astfel un punct al curbei $M_t = f(\Delta)$, iar prin variaţia lui Δ se obţine întreaga succesiune de puncte ale curbei.

b. *Metoda analitică a lui Saint-Venant.* Cu notaţiile din figura 3, Saint-Venant propune următoarele expresii analitice ale curbelor caracteristice de tracţiune, respectiv de compresiune.

Pentru tracţiune

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{y_1}{a}\right)^m\right]$$

Pentru compresiune

$$\sigma = \sigma_0' \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^n\right] \qquad (13)$$

Dificultatea constă în a determina constantele σ_0, σ_0' a, b, şi exponenţii m, n, în aşa fel încît formulele să reprezinte fidel curbele respective. După determinarea constantelor, se urmează calea clasică, prin aplicarea ecuaţiilor de echilibru (5) şi (6). Relaţiile (13) suferă diverse simplificări în următoarele cazuri particulare: distanţe mici y şi y_1, module de elasticitate egale în origine, curbe de tracţiune şi compresiune identice, materiale ce ascultă de legea lui Hooke. Metoda este uşor aplicabilă numai pentru cazurile particulare cele mai simple, fiind practic inutilizabilă în cazul general.

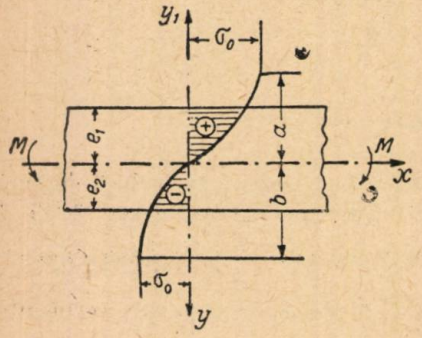


Fig. 3

c. *Înlocuirea curbei caracteristice printr-o linie frîntă.* După această metodă, curba caracteristică din figura 4 se înlocuieşte prin două segmente de dreaptă, OA şi AB.

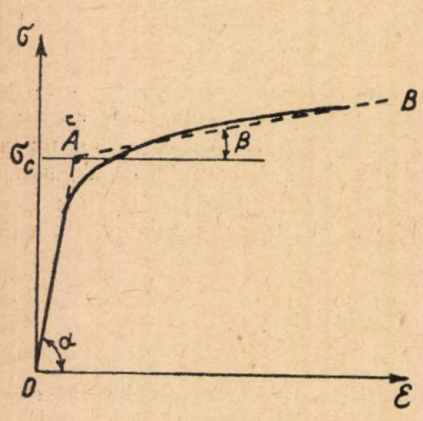


Fig. 4

Pentru oţel, linia OA are panta tg $\alpha = E$, iar punctul A corespunde limitei de curgere σ_c. Linia AB are panta tg $\beta = E_p$, denumit *modul de plasticitate*. Stabilind linia schematică OAB, respectiv valorile E şi E_p, se poate scrie valoarea lui σ pentru orice ε, fie în domeniul elastic OA, fie în cel plastic AB. Se aplică apoi ecuaţiile de echilibru (5) şi (6), care dau poziţia axei neutre şi valorile momentului [1]. Rezultatele calculelor se pot sintetiza sub forma

$$M_i = W\sigma_c \xi'$$
$$M_t = W_p \tau_c \xi'', \qquad (14)$$

unde M_i este momentul încovoietor, M_t momentul de torsiune, W modulul de rezistenţă la încovoiere, W_p modulul de rezistenţă polar al secţiunii circulare, σ_c τ_c limitele de curgere, ξ', ξ'' coeficienţi adimensionali. Valorile coeficienţilor ξ arată în ce măsură calculele în domeniul plastic se îndepărtează de cele clasice din domeniul elastic. Pentru solicitarea în domeniul elastic, cînd $E_p = E$, coeficienţii devin $\xi = 1$.

Se înţelege că pentru studiul răsucirii s-a folosit curba caracteristică $\tau = f(\gamma)$, respectiv în loc de E, E_p, intervin G, G_p.

d. *Schematizarea curbei caracteristice, după Prandtl.* Un caz particular al metodei precedente este cel în care se ia $E_p = 0$, deci linia AB devine orizontală (fig. 5). Această metodă este indicată în special în calculul plastic al oţelurilor, linia orizontală AB, luîndu-se la înălţimea limitei de curgere σ_c. Cum la oţel curbele caracteristice de tracţiune şi compresiune sînt identice, pentru o secţiune simetrică, axa neutră trece prin centrul secţiunii (fig. 6). Dacă din întreaga secţiune, o parte este solicitată elastic, iar restul plastic (fig. 6), ecuaţia ce dă valoarea momentului încovoietor este

$$M_i = 2\left[\int_0^a \sigma_e \frac{y}{a}\, ydA + \int_a^{\frac{h}{2}} \sigma_e\, ydA\right] = \sigma_c\,(W_e + S_p). \qquad (15)$$

În această relaţie, W_e este modulul de rezistenţă la încovoiere al părţii din secţiune solicitată elastic, iar S_p suma momentelor statice (în valoare absolută) ale celor două părţi din secţiune solicitate plastic, faţă de axa neutră. Metoda reprezintă cazul particular cel mai simplu de studiu al unei probleme de încovoiere în afara domeniului elastic.

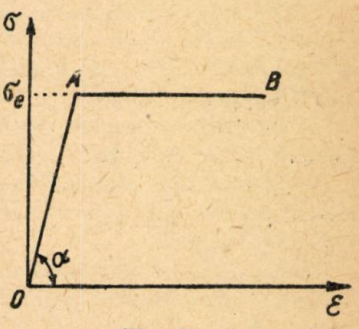


Fig. 5

3. Problema propusă

În lucrarea de faţă, ne-am propus a cerceta problema încovoierii pentru fonte, cupru, alame, pe cale grafico-analitică şi analitică.

Studiul comportă următoarele etape:

a) Ridicarea curbelor caracteristice prin măsurători tensometrice trăgînd concluzii calitative asupra lor. Curbele servesc atît la calculele de încovoiere ce vor urma, cît şi ca material documentar pentru alte studii viitoare, deoarece asemenea diagrame cu valori numerice lipsesc, în special pentru materialele indigene.

b) Calcularea momentului încovoietor pe cale grafico-analitică sau analitică.

c) Compararea valorilor momentului încovoietor rezultate prin aplicarea metodelor mai suscitate, cu cele date de formula lui Navier şi stabilirea coeficienţilor de corecţie ce trebuie aplicaţi. Pentru orientare, s-au făcut şi măsurători tensometrice directe la încercarea de încovoiere. Scopul final este de a arăta în ce măsură formula clasică a lui Navier poate fi aplicată materialelor cercetate respectiv cu ce erori şi de a stabili coeficienţii de corecţie necesari, acolo unde erorile depăşesc limitele uzuale ale calculelor noastre.

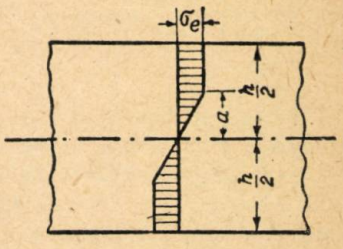


Fig. 6

II. RIDICAREA CURBELOR CARACTERISTICE

1. Metoda şi aparatajul folosit pentru măsurători

Măsurătorile tensometrice s-au făcut cu următoarele aparate:

a. *Aparatul Martens cu oglinzi.* Aparatul are înălţimea prismelor $h = 4{,}615$ mm şi distanţa între repere a clemelor $l_0 = 49{,}65$ mm. Pentru transformarea uşoară

a diviziunilor citite pe rigla gradată, s-a luat distanţa între rigle şi oglinzi $L = 930$ mm. În acest fel, unei diviziuni de 1 mm de pe rigla gradată îi corespunde o lungire specifică $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}\%$ sau $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$. Cum distanţa între repere este $l_0 \simeq 50$ mm, rezultă că lungirea măsurată de devierea de 1 mm a razei luminoase este

$$\Delta l = \varepsilon l_0 = 5 \times 10^{-5} \times 50 = 0{,}0025 \text{ mm} = 2{,}5\ \mu.$$

Avînd în vedere că s-au citit, cu suficientă exactitate, deplasări pe riglă de 0,25 — 0,50 mm, rezultă că precizia măsurătorilor tensometrice este cel puţin de ordinul a 1 micron.

b. *Tensometre Huggenberger*, cu precizia de 0,5 μ, aşezate pe bară, în general două faţă în faţă.

Încercările epruvetelor s-au făcut la maşini diferite, după natura încercării, respectiv după ordinul de mărime al forţelor.

Astfel:

— pentru încercările de tracţiune în cazul epruvetelor de cupru cu diametru în jurul a 30 mm s-a folosit o maşină universală Losenhausen de 60 tone, iar pentru epruvetele de cupru, fontă, alamă cu diametru în jurul a 20 mm, o maşină universală Schopper de 10 tone;

— încercările de compresiune s-au efectuat la o presă Losenhausen de 50/300 tone şi o presă Mohr & Federhaff de 50 tone;

— pentru încercările de încovoiere s-a folosit o presă Amsler de 2 tone, cu dispozitiv pentru aplicarea sarcinii în 2 puncte, spre a realiza o porţiune solicitată la încovoiere pură.

Majoritatea determinărilor s-au efectuat în Laboratorul de rezistenţa materialelor al Institutului politehnic din Bucureşti. Aparatajul folosit a fost al Institutului politehnic şi al Academiei R.P.R. O parte din încercări s-au făcut în laboratoarele Atelierului de prototipuri I.P.R.O.M. şi ale Institutului de cercetări de materiale ceramice I.C.E.R.

2. Cauzele de erori

În cursul determinărilor experimentale la măsurătorile efectuate cu aparatul cu oglinzi, au apărut o serie de surse de erori:

— Nu se puteau face citiri ale deformaţiilor în jurul forţei zero, întrucît la sarcini mici, epruveta are diferite mişcări datorite aşezării platourilor sau fălcilor maşinii, care falsifică rezultatele experienţei. Din acest motiv, măsurarea deformaţiei începe de la o valoare oarecare a sarcinii, de exemplu $P = 0{,}2$ tone, pentru care se consideră deformaţia nulă. Această eroare se poate elimina uşor prin extrapolare, în funcţie de citirile ce urmează.

— Articulaţiile sferice imperfecte ale preselor, sau cu frecări prea mari, au produs, în unele cazuri, diferenţe apreciabile între citirile pe cele două rigle ale aparatului cu oglinzi, ceea ce a făcut necesară eliminarea din calcule a cîtorva determinări.

— Însăşi aşezarea între fălci a epruvetelor de tracţiune la materiale moi (cupru) a cauzat uneori şocuri, cu uşoare repercusiuni asupra citirilor.

— Dacă erorile arătate mai sus au putut fi uşor identificate şi eliminate, o sursă de erori, mult mai dificil de înlăturat, a apărut la măsurarea deformaţiilor de încovoiere. Folosind aparatul cu oglinzi, s-au înregistrat pe riglă, simultan, atît deformaţiile axiale (ε) de întindere sau compresiune, produse de momentul încovoietor, cît şi deplasările urmei luminoase produse prin curbarea epruvetei (rotirea

întregului sistem format din epruvetă şi tensometru în jurul centrului de curbură al epruvetei). În calculele făcute s-au introdus unele relaţii care au eliminat, cel puţin în mod aproximativ, aceste erori. Măsurătorile tensometrice la încovoiere, efectuate cu aparatul cu oglinzi, au numai o valoare informativă.

Folosirea tensometrelor Huggenberger, obţinute în ultima fază a experienţelor, a eliminat sursele de erori menţionate.

3. Forma şi dimensiunile epruvetelor

Pentru măsurători tensometrice pe lungimi relativ mici, forma de ansamblu a epruvetelor este indiferentă, cu condiţia ca efectele capetelor sau ale modului de prindere şi rezemare să nu se propage, sau, în orice caz, să se atenueze pînă în zona de aplicare a tensometrului. S-au făcut determinări experimentale, pentru următoarele feluri de solicitări:

a. *Tracţiune.* Diametrele epruvetelor au fost alese în funcţie de dimensiunile materialului brut, utilizat şi de forţa maşinii, variind între 15 şi 30 mm. La cupru au fost folosite bare cilindrice cu diametru constant, iar pentru fonte şi alame, epruvete similare celor standardizate. În general, s-au încercat cîte 5 epruvete din fiecare material studiat.

b. *Compresiune.* Pentru fiecare material au fost încercate cîte 3 . . . 5 epruvete cilindrice, avînd lungimea între 70 şi 90 mm şi diametrul între 24 şi 30 mm. Epruvetele au fost polizate, cu feţele frontale plane perfect paralele şi perpendiculare pe axul lor.

Întrucît literatura existentă dă valori ale raportului l/d la încercarea de compresiune, numai pentru evitarea flambajului (limita $l/d = 2{,}5 \ldots 3$), s-a pus problema de a stabili dimensiunile epruvetelor şi raportul l/d, astfel încît:

— să se poată lucra cu tensometrul cu oglinzi avînd $l_0 \simeq 50$ mm;

— să nu se producă flambaj;

— solicitarea complexă de la capetele epruvetelor să nu influenţeze asupra măsurătorilor tensometrice.

În scopul unei experimentări, s-au confecţionat, din oţel, serii de cîte trei epruvete, avînd diametrul de 30 mm şi lungimea 60, 75, 80, 90 mm şi s-au ridicat curbele caracteristice de compresiune.

Valorile medii, redate în figura 7, arată că pentru rapoarte l/d cuprinse între 2,5 şi 3 efectul capetelor nu se resimte, pe cînd la $l/d = 2$ aceste efecte se fac simţite la curba caracteristică. Aceste rezultate sînt valabile pentru cazul particular al tensometrului utilizat ($l_0 \simeq 50$ mm) şi al dimensiunilor arătate mai sus. Aşezarea tensometrelor cu oglinzi pe epruvete este arătată în figura 8, iar a tensometrelor Huggenberger în figura 9.

c. *Încovoiere.* Încercările au fost efectuate cu cîte două epruvete cu lungimea de 500 mm şi diametrul egal cu al celor de compresiune. Măsurătorile tensometrice la încercările de încovoiere au avut un caracter informativ.

4. Materialele încercate

a. *Cupru.* Au fost studiate două din materialele standardizate, fabricate curent în Uzinele «Boleslav Bierut» din Bucureşti:

— Cupru *E* (electrolitic), STAS 270—49;

— Cupru 6 (cupru rafinat cu minimum 99,6% Cu), STAS 270—49.

Pentru ambele calităţi, s-a experimentat materialul în două stări mecanice diferite:

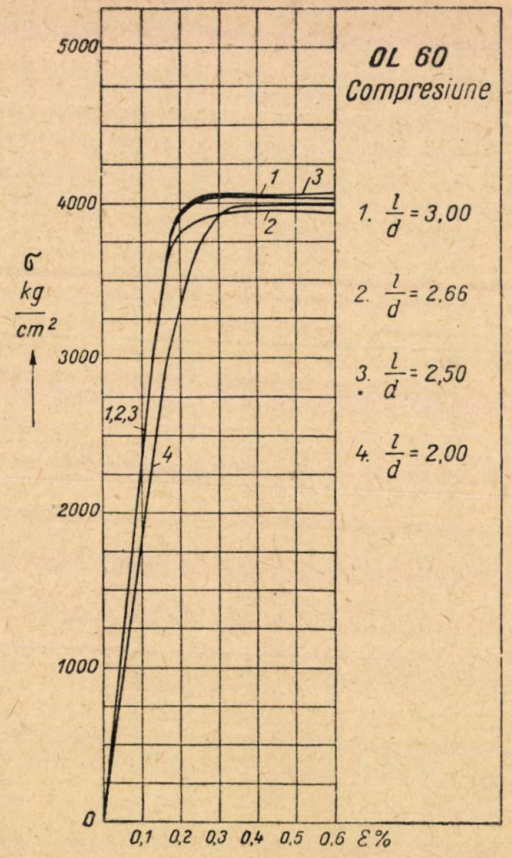


Fig. 7

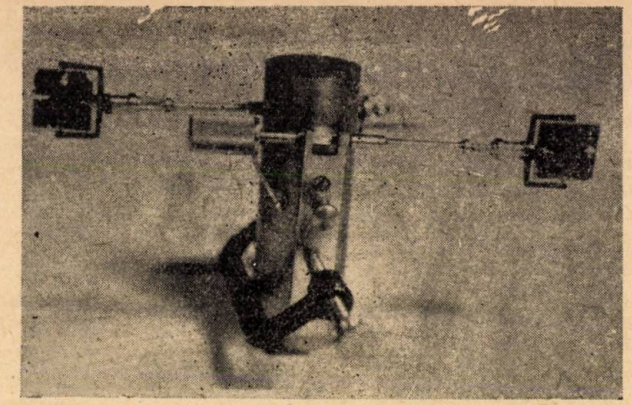


Fig. 8

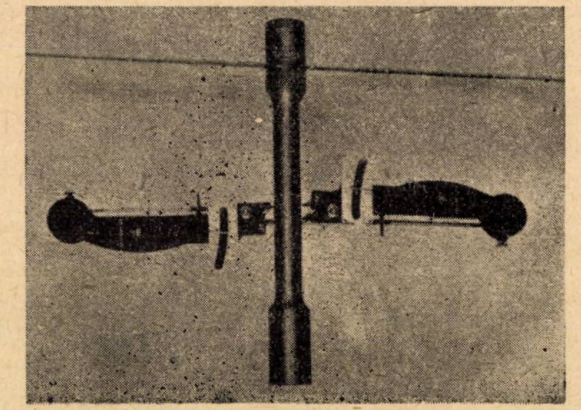


Fig. 9

— în stare brut presată, material *neecruisat*, notat cu indicele N, care prezintă în general posibilitate de deformare foarte accentuată şi deci nu se foloseşte în practică;

— material *ecruisat*, care după presare a suferit o «tragere» spre a-l aduce la starea de «semitare» prevăzută în STAS 270—49. Materialul brut presat a avut diametrul la cald de circa 32 mm, iar după răcire şi decapare, s-a redus la $d_1 = 31{,}6$ mm. Prin ecruisare, diametrul a fost micşorat la $d_2 = 30$ mm. Ecruisarea este caracterizată prin reducerea procentuală de secţiune

$$e = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2} \times 100 = 10\%.$$

Cuprul ecruisat (tras) a fost notat cu indicele T.

Cercetările la cupru se referă deci la:

— cupru electrolitic brut presat: Cu EN
— » » ecruisat: Cu ET
— » 6 brut presat: Cu $6N$
— » 6 ecruisat: Cu $6T$

b. *Alamă*. S-a cercetat alama ordinară Am 58, atît în stare brut presată, cît şi ecruisată, precum şi alamele speciale AmX_1, AmX_2, AmX_3, AmX_4, STAS 291—49.

Ca şi în cazul cuprului, interesează în special materialul ecruisat, calculele referindu-se numai asupra lui.

c. *Fontă*. Cercetările s-au referit la:

— Şapte şarje de fonte, confecţionate în Uzinele «Semănătoarea» şi «Matyas Rakosi» din Bucureşti, notate cu simbolurile A, B, ... G. Încercările efectuate au arătat că aceste fonte se încadrează, după STAS 568—52, în clasa fontelor normale, rezistenţele de rupere la tracţiune fiind toate sub 20 kg/mm².

— O calitate de fontă (simbolizată prin K) de la Atelierele C.F.R. Cluj, cu rezistenţa de rupere de circa 40 kg/mm², deci superioară calităţilor prevăzute în STAS 568—52.

— Cinci şarje de fonte (notate cu L, M, N, P, R) de la Uzinele «23 August» Bucureşti, cu rezistenţa de rupere între 29 şi 40 kg/mm².

Epruvetele au fost confecţionate din bare de fontă care au fost turnate individual, în lungimi de 500 ... 600 mm şi cu diametre în jurul a 35 ... 40 mm. Compoziţia barelor din fontă suferă influenţa tehnologiei turnării; o perfectă identitate în aplicarea acestei tehnologii pentru toate barele nu este posibilă în practică.

5. Limitarea domeniului de experimentare

În experienţele făcute, deformaţiile măsurate s-au limitat la cîmpul de înregistrare al tensometrelor. În prelucrarea rezultatelor experimentale, la trasarea diagramelor, n-a fost folosit integral nici acest cîmp, spre a ne încadra în domeniul practic al unor deformaţii de 0,2 — 0,4%, sau al unor eforturi unitare de circa 50% din rezistenţele de rupere. În acest mod, s-au redat la scară mai precisă curbele studiate, spre a servi la calculele ce urmează.

Experienţele au fost continuate apoi, în majoritatea cazurilor, pînă la rupere, fără măsurători tensometrice, numai în scopul identificării cît mai corecte a materialelor.

În total, s-au efectuat 242 încercări, dintre care 47 la cupru, 62 la alamă, 133 la fontă, respectiv, pe categorii, 97 de tracţiune, 112 de compresiune, 33 de încovoiere.

III. METODELE DE CALCUL APLICATE

1. Metoda grafico-analitică

Ridicarea experimentală a curbelor caracteristice, prin măsurarea forţelor şi a deformaţiilor, a fost urmată de calculele de mai jos:

a) S-au determinat eforturile unitare σ şi lungirile specifice ε. Pentru fiecare material în parte, s-au trasat curbele caracteristice corespunzînd tuturor epruvetelor încercate.

b) Din examinarea grupelor de curbe caracteristice, au fost eliminate — dacă era cazul — cele suspecte, datorită defectelor de material sau de măsurare; din cele rămase, s-au calculat valori medii, cu ajutorul cărora s-a trasat din nou, pentru fiecare material, cîte o curbă caracteristică de întindere, compresiune şi încovoiere.

Excluzînd materialele care nu interesează din punct de vedere practic (de exemplu cuprul neecruisat), s-a trecut la integrări grafice ale curbelor rămase, cu formula (11), pentru găsirea poziţiei axei neutre şi apoi cu formula (12), pentru calculul momentului încovoietor M_i. S-au obţinut astfel punctele determinante ale curbei $M_i = f(\Delta)$, care nu s-au mai reprezentat.

Întrucît această curbă practic este puţin utilizată, a fost înlocuită prin curbele care dau eforturile unitare în fibrele extreme, în funcţie de momentul încovoietor M_i, calculat prin procedeul de mai sus. Diagramele finale ale calculelor redau:

— σ în fibrele extreme întinse, notat cu σ_{tr} în funcţie de M_i. Valorile respective se găsesc chiar în tabelele ce au servit la integrarea grafico-analitică pentru calculul lui $M_i = f(\Delta)$.

— σ în fibrele extreme comprimate, notat cu σ_c aflat în acelaşi mod.

— σ_N, efortul unitar de încovoiere rezultat prin aplicarea relaţiei uzuale de încovoiere a lui Navier, folosind însă momentul de încovoiere M_i, dedus mai sus.

— coeficienţii de corecţie

$$c_1 = \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_N}\ ;\ c_2 = \frac{\sigma_c}{\sigma_N} \tag{16}$$

ce trebuie aplicaţi efortului unitar σ_N, dat de formula lui Navier, spre a obţine adevăratele valori σ_{tr} şi σ_c. Aceşti coeficienţi au fost redaţi atît în funcţie de momentul încovoietor M_i, cît şi în funcţie de efortul unitar σ_N.

2. Metoda analitică

In tratarea problemei, în loc de a se folosi metodele anterioare, prin care curbele reale sînt schematizate, înlocuindu-le cu linii frînte sau curbe aproximative, în cazul de faţă s-au stabilit ecuaţiile care să reprezinte curbele caracteristice ridicate experimental. Ţinînd seamă de aspectul general al curbelor trasate, s-a ajuns la concluzia că în majoritate pot fi înlocuite printr-un segment de dreaptă care trece prin origine, urmat de o curbă a cărei aproximaţie a fost suficientă printr-un polinom de gradul II. Deci ecuaţia curbei caracteristice în formă generală poate fi scrisă astfel

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \quad\quad , \text{ pentru } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \\ \sigma &= A\varepsilon - B\varepsilon^2 , \text{ pentru } \varepsilon \geqslant \varepsilon_1 . \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

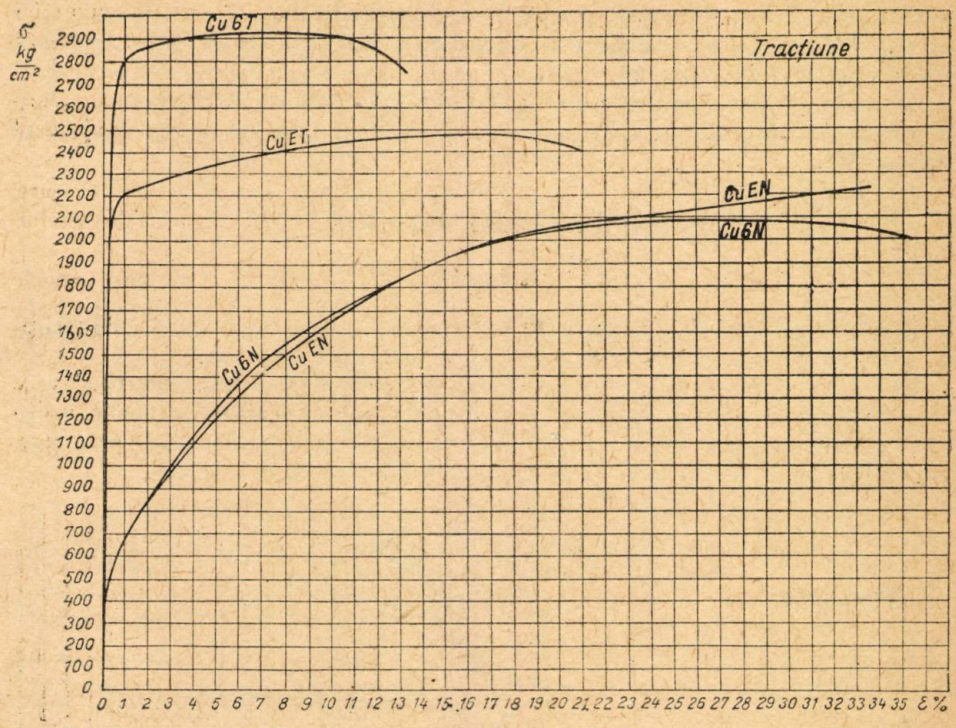

Tracțiune
σ kg/cm²
Cu 6T
Cu ET
Cu EN
Cu 6N
Cu 6N
Cu EN
ε %

Fig. 10

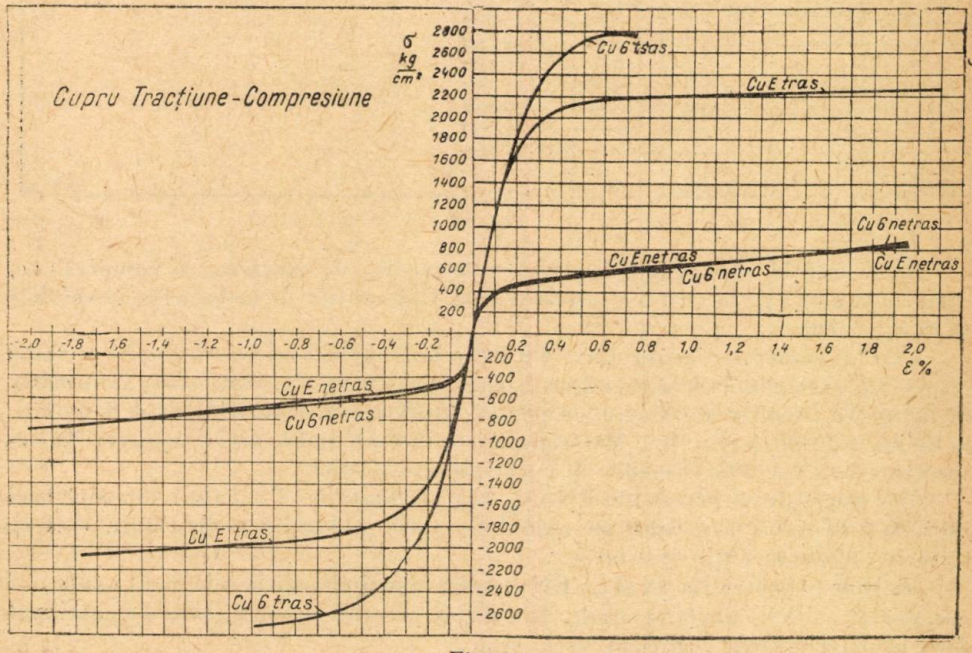

Cupru Tracțiune-Compresiune
σ kg/cm²
Cu 6 tras
Cu E tras
Cu 6 netras
Cu E netras
Cu E netras
Cu 6 netras
Cu E netras
Cu 6 netras
Cu E tras
Cu 6 tras
ε %

Fig. 11

Coeficienţii E, A, B se determină pentru fiecare material prin metoda celor mai mici pătrate. Cînd porţiunea rectilinie este inexistentă, întreaga curbă este exprimată printr-un polinom de gradul II.

Epresiile obţinute pentru σ au fost folosite apoi în formula (6) pentru calculul momentului încovoietor. Coeficienţii de corecţie se stabilesc apoi cu ajutorul relaţiilor (16).

IV. REZULTATE OBŢINUTE

1. Cupru

a. *Observaţii generale.* În figura 10 sînt redate curbele caracteristice de tracţiune, pînă la rupere, pentru cele patru tipuri de cupru studiate.

La această scară a desenului, apare evident efectul ecruisării, care produce o porţiune aproape rectilinie a curbei caracteristice. La altă scară se poate vedea că nici această porţiune nu este perfect în linie dreaptă. De asemenea apare creşterea rezistenţei şi micşorarea lungirii specifice produse de ecruisare.

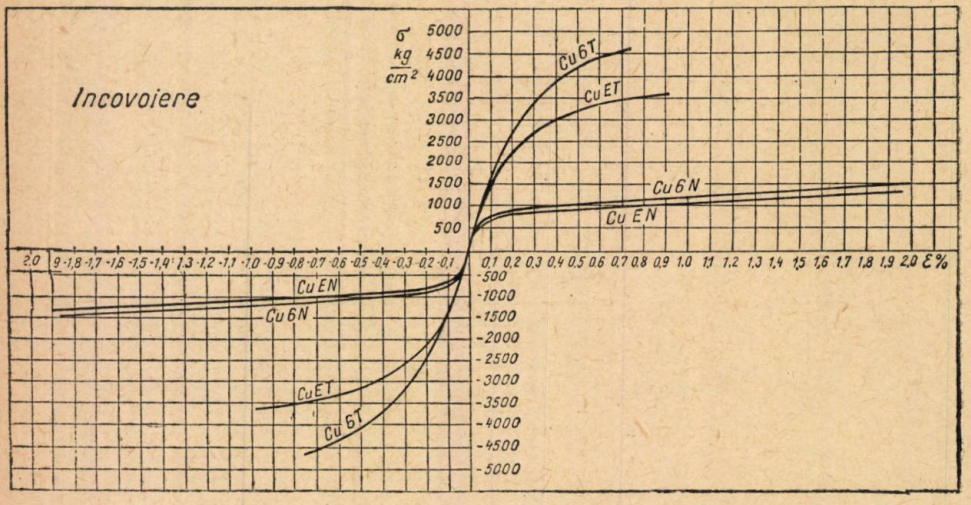


Fig. 12

În figura 11 sînt redate curbele caracteristice de tracţiune şi compresiune, limitate la $\varepsilon = 2\%$, pentru aceleaşi materiale. Observaţiile de mai sus rămîn valabile şi în acest caz.

Curbele caracteristice rezultate din încercările de încovoiere, cu erorile metodei respective, erori care la materialul neecruisat apar exagerate, sînt redate informativ în figura 12. Analiza metalografică pentru Cu6N arată incluzii de oxid de cupru, la limita grăunţilor (fig. 13). Materialul are coeziunea slabă, deci proprietăţi fizico-mecanice scăzute, fapt dovedit de curbele caracteristice.

Din micrografia pentru Cu EN (fig. 14), se constată că grăunţii sînt mai mici decît la materialul precedent, iar oxidul de cupru este uniform distribuit, ceea ce duce la rezistenţă puţin mai mare.

În timp ce pentru Cu 6N şi Cu EN cercetarea se limitează la cele menţ onate mai sus, pentru celelalte două materiale, de utilizare practică curentă, studiul a continuat pînă la determinarea coeficienţilor c_1 şi c_2.

Fig. 13

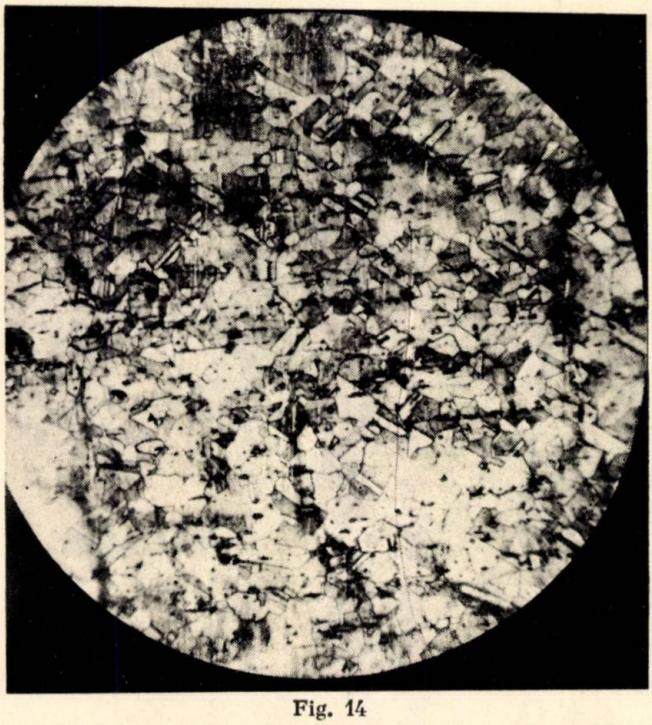
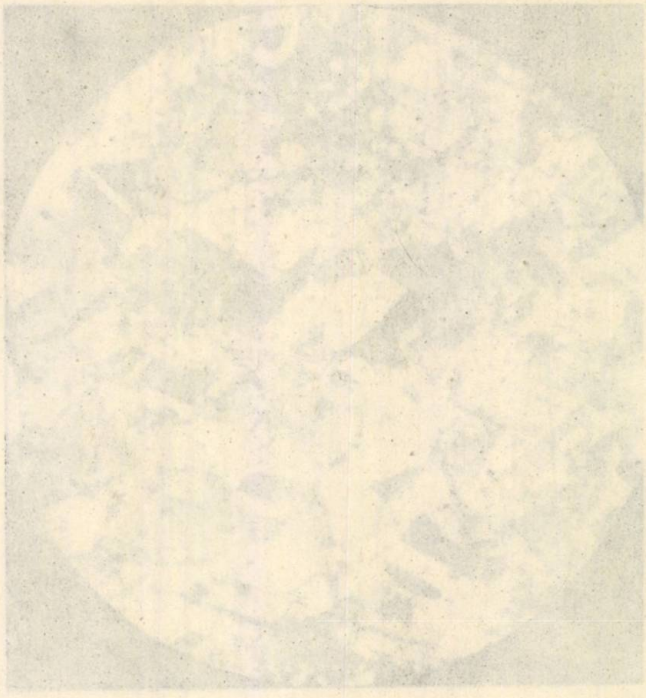
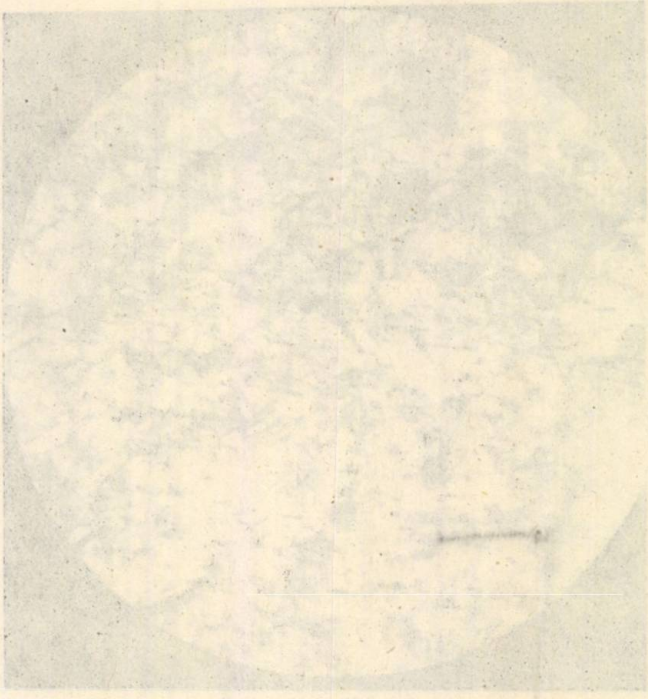


Fig. 14





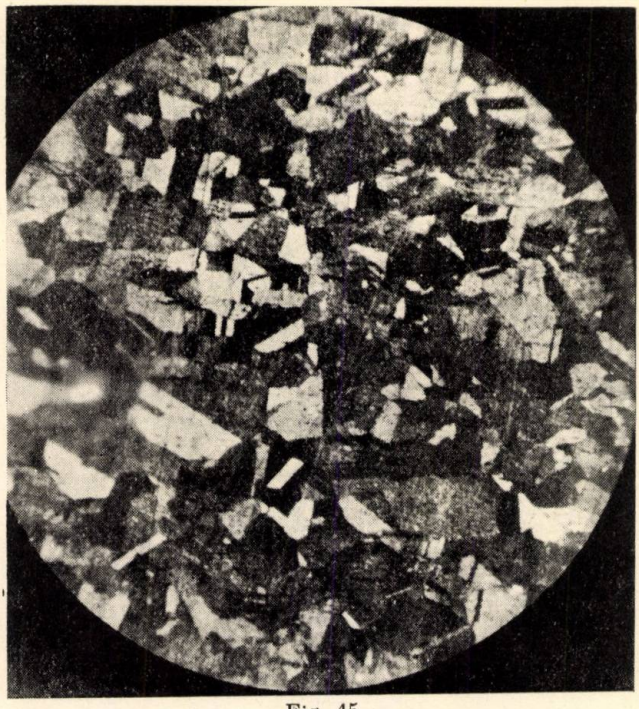


Fig. 15

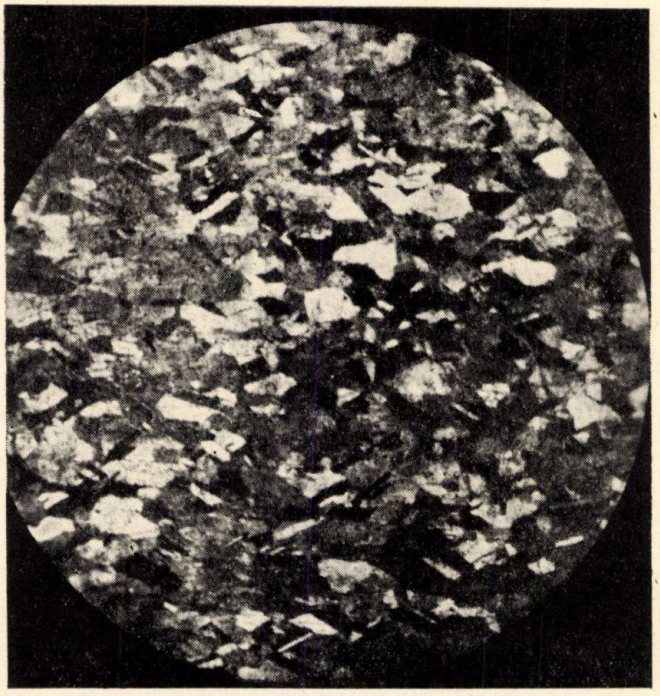
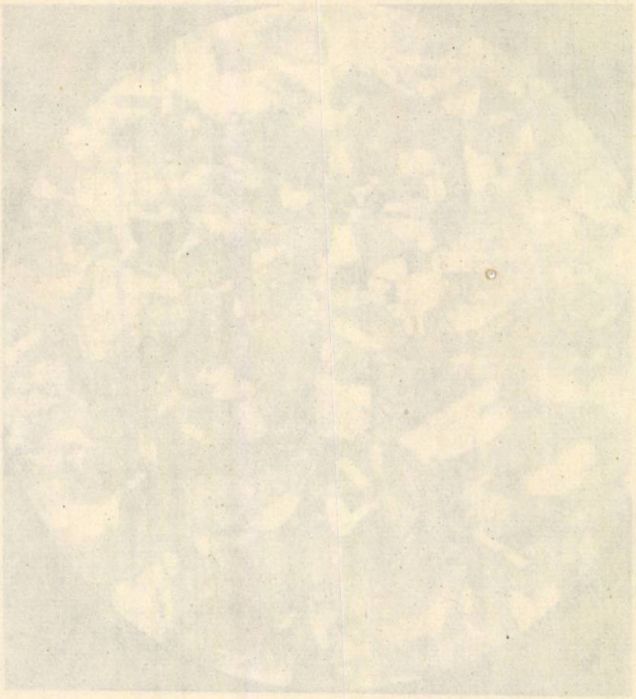
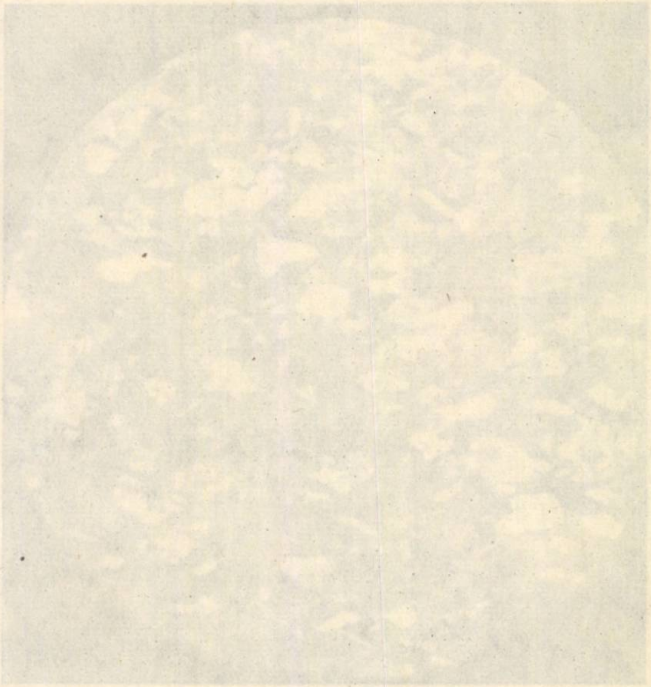


Fig. 16





b. *Cupru ET și cupru 6T*. Micrografia (fig. 15) pentru Cu ET și (fig. 16) pentru Cu 6T, arată specificul materialului ecruisat. Se văd numeroase incluzii de oxid de cupru. Proprietățile fizico-mecanice sînt superioare celor ale Cu EN și Cu 6N.

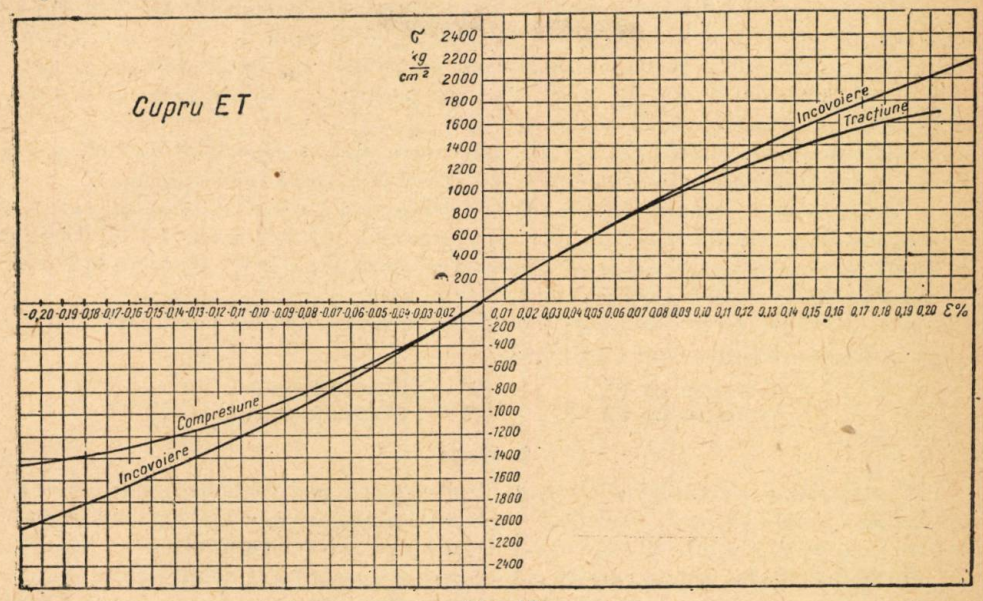


Fig. 17

Curbele caracteristice de tracțiune-compresiune pentru Cu ET sînt redate în figura 17. Se vede că ele se depărtează de linia dreaptă, chiar și pe porțiunea limitată de $\varepsilon = 0,2\%$.

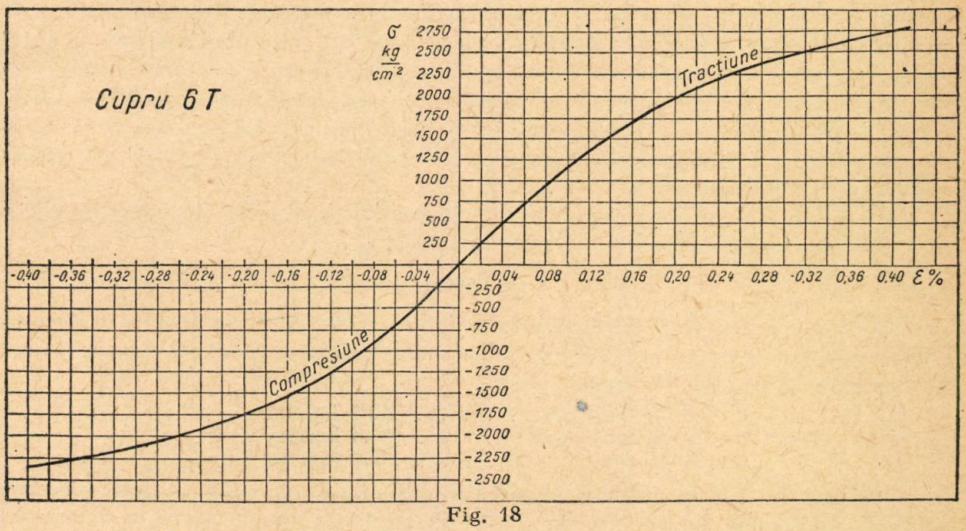


Fig. 18

Diagrama redă și caracteristica de încovoiere, după aplicarea corecției la rezultatele experimentale. Curba se apropie de cele de tracțiune-compresiune în special în regiunea originii.

Aceleaşi observaţii rămîn valabile la caracteristicile de tracţiune-compresiune pentru Cu 6T (fig. 18).

Din cercetarea diagramelor σ_{tr}, σ_c, $\sigma_N = f(M_i)$; c_1, $c_2 = f(M_i)$ şi c_1, $c_2 = F(\sigma_N)$, rezultînd din integrarea curbei caracteristice pentru Cu ET (fig. 19) se observă că pînă la valoarea $\sigma_N = 1000$ kg/cm², deci pînă la limita practică de încărcare a cuprului, formula lui Navier dă pentru σ_{tr} valori sub cele reale, diferenţele maxime fiind de circa 4%; iar pentru σ_c, valori peste cele reale, diferenţele maxime ajungînd la circa 6%.

Aceleaşi curbe, pentru Cu 6T (fig. 20), arată pînă la $\sigma_N = 1000$ kg/cm², valori ale lui c_1 sensibil egale cu unitatea, şi diferenţe ce merg pînă la 2% pentru c_2.

Prin efectuarea integrărilor, s-a găsit că deplasarea (excentricitatea) axei neutre, pentru un diametru al barelor de 29 mm, atinge abia 0,7 mm la Cu ET şi 0,5 mm la Cu 6T; aceste cifre se obţin pentru valorile cele mai mari ale lui M_i luate în calcul, în timp ce pentru valori mici ele scad chiar la zero.

Din examinarea părţii rectilinii a curbelor caracteristice, se poate scrie şi o valoare mijlocie a modulului de elasticitate:

— Pentru Cu ET $E = 1\,060\,000$ kg/cm²
— Pentru Cu 6T $E = 1\,140\,000$ kg/cm²

2. Alame

Pentru alama ordinară Am 58 în stare brut presată, rezistenţa de rupere la tracţiune a fost $\sigma_r = 40{,}3$ kg/mm², iar pentru cea în stare ecruisată $\sigma_r = 47{,}0$ kg/mm². Aspectul rupturii prin tracţiune al alamei ecruisate apare sub forma unui crater (fig. 21).

În figura 22 sînt redate curbele caracteristice de tracţiune-compresiune şi încovoiere pentru alama ecruisată. Se observă traseul aproape rectiliniu al curbelor de tracţiune-compresiune, ceea ce conduce la valori apropiate de unitate pentru coeficienţii c_1, c_2, în domeniul practic de utilizare (fig. 23).

Aceeaşi constatare s-a făcut pentru alamele speciale ecruisate AmX_1, AmX_2, AmX_3 AmX_4 (fig. 24, 25, 26, 27): în domeniul valorilor utile ale eforturilor unitare, curbele caracteristice sînt foarte apropiate de linia dreaptă. Integrarea efectuată pentru curba caracteristică a alamei AmX_2, care are cele mai mari abateri faţă de linia dreaptă, a dovedit că valoarea coeficienţilor de corecţie c diferă foarte puţin de unitate (fig. 28). Din studiul micrografic al acestor alame (fig. 29 — AmX_1, fig. 30 — AmX_2, fig. 31 — AmX_3, fig. 32 — AmX_4) se găseşte explicaţia rezistenţei de rupere scăzute a alamei AmX_3 prin prezenţa unor goluri şi crăpături microscopice, datorite turnării defectuoase.

Din aceste serii de încercări reiese că pentru alamele ecruisate formula lui Navier este aplicabilă, erorile fiind practic fără importanţă.

3. Fonte

a. *Fonta cu rezistenţa corespunzînd calităţii Fc00.* Materialul care în decursul experienţelor a fost notat cu litera *E*, fabricat de Uzinele « Semănătoarea », a avut următoarele rezistenţe de rupere:

— la tracţiune . . . . . 12,7 kg/mm²
— la încovoiere . . . . . 23,4 kg/mm²
— la compresiune . . . . 36,4 kg/mm²

Aceste cifre foarte scăzute încadrează materialul în clasa fontelor ordinare *Fc00*. În figura 33 sînt arătate trei epruvete rupte, şi una în stare nedeformată. Se observă liniile de rupere la 45°, precum şi deformaţiile mari produse pînă la apariţia ruperii. Umflarea în partea mijlocie a epruvetelor apare în apropierea ruperii, fiind imperceptibilă în decursul măsurătorilor tensometrice.

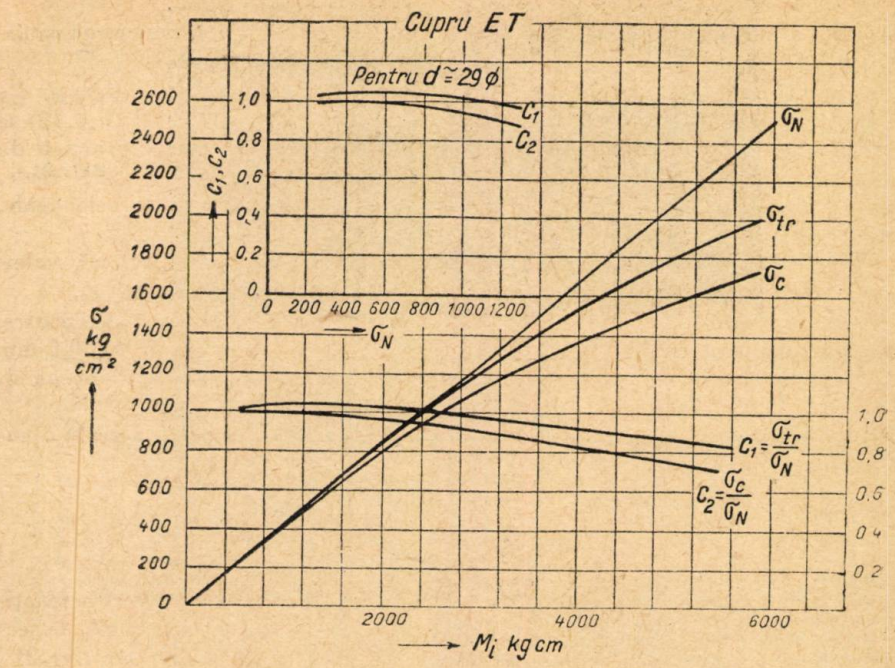

Cupru ET
Pentru d ≃ 29 ϕ
C1
C2
σN
σtr
σc
C1, C2
σ kg/cm²
C1 = σtr/σN
C2 = σc/σN
Mi kg cm

Fig. 19

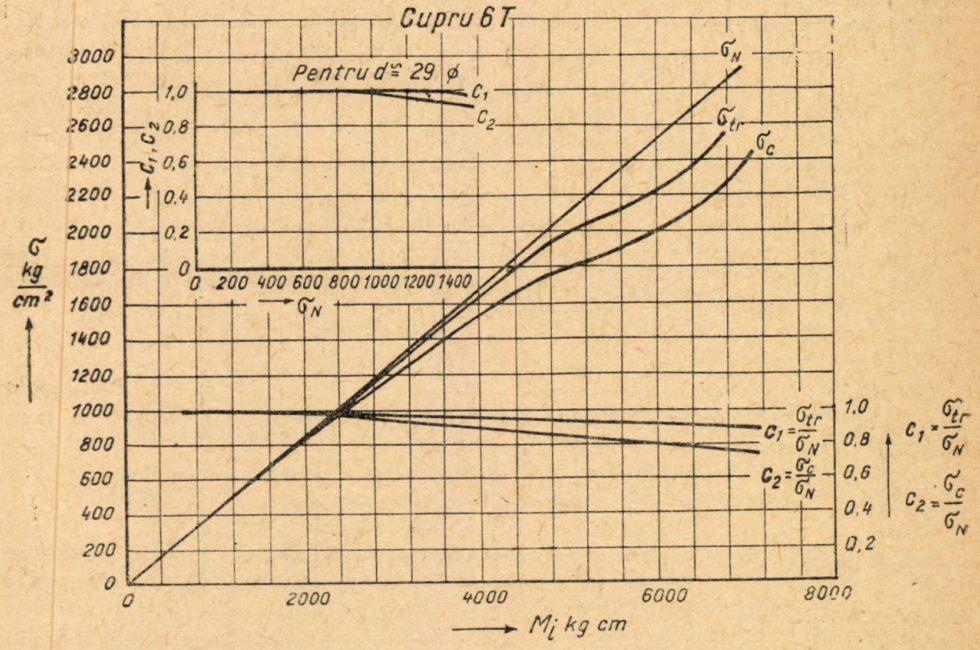

Cupru 6T
Pentru d ≃ 29 ϕ
C1
C2
σN
σtr
σc
C1, C2
σ kg/cm²
C1 = σtr/σN
C2 = σc/σN
Mi kg cm

Fig. 20

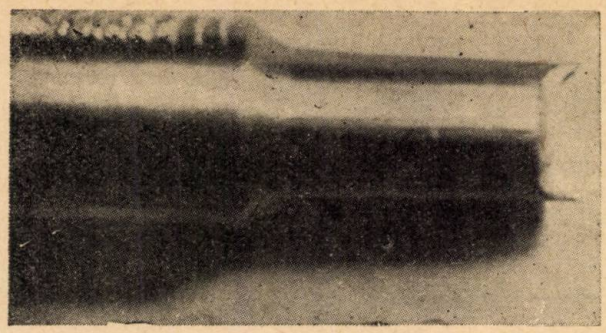


Fig. 21

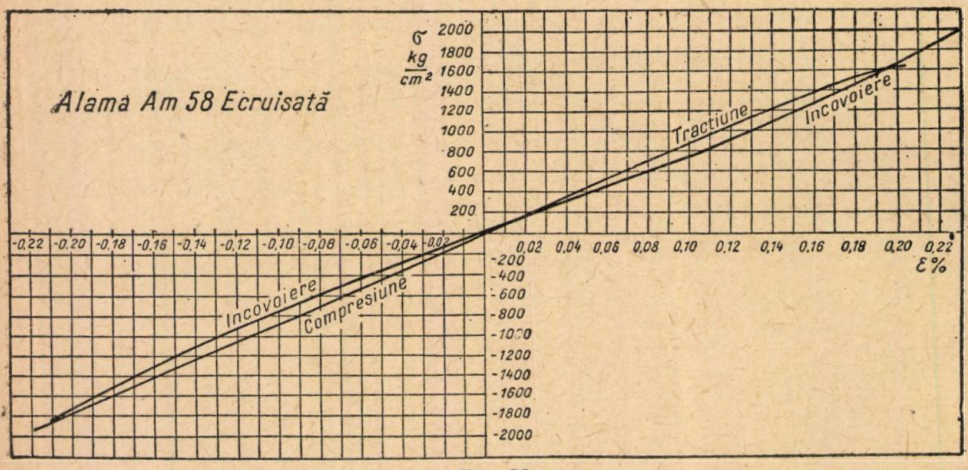


Fig. 22

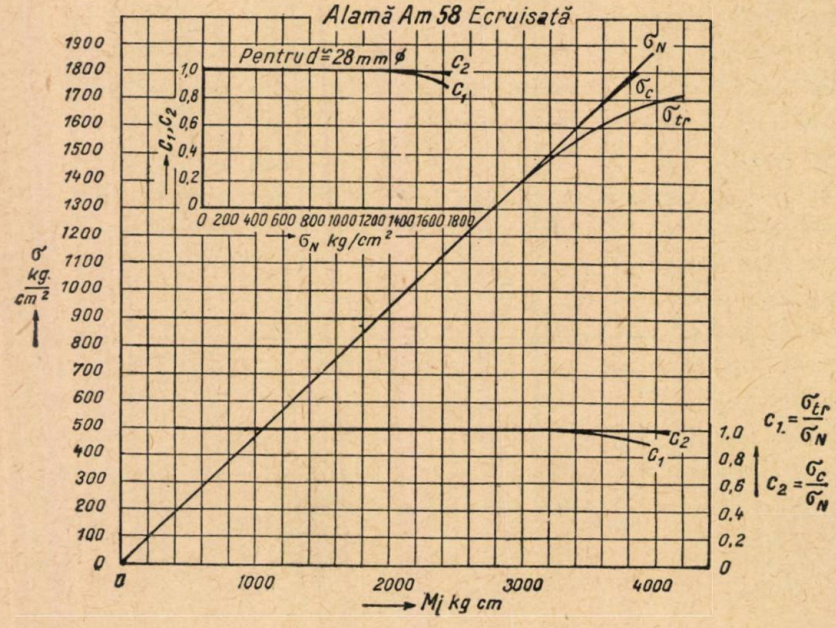


Fig. 23

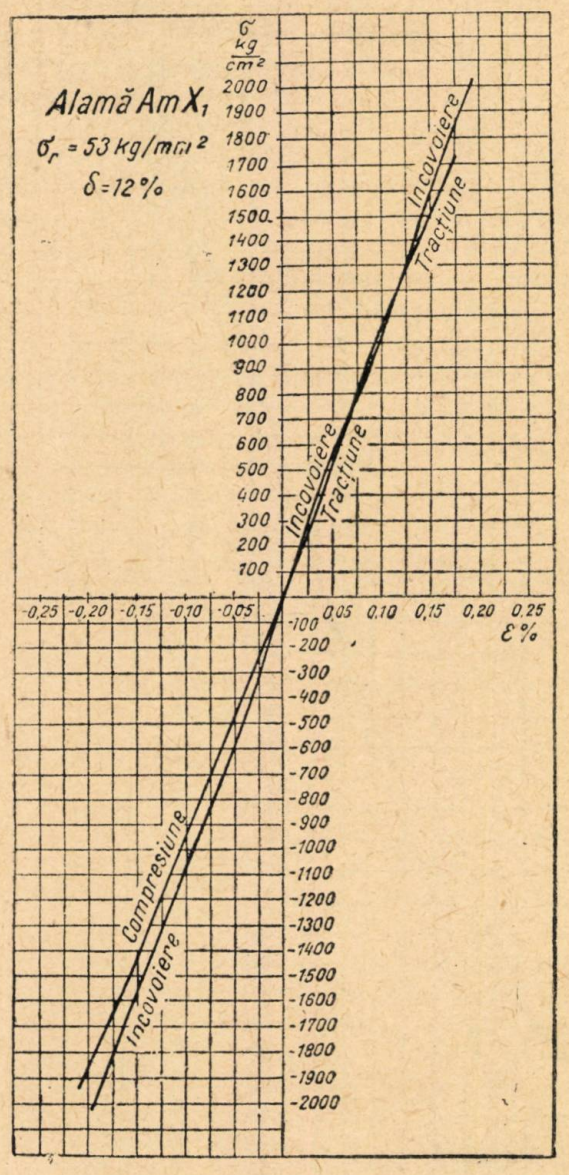

Alamă AmX1
σr = 53 kg/mm²
δ = 12 %
σ kg/cm²
2000
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
Încovoiere
Tracțiune
Încovoiere
Tracțiune
-0,25
-0,20
-0,15
-0,10
-0,05
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
ε %
-100
-200
-300
-400
-500
-600
-700
-800
-900
-1000
-1100
-1200
-1300
-1400
-1500
-1600
-1700
-1800
-1900
-2000
Compresiune
Încovoiere

Fig. 24

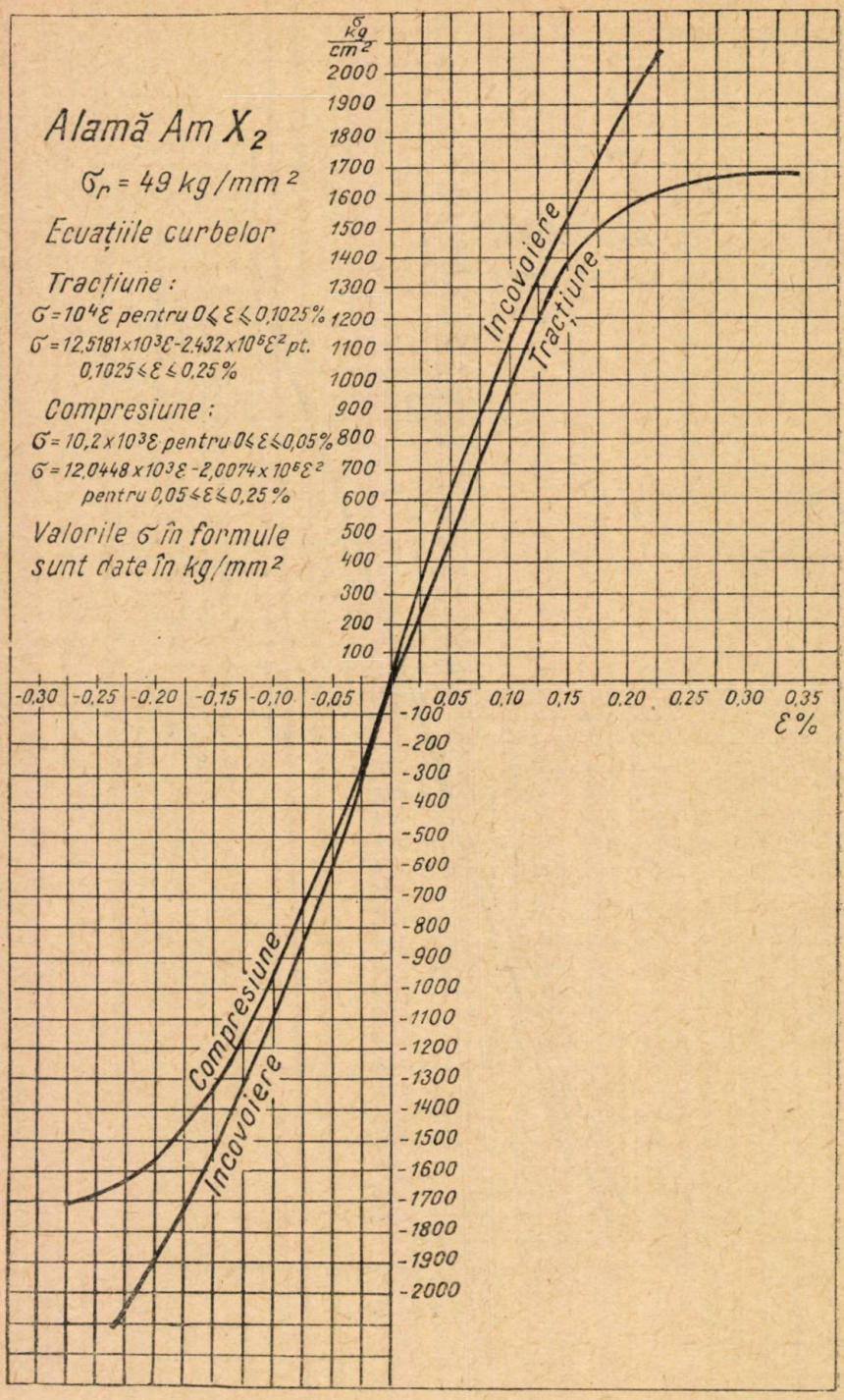

Alamă Am X2
σr = 49 kg/mm²
Ecuațiile curbelor
Tracțiune :
σ = 10⁴ε pentru 0 ≤ ε ≤ 0,1025 %
σ = 12,5181 x 10³ε - 2,432 x 10⁵ε² pt. 0,1025 ≤ ε ≤ 0,25 %
Compresiune :
σ = 10,2 x 10³ε pentru 0 ≤ ε ≤ 0,05 %
σ = 12,0448 x 10³ε - 2,0074 x 10⁵ε² pentru 0,05 ≤ ε ≤ 0,25 %
Valorile σ în formule sunt date în kg/mm²
σ kg/cm²
2000
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
-100
-200
-300
-400
-500
-600
-700
-800
-900
-1000
-1100
-1200
-1300
-1400
-1500
-1600
-1700
-1800
-1900
-2000
-0,30
-0,25
-0,20
-0,15
-0,10
-0,05
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
ε %
Încovoiere
Tracțiune
Compresiune
Încovoiere

Fig. 25

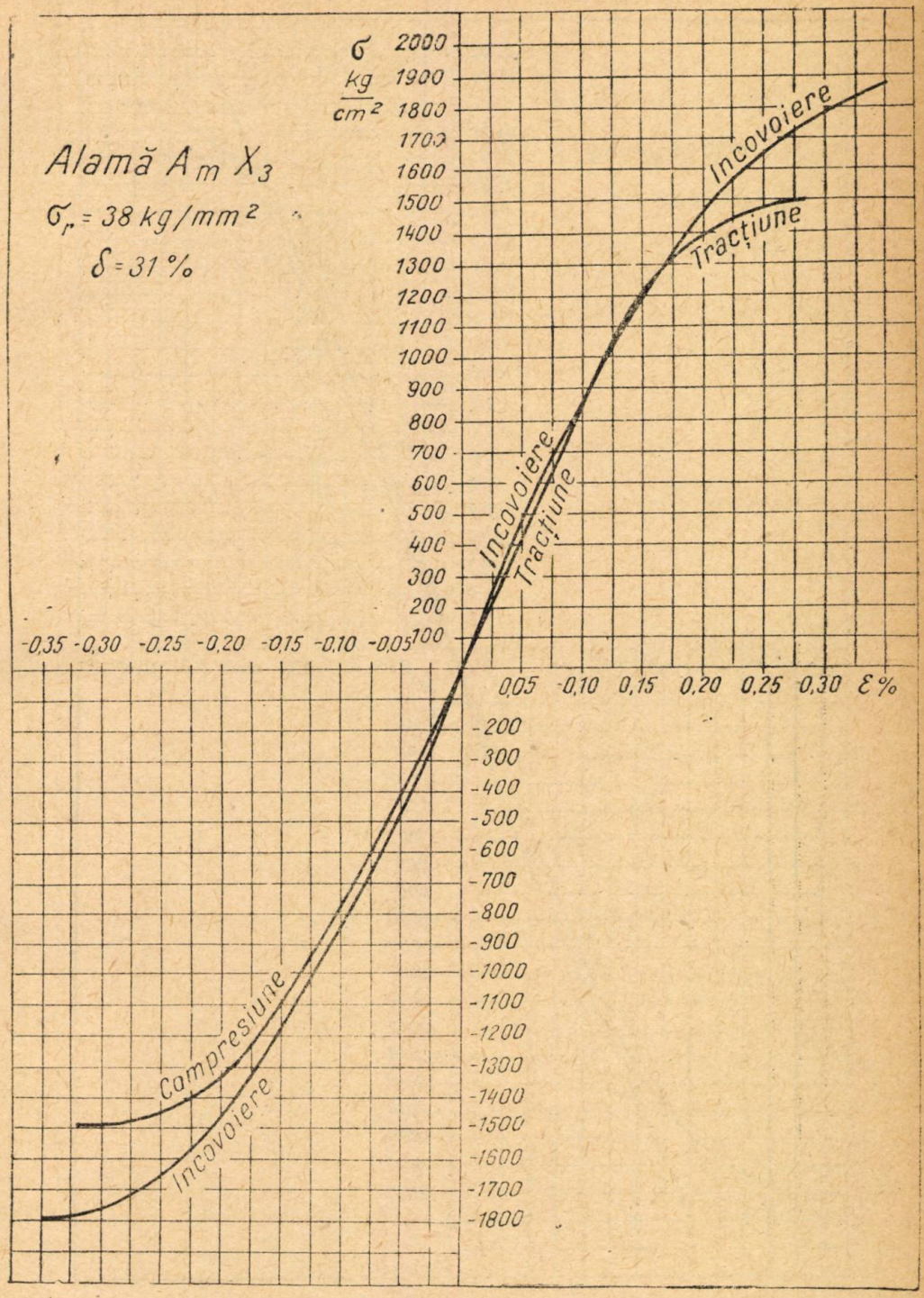

Alamă $A_m X_3$
$\sigma_r = 38\ kg/mm^2$
$\delta = 31\ \%$
σ kg/cm²
2000
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
Încovoiere
Tracțiune
Încovoiere
Tracțiune
-0,35 -0,30 -0,25 -0,20 -0,15 -0,10 -0,05
0,05 0,10 0,15 0,20 0,25 0,30 ε %
-200
-300
-400
-500
-600
-700
-800
-900
-1000
-1100
-1200
-1300
-1400
-1500
-1600
-1700
-1800
Compresiune
Încovoiere

Fig. 26

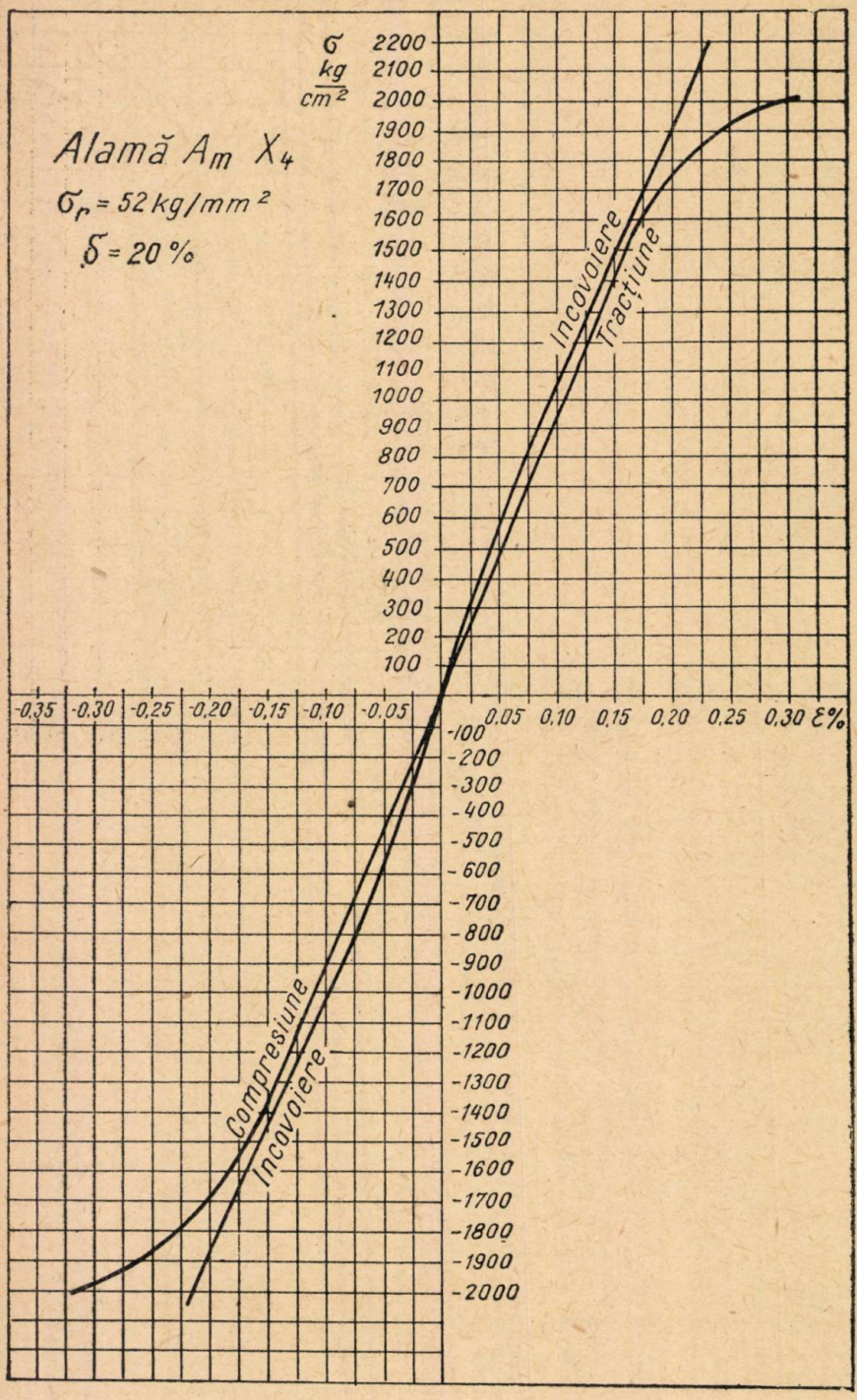

σ kg/cm²
Alamă Am X4
σr = 52 kg/mm²
δ = 20 %
Încovoiere
Tracțiune
Compresiune
Încovoiere
ε%

Fig. 27

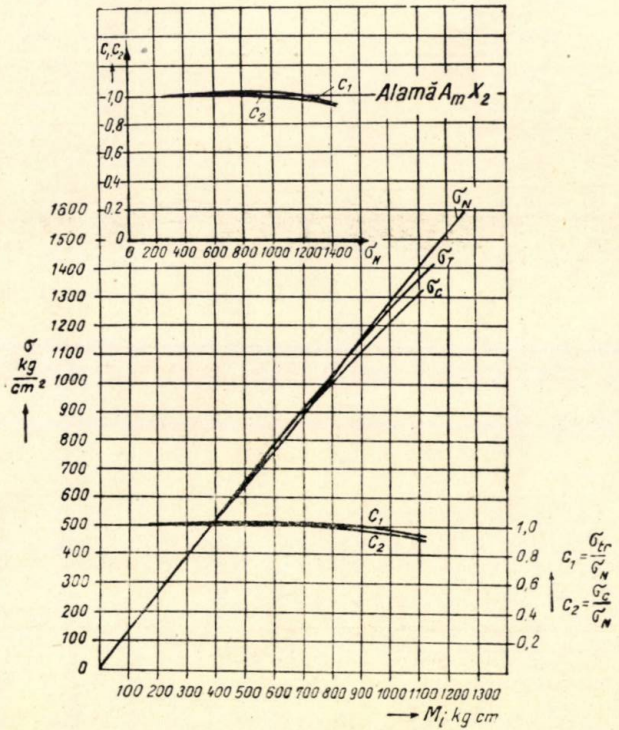


Fig. 28

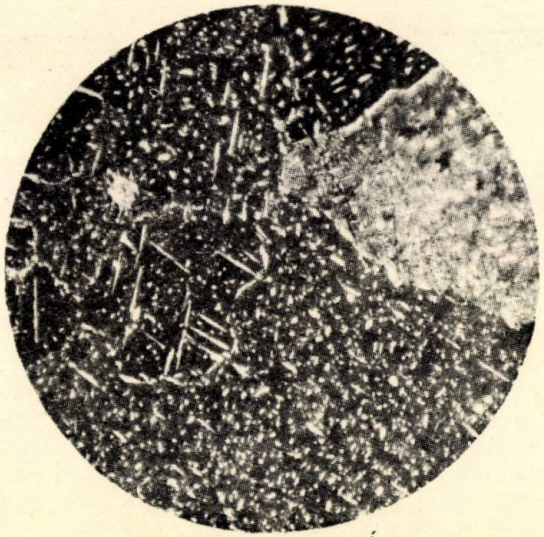


Fig. 29

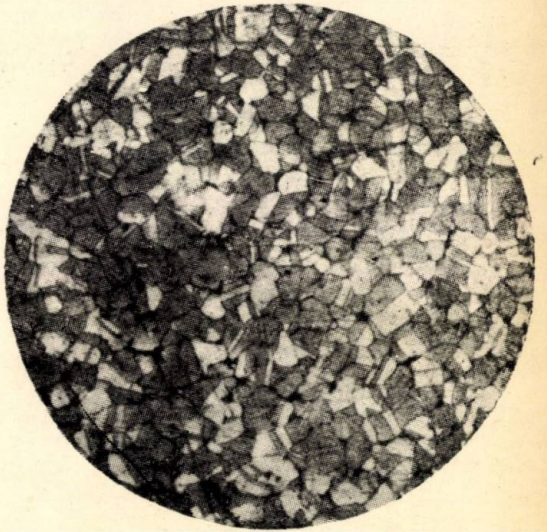
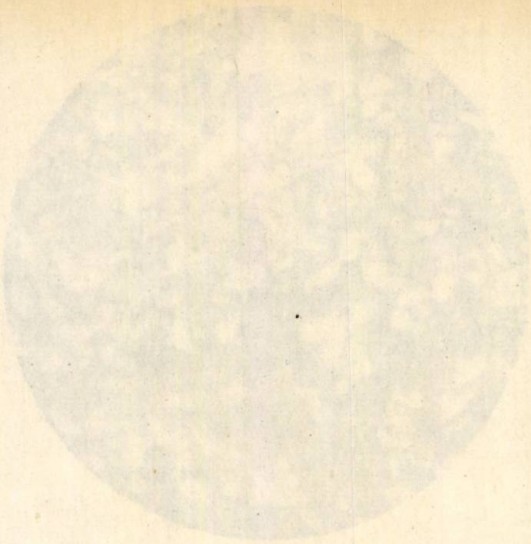
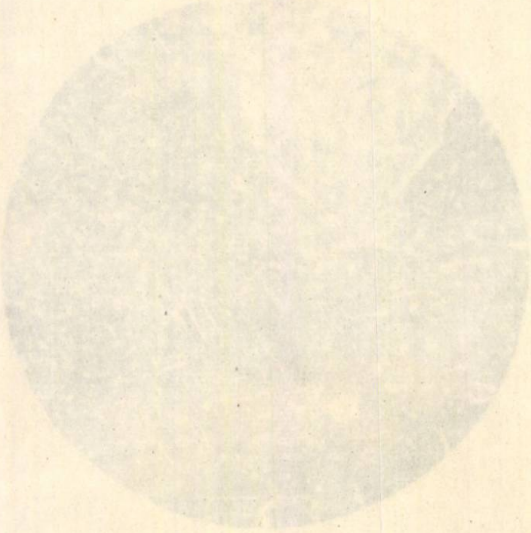
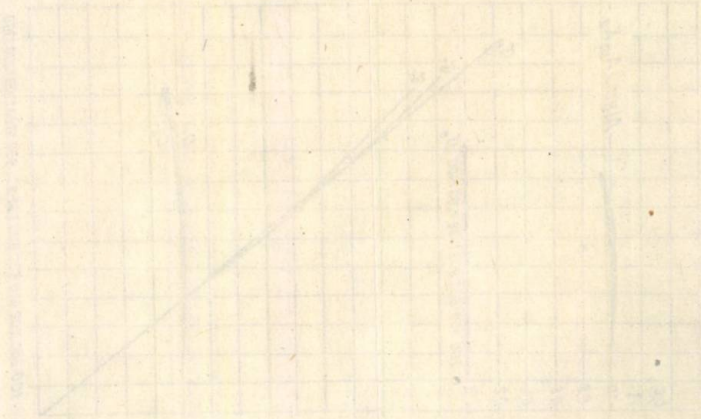


Fig. 30

Gh. Manea, Gh. Buzdugan și P. Freund, Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 3—4, 1954







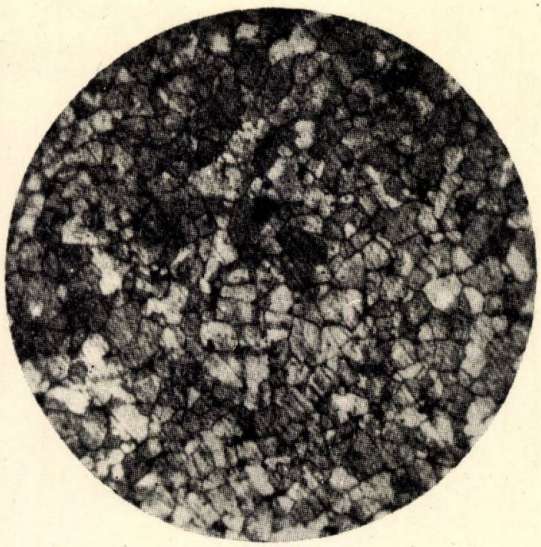


Fig. 31

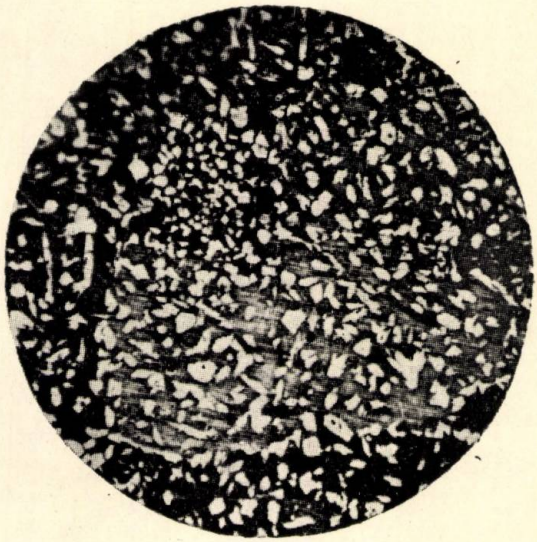
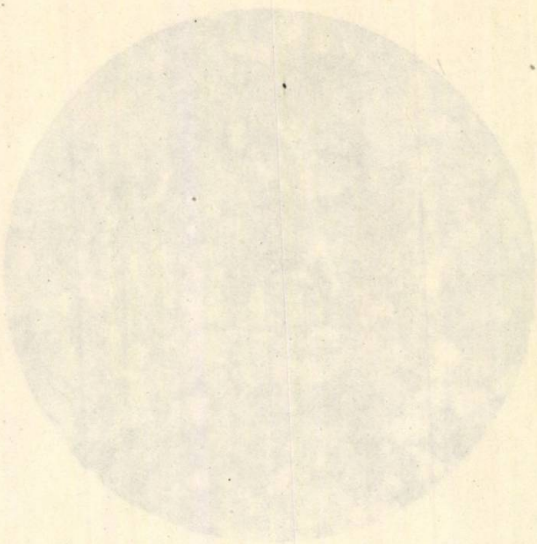
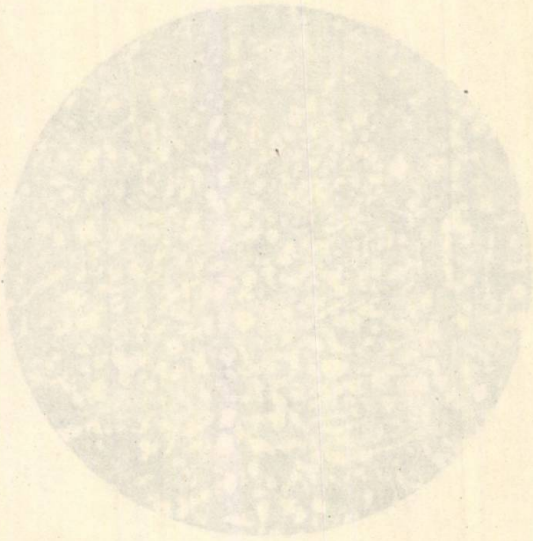


Fig. 32





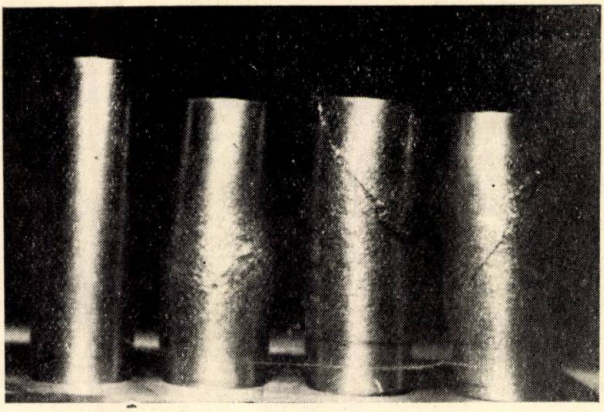


Fig. 33

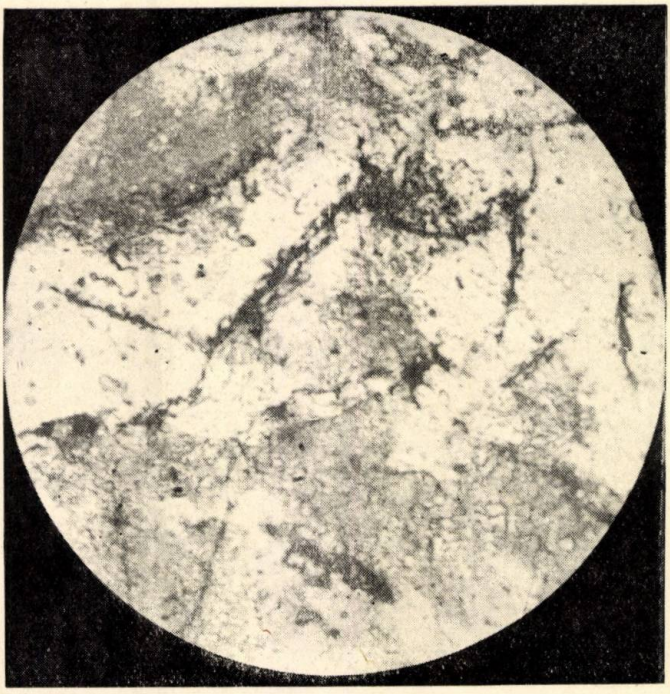
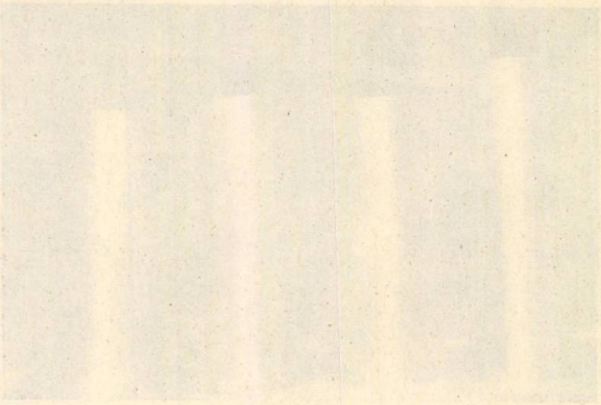
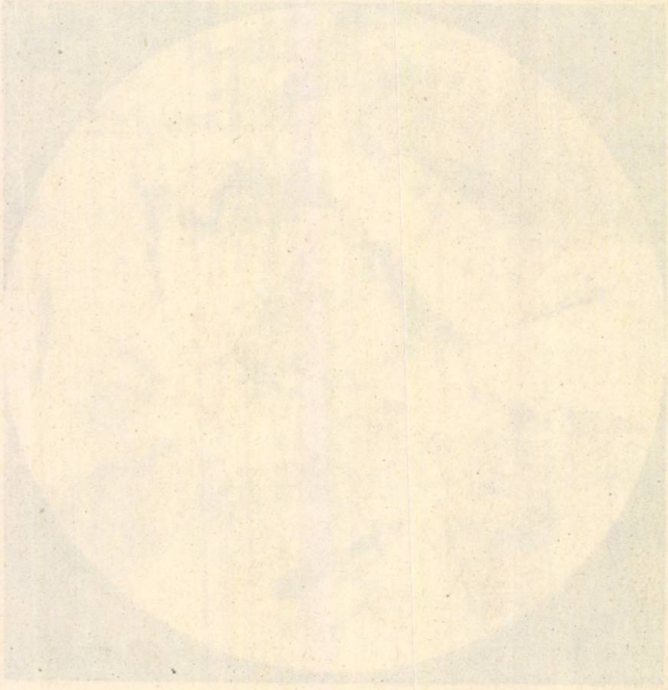


Fig. 34





Micrografia din figura 34 indică o fontă cenuşie feritică, cu circa 0,3% Si, supraîncălzită. Se observă grafit lamelar grosolan, cu început de transformare în grafit nodular, ceea ce denotă un tratament nereuşit. În jurul filamentelor de grafit, se observă zone albe de soluţie solidă de Fe-Si, care asigură rezistenţa la coroziune a fontei.

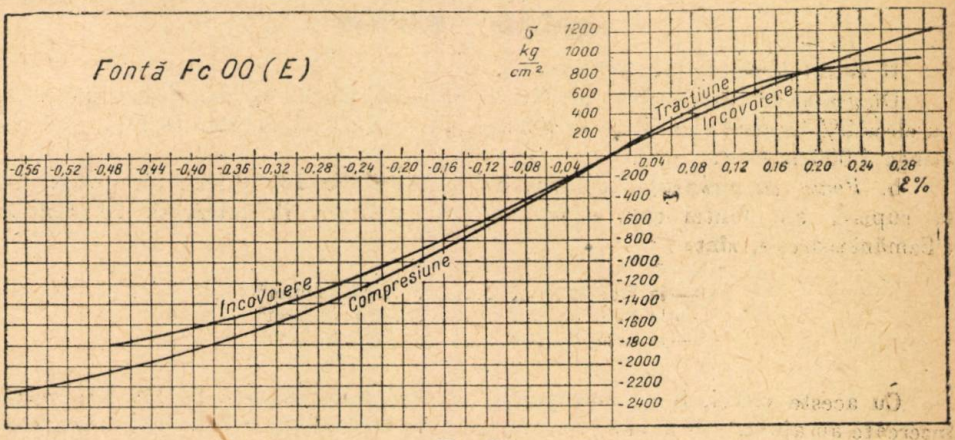


Fig. 35

În figura 35 sînt redate curbele caracteristice de tracţiune-compresiune şi, informativ, aceea de încovoiere.

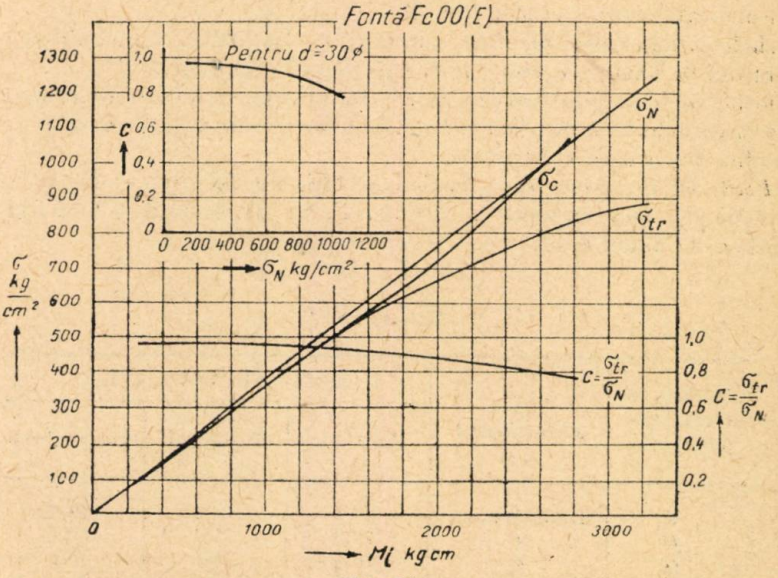


Fig. 36

Curbele au fost extinse mai mult pe zona de compresiune, spre a putea servi la calculele de secţiuni nesimetrice, în care efortul unitar de compresiune este superior celui de tracţiune, aşa cum cere utilizarea raţională a fontei.

Curbura liniilor de tracţiune-compresiune, respectiv diferenţele între σ_c şi σ_{tr} pentru acelaşi ε sînt evidente.

Întrucît efortul unitar de tracţiune este acel periculos, s-a calculat pentru o epruvetă cu $d \approx 30$ mm numai coeficientul

$$c = \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_N}.$$

Rezultatele sînt redate în figura 36.

Diagrama arată că formula lui Navier dă valori pentru σ_{tr} superioare celor reale, cu circa 5% în jurul valorii $\sigma_N = 400$ kg/cm², crescînd chiar pînă la 20%, cînd σ_N atinge 1 000 kg/cm².

b. *Fonte cu rezistenţa corespunzînd calităţii Fc 12.* Cifrele de rezistenţă, la rupere, ale fontei care a fost notată cu litera F, fabricată de Uzinele «Semănătoarea», sînt:

— la tracţiune . . . . . 12,6 kg/mm²
— la încovoiere . . . . . 35,8 kg/mm²
— la compresiune . . . . 70,7 kg/mm²

Cu aceste valori, fonta corespunde calităţii standardizate Fc 12. Epruvetele încercate au ajuns, atît la compresiune, cît şi la încovoiere, la deformaţii extrem de mari. La încovoiere bara n-a putut fi ruptă la un efort unitar $\sigma = 5480$ kg/cm² (fig. 37 şi 38).

Micrografia indică o fontă cenuşie feritică supraîncălzită, pe care apare ferită şi grafitul cu început de transformare în nodular. Materialul a fost supus unui tratament de maleabilizare, nereuşit (fig. 39).

Curbele caracteristice ale materialului şi rezultatul final al calculelor, sub forma coeficientului de abatere c, sînt cuprinse în figurile 40 şi 41.

Valorile coeficientului variază între 2% în zona de utilizare normală a fontei, şi 6 % pentru valorile $\sigma = 1\,000$ kg/cm². Şi în acest caz, valorile date de formula lui Navier sînt superioare celor reale.

c. *Fonte cu rezistenţa corespunzînd calităţii Fc 15.* Patru dintre materialele cercetate de noi, s-au încadrat în calitatea Fc 15 prevăzută de STAS 568—52, aşa cum reiese din tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Notaţia în cursul experienţelor	Uzina producătoare	Rezistenţa la rupere kg/mm²		
		Tracţiune	Încovoiere	Compresiune
A	Semănătoarea	17,3	34,4	75,6
B	»	17,8	39,1	69,1
C	»	16,8	39,5	73,0
G	Matyas Rakosi	17,5	50,7	85,9

Fontele din această clasă, mai casante decît cele precedente, au manifestat ruperi explozive la încercarea de compresiune. Rupturile la 45° la fontele *A* şi *C* au apărut în mod evident în acest caz (fig. 42, 43, 44).

Examenul metalografic este redat în figura 45 pentru fonta *A*, figura 46 pentru fonta *B*, figura 47 pentru fonta *C* şi figura 48 pentru fonta *G*.

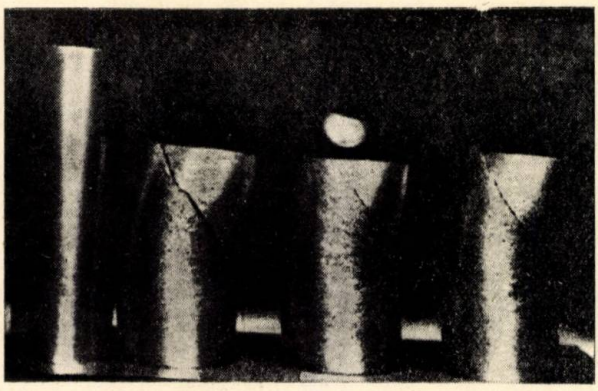


Fig. 37

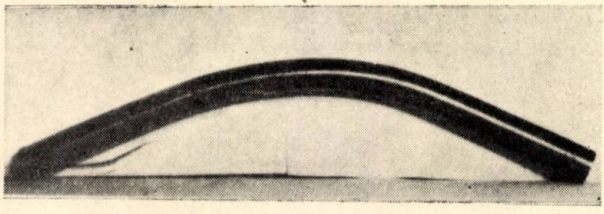


Fig. 38

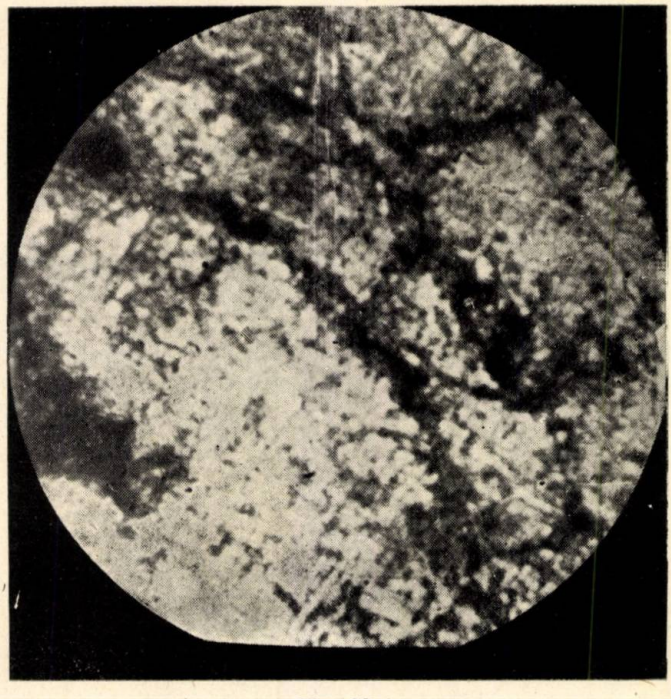
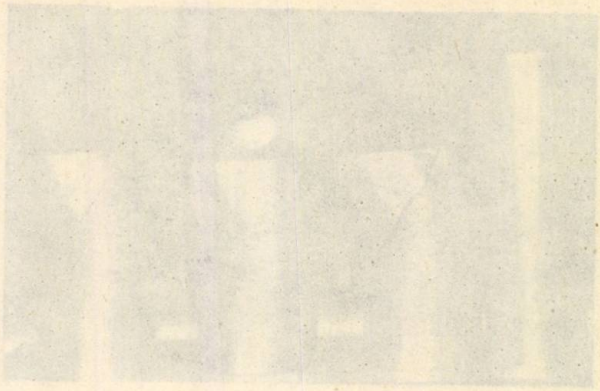
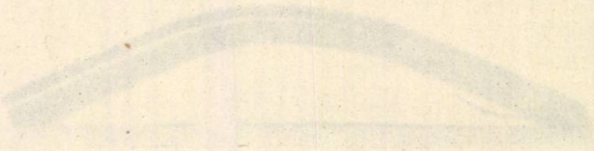
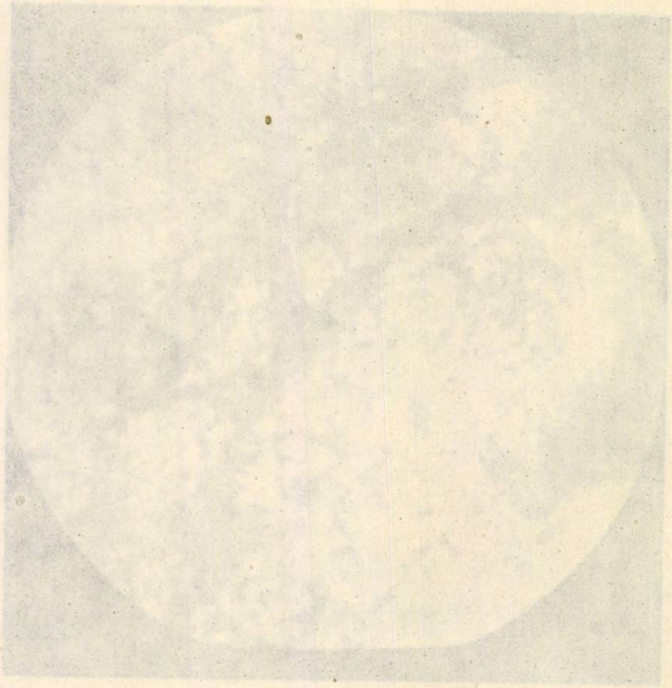


Fig. 39







Curbele caracteristice de tracţiune-compresiune pentru cele patru tipuri de fonte studiate, din clasa Fc 15, sînt destul de apropiate în zona de tracţiune şi manifestă o dispersie mai accentuată în zona de compresiune (fig. 49).

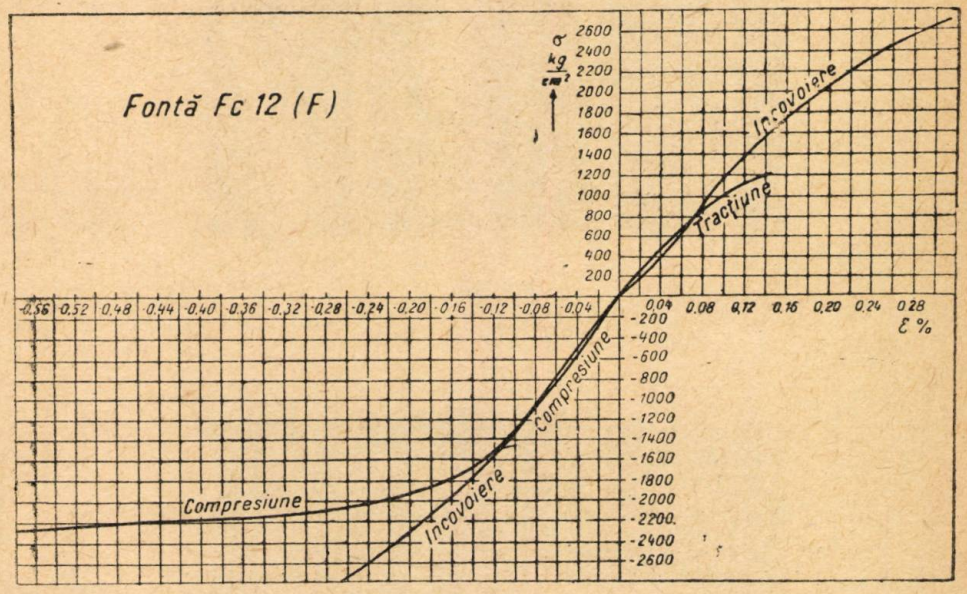


Fig. 40

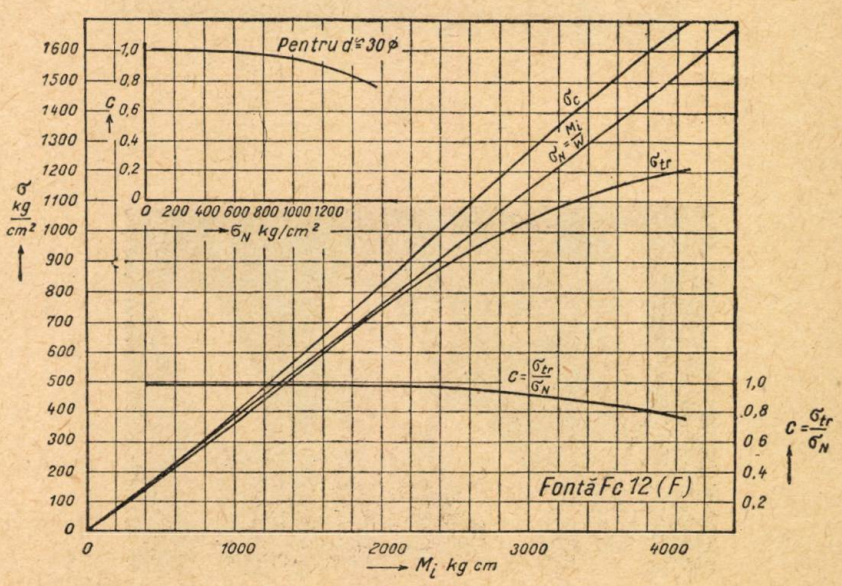


Fig. 41

S-a luat ca prototip al grupei, fonta *B*, care a fost supusă studiului în continuare (fig. 50 şi 51).

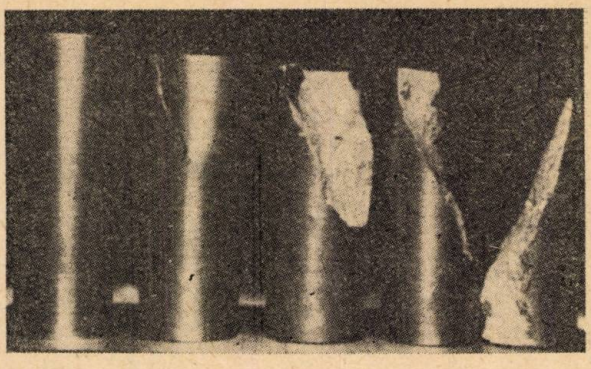


Fig. 42

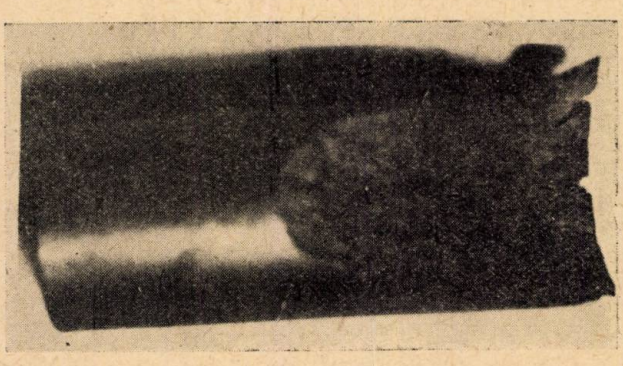


Fig. 43

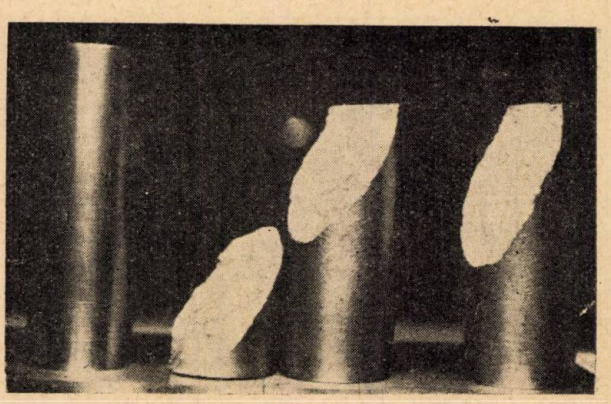


Fig. 44

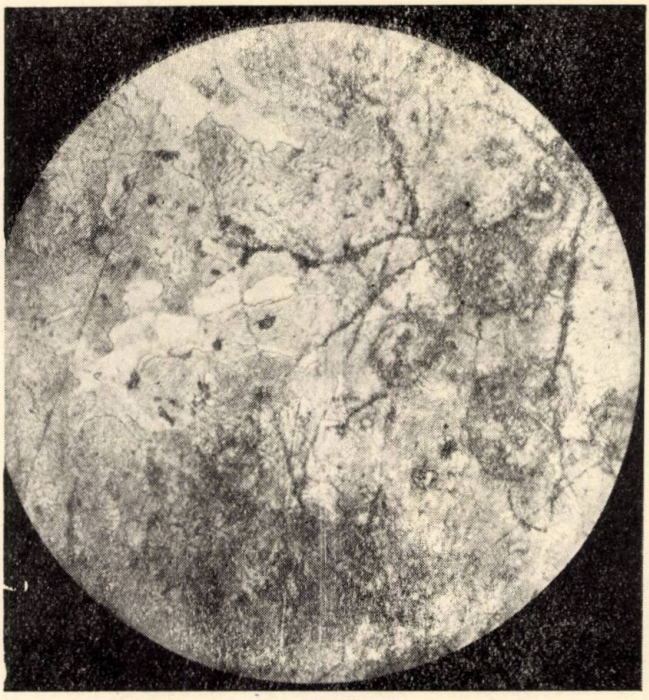


Fig. 45

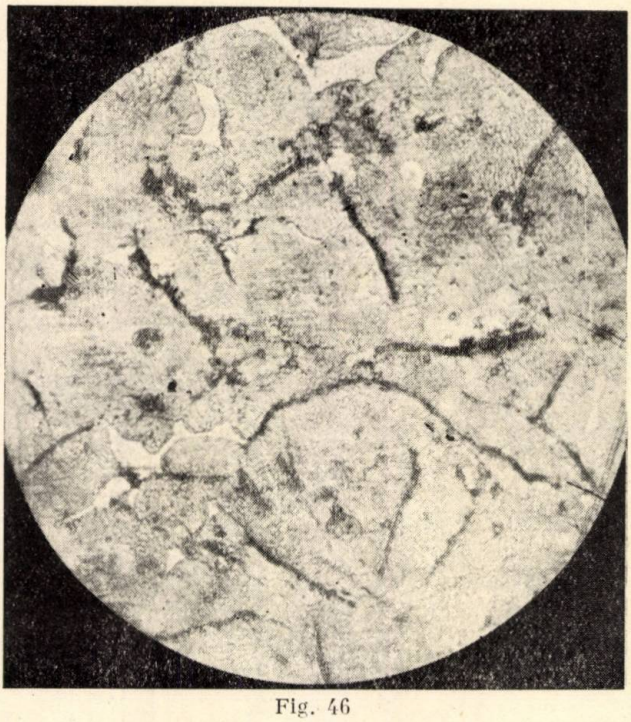
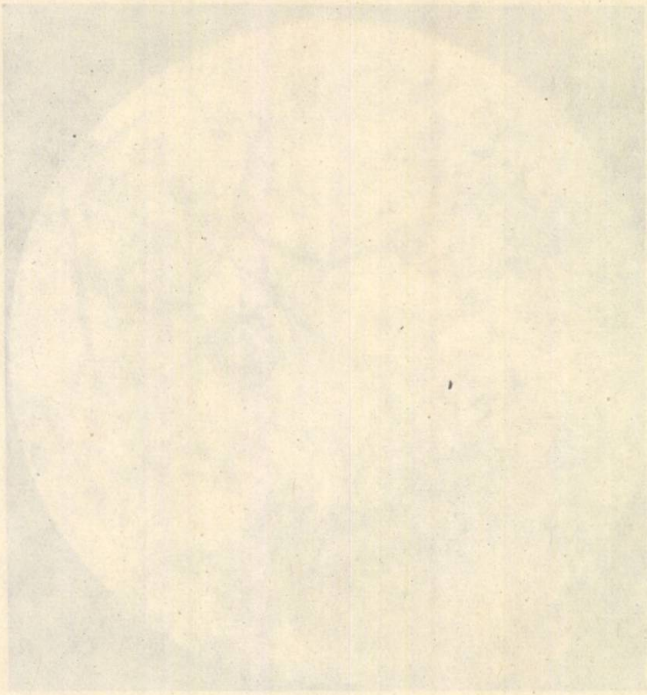
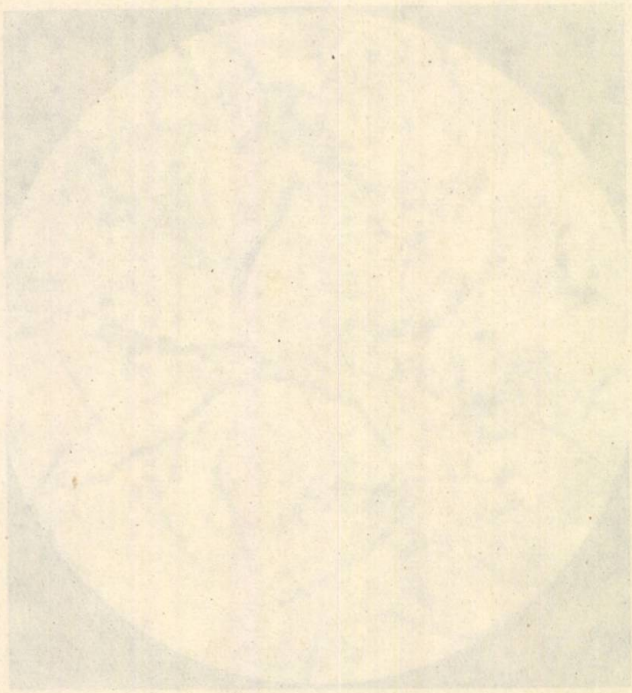


Fig. 46





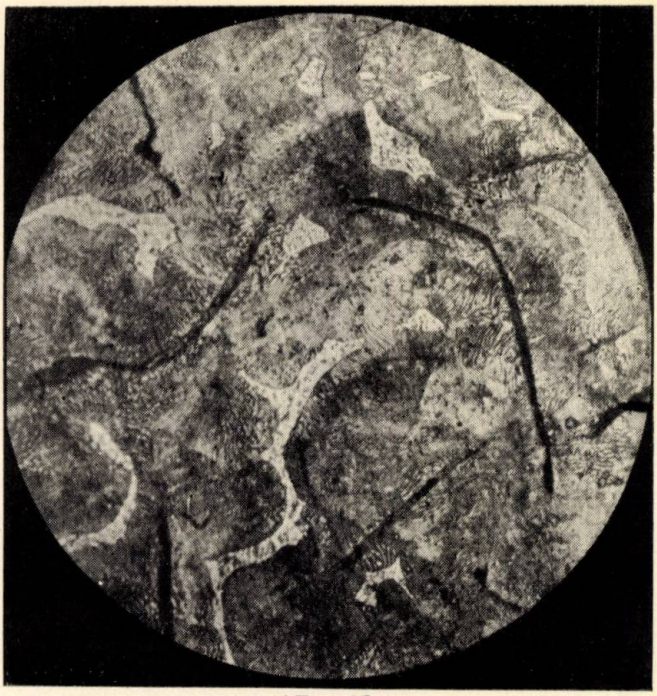


Fig. 47

Fig. 48

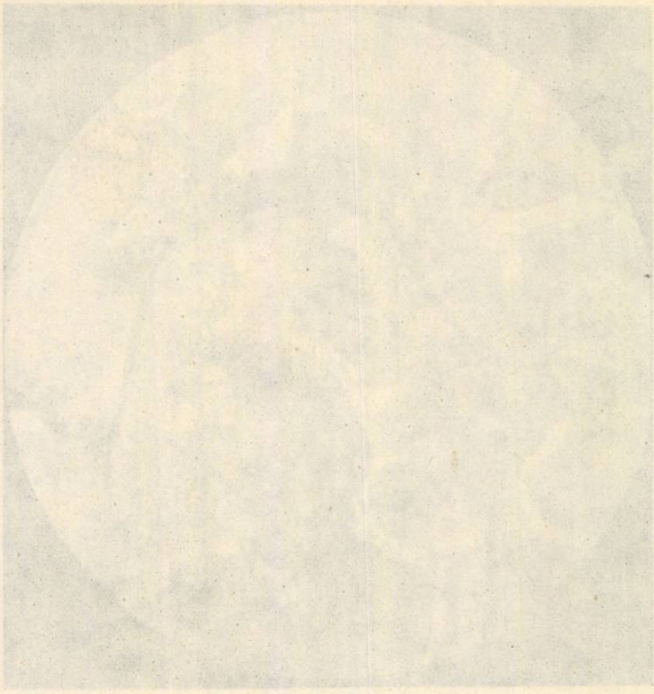


Fig. 47

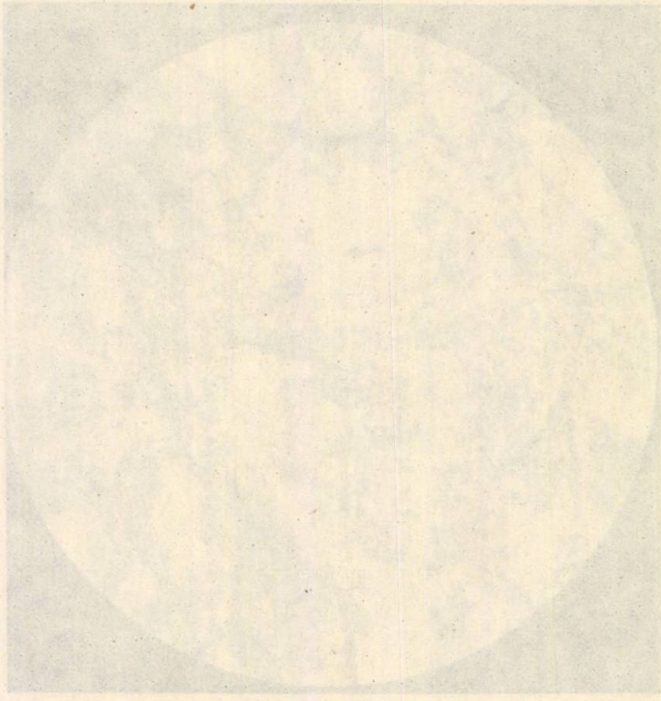


Fig. 48

Cercetarea micrografică (fig. 46) arată o fontă cenușie cu aproximativ 0,03% fosfor. Apare grafitul lamelar fin, perlita, eutecticul fosforos. Materialul este o fontă bună de turnătorie.

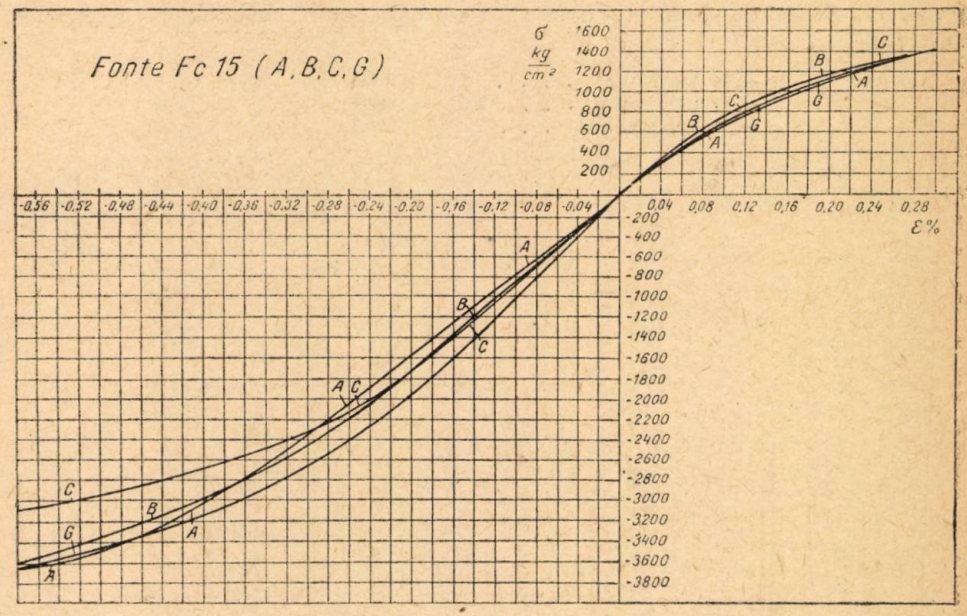


Fig. 49

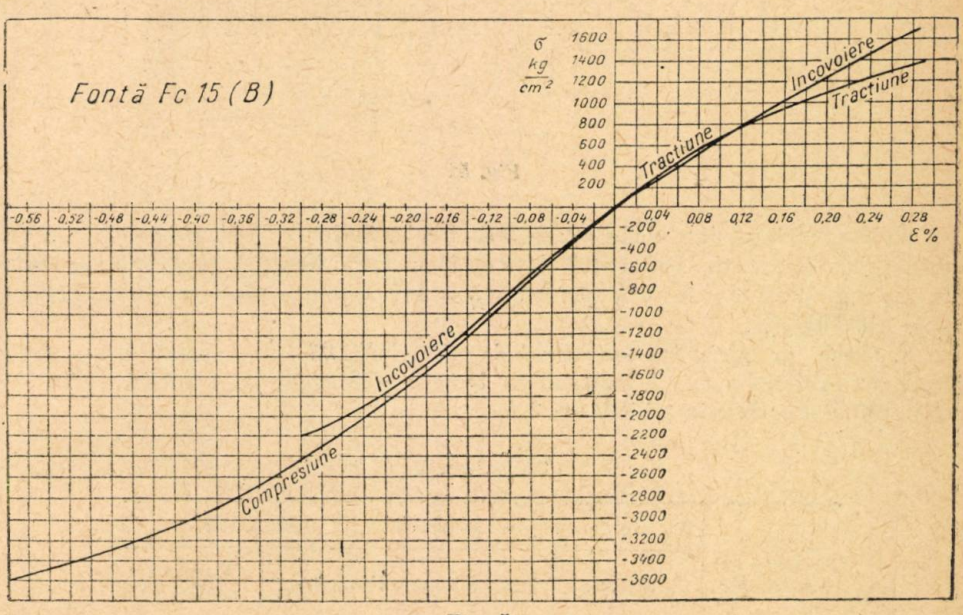


Fig. 50

Rezultatul final al calculelor, redat în curbele din figura 51, demonstrează că în domeniul de utilizare frecventă ($\sigma_N = 400 \ldots 600$ kg/cm²), formula lui

Navier dă valori acoperitoare cu circa 5%, această abatere crescînd la 12% pentru $\sigma_N = 1\,000$ kg/cm².

d. *Fonta cu rezistenţa corespunzînd calităţii Fc 18.* Notată cu litera *D*, această fontă, fabricată de Uzinele « Semănătoarea », a avut următoarele rezistenţe de rupere:

— la tracţiune . . . . 18,2 kg/mm²
— la încovoiere . . . . 40,8 kg/mm²
— la compresiune . . . 70,3 kg/mm²

Este o fontă cenuşie cu circa 0,1% Si, avînd în structură grafit lamelar, perlită fină, soluţie solidă de Fe-Si în jurul filamentelor de grafit (fig. 52).

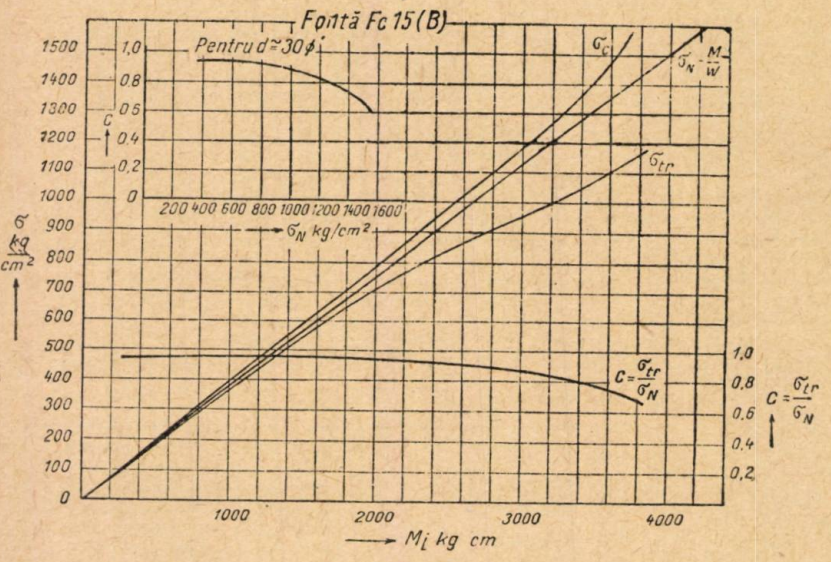


Fig. 51

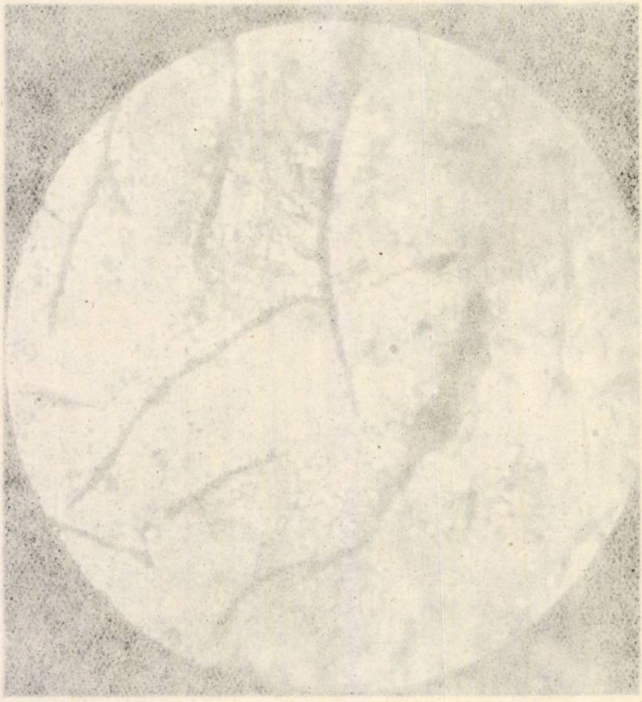
În figura 53 sînt date curbele caracteristice, iar în figura 54 diagramele finale, cu coeficientul de corecţie. Diferenţele date de formula lui Navier faţă de valorile reale ale lui σ_{tr} merg de la 4% pentru $\sigma_N = 400$ kg/cm², pînă la 15% pentru $\sigma_N = 1\,000$ kg/cm².

e. *Fonte cu rezistenţa corespunzînd calităţii Fc 28.* În această grupă s-au încadrat trei fonte speciale, turnate la Uzinele « 23 August », ale căror cifre de rezistenţă sînt redate în tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2

Notaţia în cursul experienţelor	Rezistenţa la rupere kg/mm²		Micrografii	
	Tracţiune	Compresiune	Fără atac	Cu atac nital 2%
M	29,1	112,3	Fig. 55	Fig. 56
N	29,8	106,7	Fig. 57	Fig. 58
P	30,4	115,0	Fig. 59	Fig. 60

Fig. 52



Microstructurile arată, în cazul probei *M*, o fontă cenuşie fosforoasă cu perlită fină şi lamele de grafit; probele *N*, *P* reprezintă o fontă cenuşie perlitică cu eutectic fosforos, uniform repartizat, şi incluzii rare de sulfură de mangan.

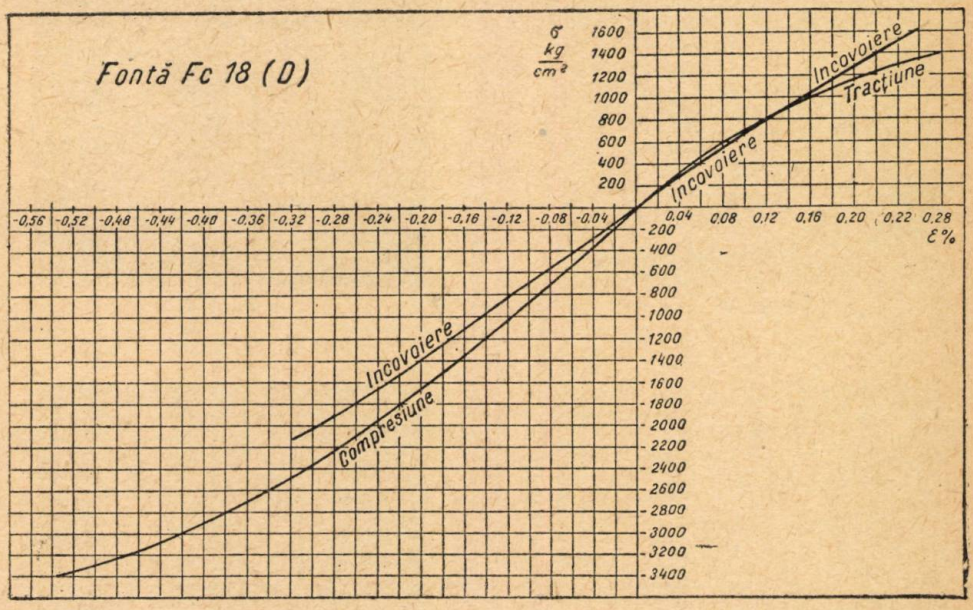


Fig. 53

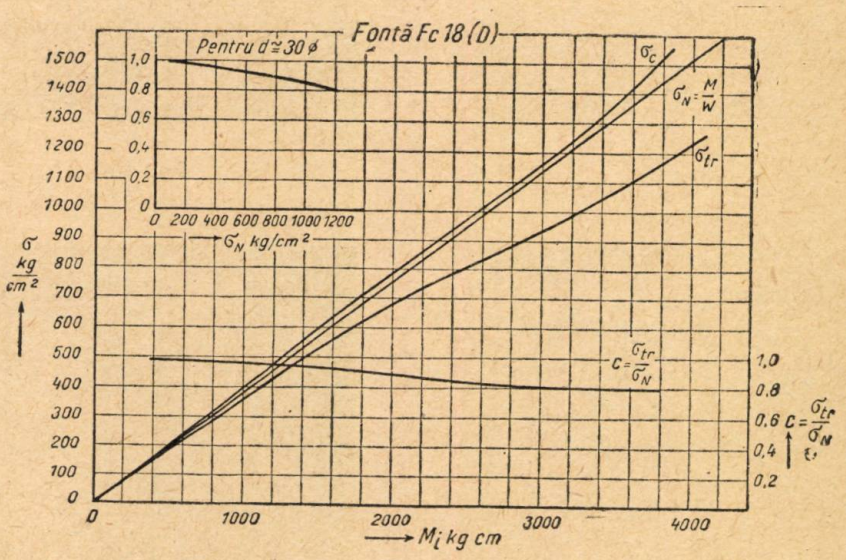


Fig. 54

Din examinarea curbelor caracteristice (fig. 61, 62 şi 63), se observă că, odată cu creşterea rezistenţei de rupere, acestea se apropie tot mai mult de forma rectilinie, specifică oţelului, în zona de utilizare.

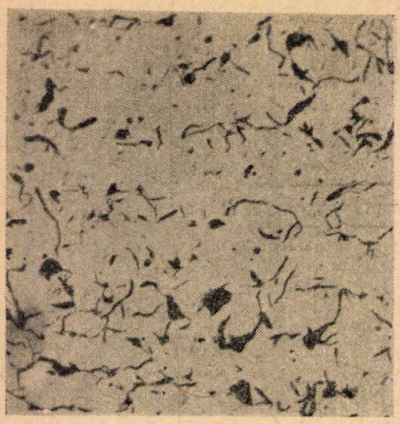


Fig. 55

Fig. 56

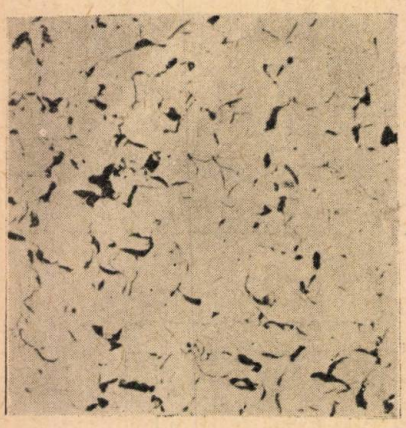


Fig. 57

Fig. 58

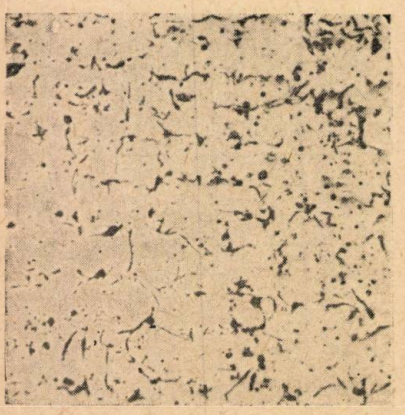


Fig. 59

Fig. 60

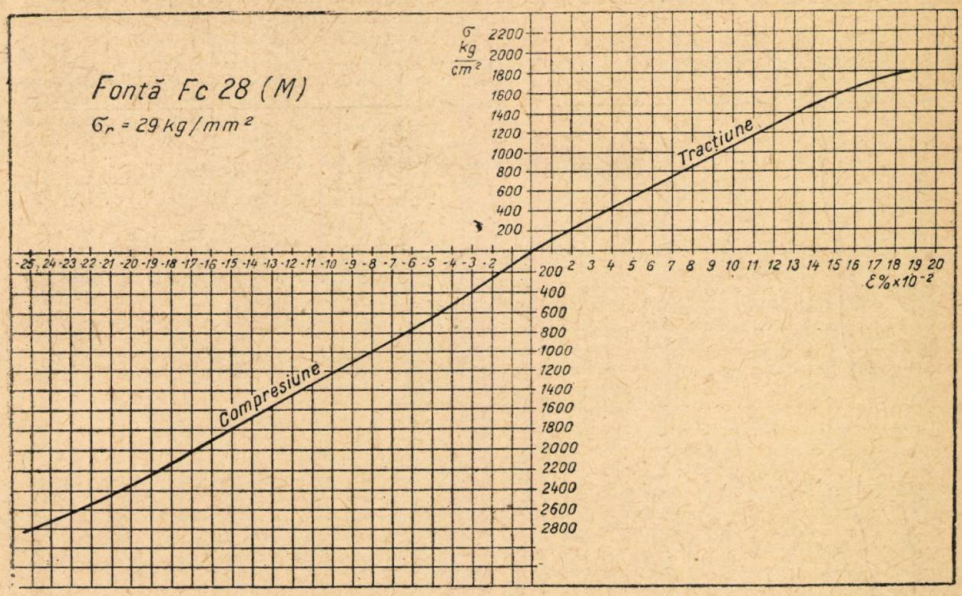

Fontă Fc 28 (M)
σ_r = 29 kg/mm²
σ kg/cm²
Tracțiune
Compresiune
ε‰ x10⁻²

Fig. 61

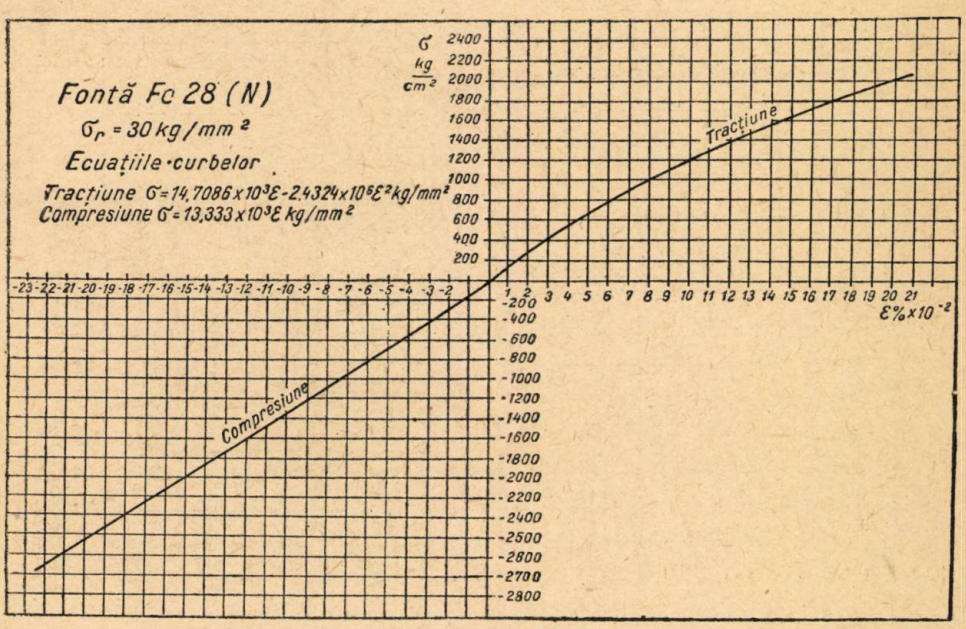

Fontă Fc 28 (N)
σ_r = 30 kg/mm²
Ecuațiile curbelor
Tracțiune σ=14,7086x10³ε-2,4324x10⁶ε² kg/mm²
Compresiune σ=13,333x10³ε kg/mm²
σ kg/cm²
Tracțiune
Compresiune
ε‰ x10⁻²

Fig. 62

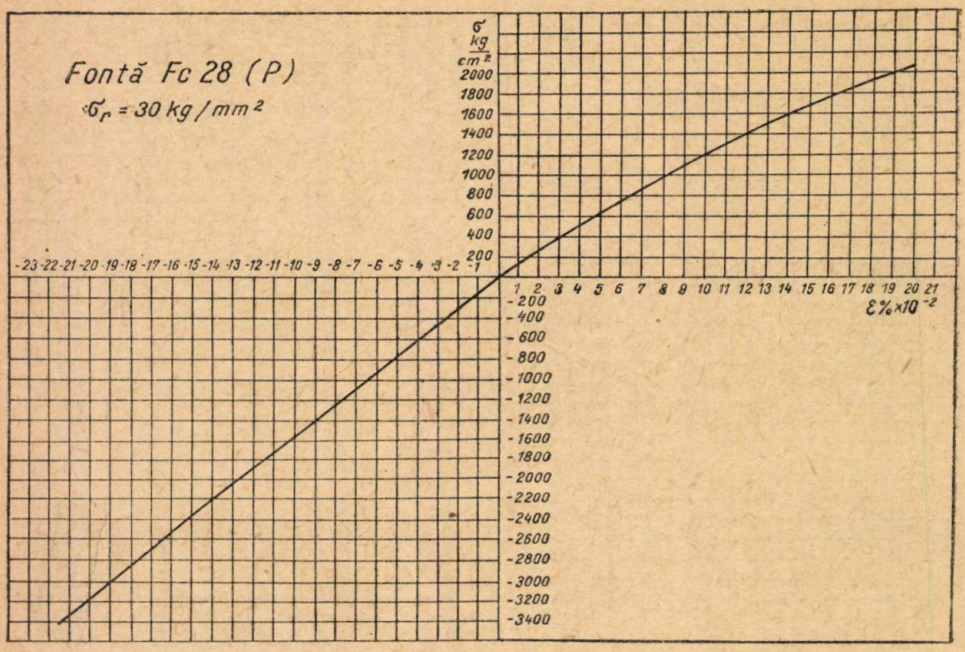

Fontă Fc 28 (P)
$\sigma_r = 30\ kg/mm^2$
σ kg/cm²
$\varepsilon\% \times 10^{-2}$

Fig. 63

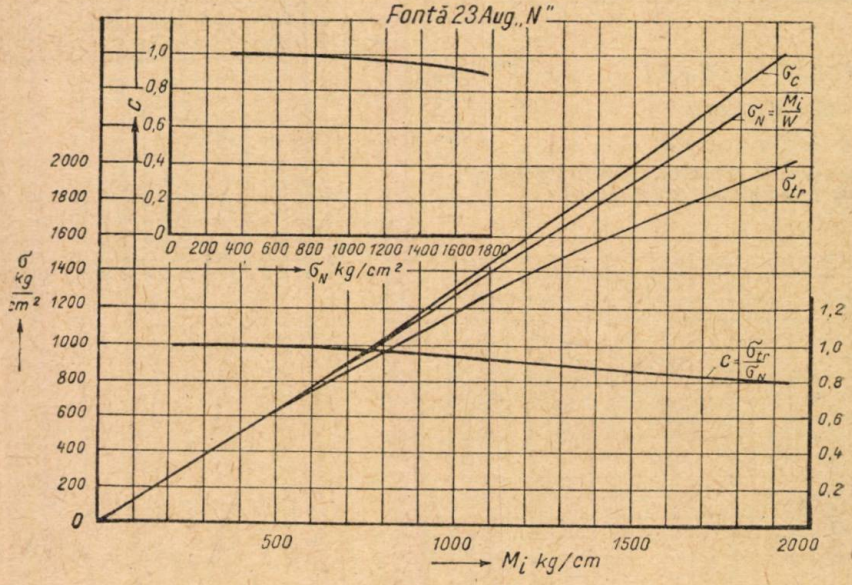

Fontă 23 Aug. „N"
σ_c
$\sigma_N = \frac{M_i}{W}$
σ_{tr}
$C = \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_N}$
σ_N kg/cm²
σ kg/cm²
M_i kg/cm

Fig. 64

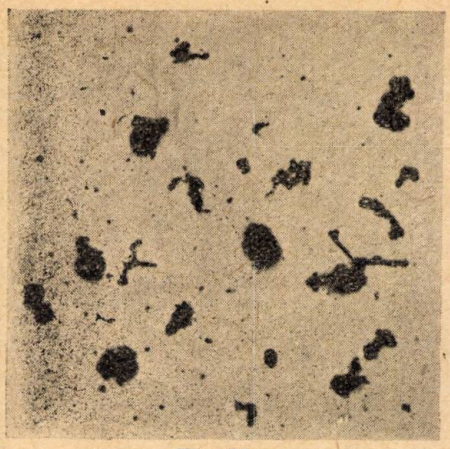


Fig. 65

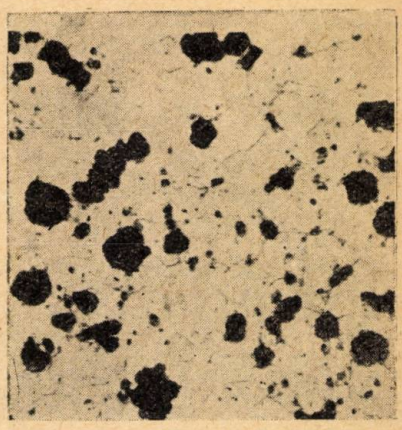


Fig. 66

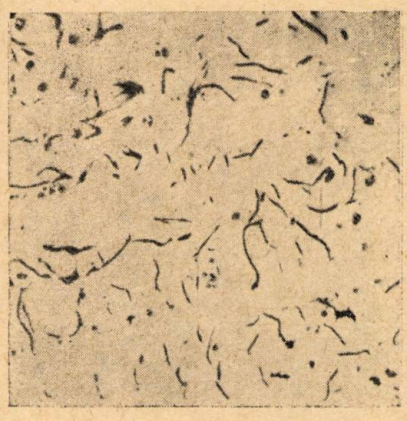


Fig. 67

Fig. 68

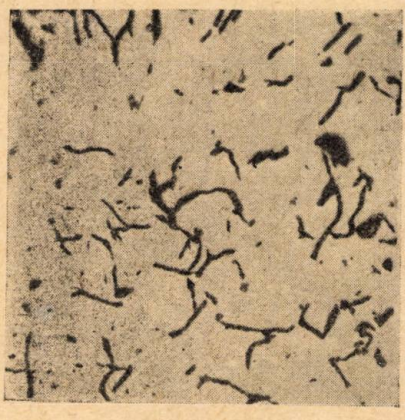


Fig. 69

Fig. 70

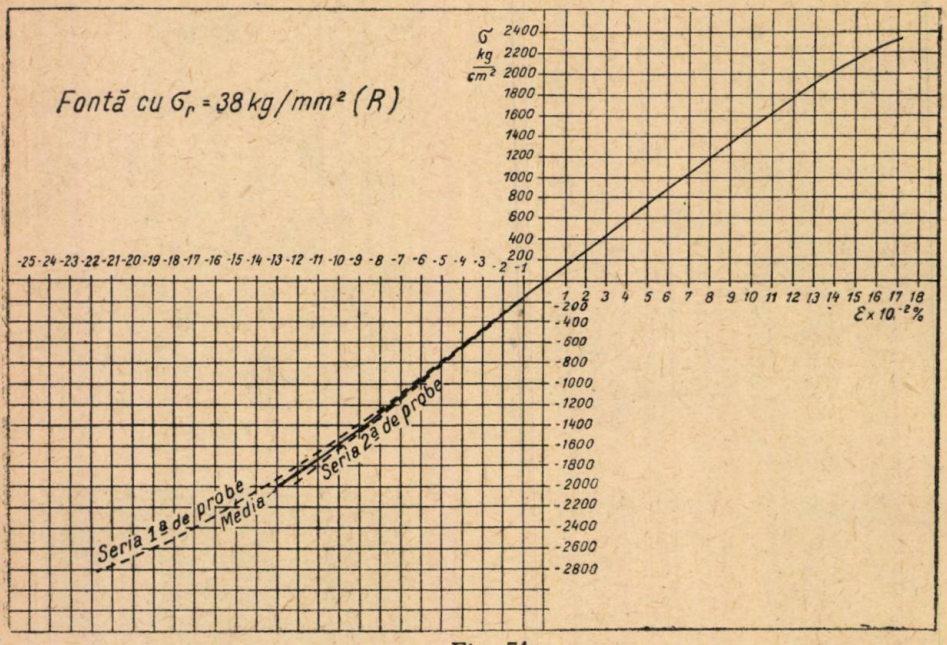

Fontă cu σ_r = 38 kg/mm² (R)
σ kg/cm²
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
-25 -24 -23 -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
ε x 10⁻² %
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400
-1600
-1800
-2000
-2200
-2400
-2600
-2800
Seria 1a de probe
Media
Seria 2a de probe

Fig. 71

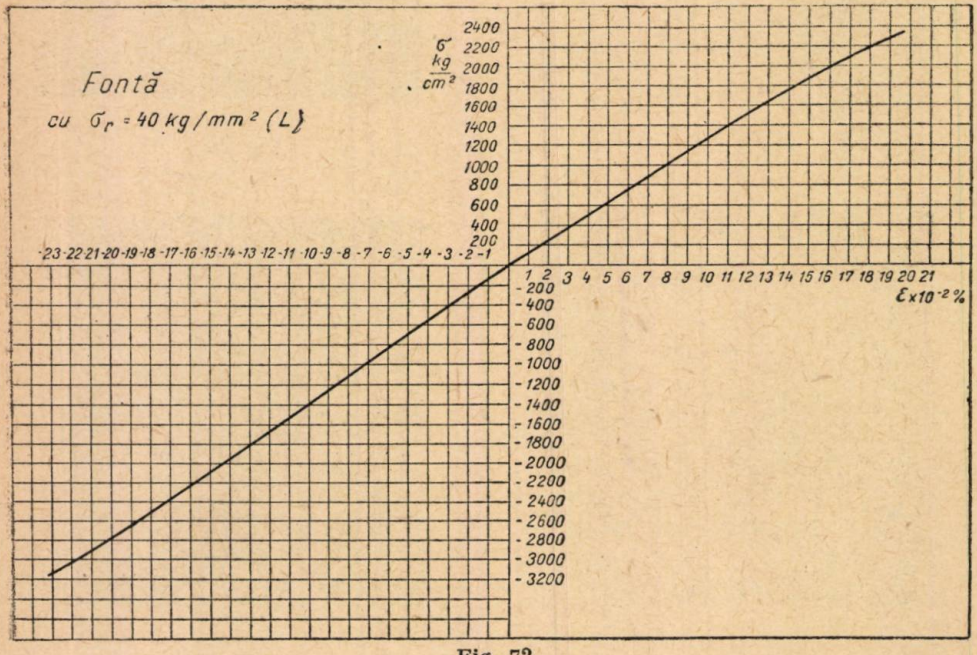

Fontă
cu σ_r = 40 kg/mm² (L)
σ kg/cm²
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
-23 -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
ε x 10⁻² %
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400
-1600
-1800
-2000
-2200
-2400
-2600
-2800
-3000
-3200

Fig. 72

Tabloul nr. 3

Notația în cursul experienţelor	Uzina producătoare	Rezistența la rupere kg/mm²		Micrografii	
		Tracţiune	Compresiune	Fără atac	Cu atac nital 2%
R	Uzinele «23 August»	38,0	92,0	Fig. 65	Fig. 66
L	»	39,1	112,3	» 67	» 68
K	Atelierele C.F.R. Cluj	40,0	Nu s-au putut rupe	» 69	» 70

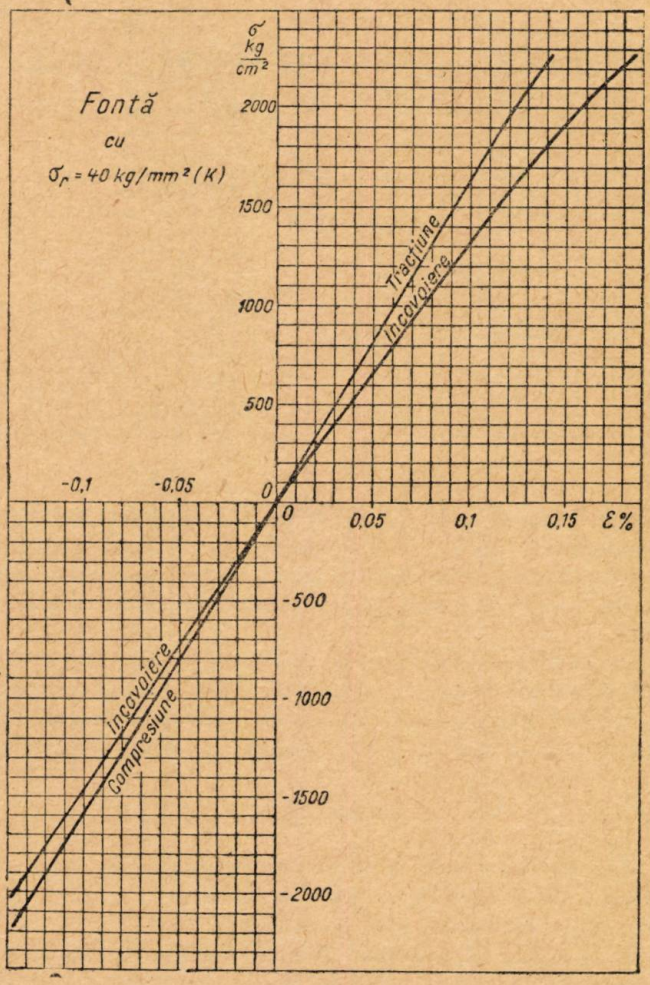


Fig. 73

Pentru proba *N*, care se abate mai mult de la această constatare, s-a calculat momentul încovoietor prin metoda analitică şi coeficientul de corecţie *c* pentru tracţiune (fig. 64).

f. *Fonte cu rezistenţe superioare celor prevăzute în STAS 568—52.* În tabloul nr. 3 se arată ultimele trei probe de fontă ale căror rezistenţe sînt sensibil superioare celor standardizate.

Structura fontei *R* prezintă nodule de grafit cu diametru între 20 şi 50 μ, iar pe alocuri o simplă aglomerare de grafit, fără nodulizare. Fonta *L*, dimpotrivă, are o structură cu filamente de grafit interdendritic orientat, perlită fină, puţin eutectic fosforos şi rare incluzii de sulfură de mangan.

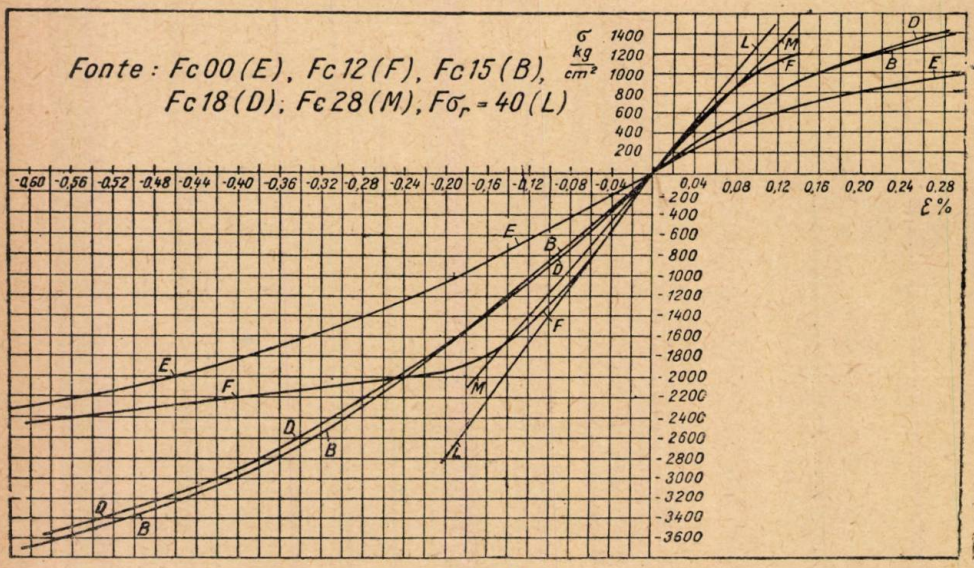


Fig. 74

Microstructura fontei *K* arată lamele de grafit interdendritic orientat.

Curbele caracteristice (fig. 71, 72 şi 73) confirmă încă odată constatarea enunţată mai sus că fontele de mare rezistenţă se supun, pe o bună parte din traseul lor, legii lui Hooke. În asemenea cazuri, relaţia clasică de calcul la încovoiere este în totul aplicabilă.

Suprapunerea curbelor caracteristice ale fontelor (fig. 74) lasă să apară în mod evident apropierea lor de cele ale oţelurilor (traseu parţial rectiliniu) în măsura creşterii rezistenţei de rupere, natural, cu scăderea corespunzătoare a deformaţiilor. Excepţie face fonta notată cu F (Fc 12) care a suferit tratamentul de maleabilizare.

CONCLUZII

a) Studiul de faţă are ca prim rezultat ridicarea curbelor caracteristice pentru o serie de metale sau aliaje de utilizare practică curentă:

— cupru 6 şi cupru E, n stare brut presată şi ecruisată;

— alamă ordinară AM 58 şi alame speciale AmX_1, AmX_2, AmX_3, AmX_4;

— fonte, corespunzînd, din punctul de vedere al rezistenţei, calităţilor Fc00, Fc 12, Fc 15, Fc 18, Fc 28, precum şi fonte speciale, cu rezistenţe pînă la 40 kg/mm².

b) Încercările s-au făcut cu tensometre cu oglinzi şi tensometre Huggenberger, cu precizie ce coboară sub 1μ.

c) În scopul verificării aplicabilităţii formulei clasice de încovoiere la materiale ce nu se supun legii proporţionalităţii şi stabilirii eventualelor corecturi necesare, s-au calculat momentele încovoietoare în funcţie de deformaţii, prin integrarea grafico-analitică şi analitică a curbelor caracteristice de tracţiune-compresiune. Calculele comparative efectuate au arătat că prin ambele metode se obţin rezultate practic identice, metoda analitică fiind mai convenabilă.

d) Constatările cercetărilor sînt:

α. Pentru cupru, erorile metodei clasice de calcul la încovoiere au fost cuprinse între $+ 4\%$ şi $- 6\%$, deci practic în limite ce pot fi uşor acoperite de fluctuaţiile rezistenţei admisibile.

β. La alamele ecruisate, nu este cazul de a se face corecţii, curbele caracteristice fiind rectilinii în domeniul de folosinţă.

γ. Pentru fontele de rezistenţă mică, formula clasică de calcul dă valori superioare celor reale, la tracţiune, cu 2 ... 5% în jurul a 400 kg/cm^2, crescînd pînă la 6 ... 20% pentru $\sigma = 1\,000$ kg/cm^2. Începînd cu fontele cu rezistenţa de la 30 kg/mm^2 în sus, valoarea corecţiei tinde către zero, atingînd, pentru materialul *N*, circa 3% chiar la eforturi unitare de 1 000 kg/cm^2.

Fontele speciale, cu rezistenţa de 40 kg/mm^2, se supun integral calculului clasic.

e) Cercetările făcute îndreptăţesc concluzia că aplicarea relaţiilor obişnuite de calcul la încovoiere pentru cupru, alame şi fonte, în domeniul utilizării practice nu duce la erori care să depăşească variaţiile ce decurg din alegerea rezistenţelor admisibile. Fontele de înaltă rezistenţă se comportă, din acest punct de vedere, ca oţelurile.

Ar fi interesant a se efectua astfel de cercetări şi asupra aliajelor uşoare, respectiv materialelor de înlocuire, întrebuinţate în construcţia de maşini.

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ИЗГИБ ЧУГУННЫХ, МЕДНЫХ И ЛАТУННЫХ БРУСЬЕВ НА ОСНОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО ВЫВЕДЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Все более распространяющееся в машиностроении применение специальных чугунов выдвинуло вопрос о проверке классических расчетов сопротивления на изгиб этих материалов, принимая во внимание то обстоятельство, что они не имеют линейной характеристики в отношении упругости.

В настоящей работе указываются различные методы расчета сопротивления на изгиб материалов, не подчиняющихся закону Гука; далее этот вопрос рассматривается в отношении латуни, меди и чугунов с применением расчета по графически-аналитическому и аналитическому способам.

Работа состоит из следующих разделов:

1. Построение характеристических кривых на основании тензиометрических измерений некоторых материалов, обычно производимых отечественной промышленностью.

2. Расчет изгибающего момента графически-аналитическим и аналитическим способом на основании экспериментально выведенных характеристических кривых.

3. Сравнение значений изгибающего момента, выведенных путем применения классической формулы Навье, с значениями, вычисленными по вышеуказанным методам, и установление коэффициентов поправки, выведенной из этих вычислений.

MÉTHODES AMÉLIORÉES, BASÉES SUR LES COURBES CARACTÉRISTIQUES, LEVEÉS EXPÉRIMENTALEMENT, POUR LE CALCUL DE LA FLEXION DES BARRES DE FONTE, DE CUIVRE ET DE LAITON

(RÉSUMÉ)

L'utilisation des fontes spéciales à la construction des machines, sur une échelle de plus en plus large, a posé le problème de la vérification de l'exactitude du calcul classique de la flexion appliqué à ces matériaux, en tenant compte du fait que ceux-ci n'ont pas une caractéristique linéaire dans le domaine élastique.

On expose, dans la présente étude, différentes méthodes pour le calcul de la résistance à la flexion des matériaux qui n'obéissent pas à la loi de Hooke; on traite ensuite le problème, en ce qui concerne le laiton, le cuivre et la fonte, par la méthode graphique-analytique et la méthode analytique.

L'étude comporte les chapitres suivants:

1. Levé des courbes caractéristiques, par des mesurages tensométriques, de quelques matériaux fabriqués couramment dans l'industrie de la République Populaire Roumaine.

2. Calcul du moment de flexion, par la méthode graphique-analytique et la méthode analytique, à partir des courbes caractéristiques levées expérimentalement.

3. Comparaison des valeurs du moment de flexion, résultant de l'application de la formule classique de Navier, avec celles qui ont été calculées par les méthodes indiquées auparavant et établissement des coefficients de correction qui résultent de ces calculs.

BIBLIOGRAFIE

1. S. V. Serensen, L. A. Kozlov i V. P. Kagaev, Vestnik Maşinostroenia, 1951, nr. 9, p. 20—40.
2. N. A. Saposnikov, *Mehaniceskie ispitania metalov*. Moscova, 1951.
3. E. Siebel, *Handbuch der Werkstoffprüfung*. Julius Springer, Berlin, 1940,
4. S. P. Timoşenko, *Résistance des matériaux*. Paris, 1949, partea a II-a.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3–4, 1954

REZISTENŢA MATERIALELOR

CAZURILE PARTICULARE ALE UNEI CLASE DE FUNCŢII CU APLICAŢII LA FLAMBAJUL TIJELOR

DE

N. S. PÎRVULESCU

Ne referim la funcţiile $\Xi_j^{(i)}(x)$ folosite [1] la studiul flambajului tijelor grele şi care sînt date de expresia

$$\Xi_j^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} [-\alpha(x)]^{k-u} \frac{N_j^{k,k-u}}{(j+2k+u-i)!} \tag{1}$$

în care

$$\alpha(x) = h/x \quad \text{şi} \quad z(x) = x^3/A, \tag{2}$$

iar numărul $N_j^{k,k-u}$ este dat de formula de recurenţă

$$N_j^{k,k-u} = N_j^{k-1,k-u+1} + (j+2k+u-3)\, N_j^{k-1,k-u} \tag{3}$$

valabilă pentru $1 \leqslant u \leqslant k$; i, j, k şi u fiind numere întregi.

Pentru $u = 0$ $\qquad N_j^{k,k} = 1$

Pentru $u = k$ $\qquad N_j^{k,k-u} = [j+3(k-1)]!!! \tag{4}$

Pentru $u > k$ $\qquad N_j^{k,k-u} = 0$

I. CAZURILE PARTICULARE ALE FUNCŢIILOR $\Xi_j(x)$

După cum dăm lui $\alpha(x)$ valorile ∞ şi 1, deosebim următoarele cazuri:

A. *Cazuri extreme* pentru $\alpha(x) \to \infty$, pe care le notăm pentru simplificare cu $\Xi_j^{(i)}(x)_\infty$ în loc de $\left[\Xi_j^{(i)}(x)\right]_{\alpha(x)=\infty}$.

B. *Cazuri particulare* pentru $\alpha(x) = 1$, pe care le notăm cu $\Xi_j^{(i)}(x)_1$

A. Cazurile extreme

În aceste cazuri luăm în considerare termenii cu $\alpha(x)$ în gradul cel mai înalt, adică numai termenii cu $u = 0$ şi, ţinînd seama de (4), relaţia (1) devine

$$\Xi_j^{(i)}(x)_\infty = \frac{1}{(j-i)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[-\alpha(x)\, z(x)]^k}{(j+2k-i)!} \tag{5}$$

1. Dezvoltarea seriilor

Dezvoltăm seria (5) pentru $i = j$.

$$\Xi_j^{(j)}(x)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\alpha(x)\, z(x)]^k}{(2k)!} = \frac{1}{0!} - \frac{\alpha(x)\, z(x)}{2!} + \frac{\alpha^2(x)\, z^2(x)}{4!} - \dots \qquad (6)$$

Seria obţinută exprimă cosinusul trigonometric şi prin urmare, avînd în vedere relaţiile (2), rezultă

$$\Xi_j^{(j)}(x)_\infty = \cos\sqrt{\alpha(x)\, z(x)} = \cos\left(x\sqrt{h/A}\right). \qquad (7)$$

Procedînd în mod analog pentru $i > j$ şi pentru $i < j$, se obţin rezultatele consemnate în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Relaţiile dintre funcţiile $\Xi_j^{(i)}(x)$ şi funcţiile trigonometrice

$$\Xi_j^{(j)}(x)_\infty = \cos\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}$$

$$\Xi_j^{(j+1)}(x)_\infty = -\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}\,\sin\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}$$

$$\Xi_j^{(j+2)}(x)_\infty = -\alpha(x)\, z(x)\cos\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}$$

$$\vdots$$

$$\Xi_j^{(j-1)}(x)_\infty = \frac{\sin\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}}{\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}}$$

$$\Xi_j^{(j-2)}(x)_\infty = \frac{1-\cos\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}}{\alpha(x)\, z(x)}$$

$$\Xi_j^{(j-3)}(x)_\infty = \frac{1}{\alpha(x)\, z(x)} - \frac{\sin\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}}{[\alpha(x)\, z(x)]^{3/2}}$$

$$\Xi_j^{(j-4)}(x)_\infty = \frac{1}{2\alpha(x)\, z(x)} - \frac{1-\cos\sqrt{\alpha(x)\, z(x)}}{\alpha^2(x)\, z^2(x)}$$

$$\vdots$$

Din examinarea tabloului nr. 1 se constată că *în cazurile extreme, adică pentru* $\alpha(x) \to \infty$ *funcţiile* $\Xi_j^{(i)}(x)$ *devin funcţii trigonometrice.*

2. Verificarea rezultatelor

Am însemnat [1]

$$\varphi_j^{(i)}(x) = x^{j-i}\,\Xi_j^{(i)}(x) \qquad (8)$$

în care, pentru funcţiile $\varphi_j^{(i)}(x)$ — spre deosebire de $\Xi_j^{(i)}(x)$ —, i din paranteză reprezintă ordinul de derivare al funcţiei.

Păstrînd notaţia pentru $x \to \infty$ obţinem

$$\varphi_j^{(i)}(x)_\infty = x^{j-i}\,\Xi_j^{(i)}(x)_\infty \qquad (9)$$

a) Pentru $i = j$ şi ţinînd seama de relaţia (7)

$$\varphi_j^{(j)}(x)_\infty = \cos\left(x\sqrt{h/A}\right) \qquad (10)$$

Verificarea relațiilor din tabloul nr. 1 se poate face în felul următor:

b) Pentru $i > j$, derivînd relația (10) și ținînd seama de relația (9), obținem

$$\varphi_j^{(j+1)}(x)_\infty = x^{-1}\,\Xi_j^{(j+1)}(x)_\infty = -\sqrt{h/A}\,\sin\left(x\sqrt{h/A}\right),$$

de unde se vede că

$$\Xi_j^{(j+1)}(x)_\infty = -\,x\sqrt{h/A}\,\sin\left(x\sqrt{h/A}\right) \tag{11}$$

și tot astfel

$$\Xi_j^{(j+2)}(x)_\infty = -\,x^2\frac{h}{A}\cos\left(x\sqrt{h/A}\right). \tag{12}$$

c) Pentru $i < j$, procedăm prin integrare

$$\varphi_j^{(j)}(x)_\infty = \frac{d\varphi_j^{(j-1)}}{dx} = \cos\left(x\sqrt{h/A}\right)$$

$$\varphi_j^{(j-1)}(x)_\infty = \int \cos\left(x\sqrt{h/A}\right)dx + C = \frac{\sin\left(x\sqrt{h/A}\right)}{\sqrt{h/A}} + C,$$

însă relația (9) devine

$$\varphi_j^{(j-1)}(x)_\infty = x\,\Xi_j^{j-1}(x)_\infty,$$

și prin urmare

$$\Xi_j^{(j-1)}(x)_\infty = \frac{\sin\left(x\sqrt{h/A}\right) + C_1}{x\sqrt{h/A}}.$$

Pentru $x = 0$, conform relației (5), avem $\Xi_j^{(j-1)}(0)_\infty = 1$. Deoarece numitorul se anulează, și pentru ca raportul să fie finit, trebuie să avem nedeterminare, adică și numărătorul să fie nul; deci $C_1 = 0$, prin urmare și relația precedentă devine

$$\Xi_j^{(j-1)}(x)_\infty = \frac{\sin x\sqrt{h/A}}{x\sqrt{h/A}}. \tag{13}$$

În mod analog se obține

$$\Xi_j^{(j-2)}(x)_\infty = \frac{1-\cos\left(x\sqrt{h/A}\right)}{x^2h/A} \tag{14}$$

$$\Xi_j^{(j-3)}(x)_\infty = \frac{1}{x^2h/A} - \frac{\sin\left(x\sqrt{h/A}\right)}{\left(x\sqrt{h/A}\right)^3} \tag{15}$$

$$\Xi_j^{(j-4)}(x)_\infty = \frac{1}{x^2h/A}\left[\frac{1}{2} - \frac{1-\cos\left(x\sqrt{h/A}\right)}{x^2h/A}\right]. \tag{16}$$

Ținînd seama de relația (9) se vede că relațiile (11), (12), (13), (14), (15) și (16) verifică tabloul nr. 1.

B. Cazurile particulare

1. Funcţiile $\Xi_j^{(i)}(x)_1$

Dacă în formula (1) facem înlocuirea $\alpha(x) = 1$, dezvoltăm în serie şi înlocuim numerele $N_j^{k,k-u}$ cu valorile lor calculate [1] se obţine

$$\Xi_j^{(i)}(x)_1 = \frac{1}{(j-i)!} - z(x)\frac{3-i}{(j+3-i)!} + z^2(x)\frac{(3-i)(2\cdot 3-i)}{(j+2\cdot 3-i)!} - \\ - z^3(x)\frac{(3-i)(2\cdot 3-i)(3\cdot 3-i)}{(j+3\cdot 3-i)!} + \ldots, \tag{17}$$

care poate fi scrisă sub următoarea formă concentrată

$$\Xi_i^{(i)}(x)_1 = \frac{1}{(j-i)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{u=1}^{k-1}(3-i+3u)}{(j+3k-i)!} \tag{18}$$

Mărginindu-ne la funcţii ce au aplicaţii la flambajul tijelor, relaţia (17) poate fi scrisă ca următoarele expresii

$$\Xi_1^{(1)}(x)_1 = 1 - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]\frac{3}{2^2\cdot 1\cdot 1} + \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^2\frac{3^2}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 4} - \\ - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^3\frac{3^3}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 4\cdot 7} + \ldots \tag{19}$$

$$\Xi_1^{(2)}(x)_1 = -\frac{z(x)}{}\left\{1 - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]\frac{3}{2^2\cdot 1\cdot 5} + \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^2\frac{3^2}{2^2\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 8} - \right. \\ \left. - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^3\frac{3^3}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 11} + \ldots \right. \tag{20}$$

$$\Xi_2^{(1)}(x)_1 = 1 - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]\frac{3}{2^2\cdot 1\cdot 4} + \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^2\frac{3^2}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot 7} - \\ - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^3\frac{3^3}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \ldots \tag{21}$$

$$\Xi_2^{(1)}(x)_1 = 1 - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]\frac{3}{2^2\cdot 1\cdot 2} + \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^2\frac{3^2}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 5} - \\ - \left[z(x)\frac{4}{9}\right]^3\frac{3^3}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 8} + \ldots \tag{22}$$

Observăm că forma sub care sînt prezentate funcţiile $\Xi_j^{(i)}(x)_1$ în relaţiile (19) — (22) este obişnuită unor anumite funcţii Bessel.

2. Funcțiile Bessel $J_m(Z)$

Funcțiile Bessel de argument Z și ordinul m notate cu simbolul $J_m(Z)$ sînt date [2] de expresia

$$J_m(Z) = \frac{Z^m}{2^m m!}\left[1 - \frac{Z^2}{2^2 \cdot 1\,(m+1)} + \frac{Z^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2\,(m+1)\,(m+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{Z^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\,(m+1\,(m+2)\,(m+3)} + \ldots\right] \tag{23}$$

Dînd lui m succesiv valorile $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, se obține

$$\left(-\frac{2}{3}\right)! J_{-\frac{2}{3}}(Z) = \left(\frac{Z}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{3Z^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 1} + \frac{3^2 Z^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4} - \right.$$
$$\left. - \frac{3^3 Z^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7} + \ldots\right] \tag{24}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)! J_{\frac{2}{3}}(Z) = \left(\frac{Z}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{3Z^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 5} + \frac{3^2 Z^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8} - \right.$$
$$\left. - \frac{3^3 Z^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} + \ldots\right] \tag{25}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)! J_{\frac{1}{3}}(Z) = \left(\frac{Z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1 - \frac{3Z^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 4} + \frac{3^2 Z^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7} - \right.$$
$$\left. - \frac{3^3 Z^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \ldots\right] \tag{26}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)! J_{-\frac{1}{3}}(Z) = \left(\frac{Z}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[1 - \frac{3Z^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{3^2 Z^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} - \right.$$
$$\left. - \frac{3^3 Z^6}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8} + \ldots\right] \tag{27}$$

3. Relațiile dintre funcțiile $\Xi_j^{(i)}(x)_1$ și $J_m(Z_1)$

Dacă facem înlocuirea

$$Z = Z_1 = \frac{2}{3}\sqrt{z(x)} \tag{28}$$

în relaţiile (24), (25), (26) şi (27) şi le comparăm respectiv cu relaţiile (19), (20), (21) şi (22), obţinem

$$\Xi_1^{(1)}(x)_1=\left(-\frac{2}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}z^{\frac{1}{2}}(x)\right]^{\frac{2}{3}}J_{-\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{1}{2}}(x)\right], \tag{29}$$

$$\Xi_1^{(2)}(x)_1=\left(\frac{2}{3}\right)!\,\frac{z(x)}{2}\left[\frac{1}{3}z^{\frac{1}{2}}(x)\right]^{-\frac{2}{3}}J_{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{1}{2}}(x)\right], \tag{30}$$

$$\Xi_2^{(1)}(x)_1=\left(\frac{1}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}z^{\frac{1}{2}}(x)\right]^{-\frac{1}{3}}J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{1}{2}}(x)\right] \tag{31}$$

$$\Xi_2^{(2)}(x)_1=\left(-\frac{1}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}z^{\frac{1}{2}}(x)\right]^{\frac{1}{3}}J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{1}{3}}(x)\right]. \tag{32}$$

Observăm că *în cazurile particulare pentru* $\alpha(x)=1$ *funcţiile* $\Xi_j^{(6)}(x)$ *studiate mai sus devin funcţii Bessel* $J_{\pm\frac{1}{3}}(Z_1)$ *şi* $J_{\pm\frac{2}{3}}(Z_1)$.

II. INTEGRAREA ECUAŢIEI LINIEI ELASTICE

A. Integrarea cu ajutorul funcţiilor $\Xi_j(x)$

Am arătat [1] că integrala ecuaţiei fibrei medii deformate (linia elastică)

$$A\frac{d^3y}{dx^3}=(x-h)\frac{dy}{dx}+C \tag{33}$$

este

$$y=a_0+a_1\varphi_1(x)+2a_2\varphi_2(x)+\frac{C}{A}\varphi_3(x) \tag{34}$$

şi ţinînd seama de relaţia (8), se poate scrie sub forma

$$y=a_0+a_1x\,\Xi_1(x)+2a_2x^2\,\Xi_2(x)+\frac{C}{A}x^3\,\Xi_3(x) \tag{35}$$

Cazul extrem

Pentru $h/x\to\infty$ ecuaţia (33) devine

$$A\frac{d^3y}{dx^3}+h\frac{dy}{dx}=C, \tag{36}$$

iar relaţia (35) devine

$$y_\infty=a_0+a_1x\,\Xi_1(x)_\infty+2a_2x^2\,\Xi_2(x)_\infty+\frac{C}{A}x^3\,\Xi_3(x)_\infty. \tag{37}$$

Făcînd înlocuirile din tabloul nr. 1, ținînd seama de relațiile (2) și că $x/h \to 0$, relația (37) devine

$$y_\infty = b_0 + b_1 \sin \beta x + b_2 \cos \beta x \tag{38}$$

în care

$$\beta^2 = h/A. \tag{39}$$

Am obținut astfel cunoscuta soluție (38) a ecuației (36), care are coeficienți constanți, ceea ce constituie o verificare.

B. Integrarea cu ajutorul funcțiilor $J_m(Z)$

În ecuația (33) să facem schimbarea de variabilă

$$(h - x)/A^{1/3} = \left(\frac{3}{2} Z_2\right)^{2/3}. \tag{40}$$

Diferențiind relația (40) și înlocuind în expresiile derivatelor succesive ale lui y în raport cu x, se obține

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{dy}{dx}\left(\frac{3 Z_2}{2A}\right)^{1/3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{3}{2A}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3} Z_2^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dZ_2} + Z_2^{\frac{2}{3}} \frac{d^2y}{dZ_2^2}\right) \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{3}{2A}\left(\frac{1}{9} Z_2^{-1} \frac{dy}{dZ_2} - \frac{d^2y}{dZ_2^2} - Z_2 \frac{d^3y}{dZ_2^3}\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Înlocuind aceste expresii în relația (33) se obține

$$Z_2 \frac{d^3y}{dZ_2^3} + \frac{d^2y}{dZ_2^2} + \left(Z_2 - \frac{1}{9Z_2}\right)\frac{dy}{dZ_2} = \frac{2}{3} C.$$

Dacă mai facem și transformarea

$$dy/dZ_2 = U, \tag{42}$$

se obține

$$\frac{d^2U}{dZ_2^2} + \frac{1}{Z_2}\frac{dU}{dZ_2} + \left(1 - \frac{1}{9Z_2^2}\right) U = \frac{2C}{3Z_2}. \tag{43}$$

Pentru $C = 0$ relația precedentă devine

$$\frac{d^2U}{dZ_2^2} + \frac{1}{Z_2}\frac{dU}{dZ_2} + \left(1 - \frac{1}{9Z_2^2}\right) U = 0. \tag{44}$$

Soluția acestei ecuații se obține cu ajutorul funcțiilor Bessel. Această cale a fost folosită de A. G. Greenhill [3] în rezolvarea flambajului tijelor sub greutate proprie în cazuri particulare.

Integrala ecuației (44) și derivatele sale de ordinul i sînt

$$U^{(i)} = K_1 2^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)! \; J^{(i)}_{-\frac{1}{3}}(Z_2) + K_2 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)! \; J^{(i)}_{\frac{1}{3}}(Z_2). \tag{45}$$

III. CONDIȚIA DE INSTABILITATE

A. Prin funcții $\Xi_j(x)$

Condiția generalizată de instabilitate, obținută anterior [4], este dată de următoarea relație

$$\Xi_j^{(i)}(L)\,\Xi_{j'}^{(i')}(L) - \Xi_j^{(i')}(L)\,\Xi_{j'}^{(i)}(L) = 0 \tag{46}$$

Condițiile de rezemare a capetelor tijei, exprimate cu notația simbolică respectivă $C_{j,j'}^{i,i'}$ sînt redate în tabloul nr. 2 în care:

$j = 1$ pentru articulație la capătul de jos
$j = 2$ pentru încastrare la capătul de jos
$j' = 3$ în toate cazurile
$i = 1$ pentru încastrare la capătul de sus
$i = 2$ pentru articulație la capătul de sus
$i' = 0$ fără deplasare laterală
$i' = 3$ cu deplasare laterală normală a capătului de sus.

În cazurile în care unul din capete este liber să se deplaseze orizontal, notate C_j^i, condiția (46) capătă [5] expresia simplificată

$$\Xi_j^{(i)}(L) = 0. \tag{47}$$

Tabloul nr. 2

Notația referitoare la condițiile de rezemare a capetelor tijelor

Notația			Condițiile de rezemare a capetelor tijei
Fără deplasare laterală	Cu deplasare *)		
	normală	orizontală	
$C_{1,3}^{1,0}$	$C_{1,3}^{1,3}$	C_1^1	Articulație jos — încastrare sus
$C_{1,3}^{2,0}$	$C_{1,3}^{2,3}$	C_1^2	Ambele capete articulate
$C_{2,3}^{1,0}$	$C_{2,3}^{1,3}$	C_2^1	Ambele capete încastrate
$C_{2,3}^{2,0}$	$C_{2,3}^{2,3}$	C_2^2	Încastrare jos — articulație sus

*) Deplasarea se referă la capătul de sus.

B. Prin funcții $J_m(Z_2)$

În cazurile pentru care unul din capete este liber să se deplaseze orizontal ($C = 0$) condiția de flambaj se determină folosind relația (45)

Grupul cazurilor cu articulație la capătul de jos C_1^i

Pentru $x = 0$ avem $d^2y/dx^2 = 0$.
Avînd în vedere relația (40) și (42) se obține

$$\left[\frac{1}{3} Z_2^{-\frac{1}{3}} U + Z_2^{\frac{2}{3}} \frac{dU}{dZ_2}\right]_{x=0} = 0. \tag{48}$$

Cazul capătului de sus articulat C_1^2. Pentru $x = L$ avem $d^2y/dx^2 = 0$ și deci

$$\left[\frac{1}{3}Z_2^{-\frac{1}{3}}U + Z_2^{\frac{2}{3}}\frac{dU}{dZ_2}\right]_{x=L} = 0. \tag{49}$$

Înlocuind relația (45) în (48) și (49) se obține un sistem de două ecuații omogene; iar condiția de instabilitate se obține prin anularea determinantului Δ al acestui sistem.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}Z_2^{-\frac{1}{3}}J_{-\frac{1}{3}}(Z_2) + Z_2^{\frac{2}{3}}J^{(1)}_{-\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} \\ \left(\frac{1}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}Z_2^{-\frac{1}{3}}J_{\frac{1}{3}}(Z_2) + Z_2^{\frac{2}{3}}J^{(1)}_{\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}Z_2^{-\frac{1}{3}}J_{-\frac{1}{3}}(Z_2) + Z_2^{\frac{2}{3}}J^{(1)}_{-\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} \\ \left(\frac{1}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}Z_2^{-\frac{1}{3}}J_{\frac{1}{3}}(Z_2) + Z_2^{\frac{2}{3}}J^{(1)}_{\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} \end{vmatrix} \tag{50}$$

Derivînd expresiile (26) și (27) și făcînd înlocuirile se obține

$$\left(\frac{1}{3}\right)!\left[-\frac{1}{3}Z_2^{-\frac{1}{3}}J_{\frac{1}{3}}(Z_2) + Z_2^{\frac{2}{3}}J^{(1)}_{\frac{1}{3}}(Z_2)\right] = \frac{1}{3}Z_2^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)!\ J_{-\frac{2}{3}}(Z_2) \tag{51}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)!\left[\frac{1}{3}Z_2^{-\frac{1}{3}}J_{-\frac{1}{3}}(Z_2) + Z_2^{\frac{2}{3}}J^{(1)}_{-\frac{1}{3}}(Z_2)\right] = -\frac{3}{2}Z_2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)!\ J_{\frac{2}{3}}(Z_2), \tag{52}$$

iar condiția de instabilitate devine

$$\begin{vmatrix} \left[\left(\frac{2}{3}\right)!\ J_{\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} & \left[\left(-\frac{2}{3}\right)!\ J_{-\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} \\ \left[\left(\frac{2}{3}\right)!\ J_{\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} & \left[\left(-\frac{2}{3}\right)!\ J_{-\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} \end{vmatrix} = 0. \tag{53}$$

Cazul capătului de sus încastrat C_1^1. Pentru $x = L$ avem $dy/dx = 0$ și dacă $Z_2 \neq 0$, ținînd seama de relațiile (41), relația (42) devine

$$U_{x=L} = 0. \tag{54}$$

Procedînd în mod analog ca și în cazul precedent, condiția de instabilitate devine

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)!\ J_{\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} & \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)!\ J_{-\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} \\ \left[\left(-\frac{1}{3}\right)!\ J_{-\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} & \left[\left(\frac{1}{3}\right)!\ J_{\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} \end{vmatrix} = 0. \tag{55}$$

Grupul cazurilor cu încastrare la capătul de jos C_2^i

Procedînd în mod analog ca şi la grupul precedent, se obţin condiţiile de instabilitate:

Cazul capătului de sus încastrat C_2^1.

$$\begin{vmatrix} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)! \, J_{-\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} & \left[\left(\frac{1}{3}\right)! \, J_{\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} \\ \left[\left(-\frac{1}{3}\right)! \, J_{-\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} & \left[\left(\frac{1}{3}\right)! \, J_{\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} \end{vmatrix} = 0. \tag{56}$$

Cazul capătului de sus articulat C_2^2.

$$\begin{vmatrix} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)! \, J_{-\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} & \left[\left(\frac{1}{3}\right)! \, J_{\frac{1}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} \\ -\frac{3}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)! \, J_{\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} & -\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)! \, J_{-\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=L} \end{vmatrix} = 0. \tag{57}$$

IV. CAZURILE PARTICULARE DE FLAMBAJ

A. Tije cu greutatea neglijabilă

În aceste cazuri h/L ca şi h/x tind către infinit, L fiind lungimea barei şi h lungimea comprimată. Aceasta înseamnă că folosind condiţia de instabilitate (46) putem înlocui expresiile $\Xi_j^{(i)}(L)$ prin $\Xi_j^{(i)}(L)_\infty$, adică valorile extreme ale funcţiilor $\Xi_j^{(i)}(x)$ studiate şi în care se dă variabilei x valoarea L.

Se vor considera condiţiile de rezemare corespunzătoare fiecărui caz.

Cazul articulaţiei jos, încastrare sus şi fără deplasare laterală $C_{1,3}^{1,0}$. În acest caz condiţia (46) devine

$$\Xi_1(L)_\infty \Xi_3^{(1)}(L)_\infty - \Xi_1^{(1)}(L)_\infty \Xi_3(L)_\infty = 0. \tag{58}$$

Ţinînd seama de tabloul nr. 1, relaţia precedentă devine

$$\operatorname{tg} \sqrt{\alpha(L) z(L)} = \sqrt{\alpha(L) z(L)} \approx 4{,}5 \approx \pi \sqrt{2}. \tag{59}$$

Avînd în vedere relaţiile (2) în care

$$A = E I/q \tag{60}$$

unde s-a notat cu $E I$ rigiditatea tijei şi cu q greutatea tijei pe unitatea de lungime, avem

$$\alpha(L) z(L) = qhL^2/EI \tag{61}$$

şi relaţia (59) devine

$$qhL^2 = 2\pi EI. \tag{62}$$

Dacă notăm

$$N_0 = qh \tag{63}$$

în care N_0 este sarcina de flambaj a tijei, relația (62) capătă forma cunoscută a formulei lui Euler în condițiile corespunzătoare

$$N_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2/2}. \tag{64}$$

Procedînd în mod analog și pentru celelalte cazuri, se obțin formulele redate în tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

Cazurile de flambaj în care se neglijează greutatea proprie

Notația cazurilor	Formula de flambaj
$C^{1,0}_{1,2\infty}$	$N_0 = \frac{K^2 \pi^2 EI}{(L/2)^2}$
$C^{1,0}_{1,3\infty} = C^{2,3}_{1,3\infty} = C^{2,0}_{2,3\infty}$	$N_0 = \frac{K^2 \pi^2 EI}{(L\sqrt{2})^2}$
$C^{2,0}_{1,3\infty} = C^{2}_{1\infty} = C^{1,3}_{2,3\infty} \equiv C^{1}_{2\infty}$	$N_0 = \frac{K^2 \pi^2 EI}{L^2}$
$C^{1,3}_{1,3\infty} \equiv C^{1}_{1\infty} = C^{2}_{2\infty}$	$N_0 = \frac{(2K-1)^2 \pi^2 EI}{(2L)^2}$

Observații. Cazul $C^{1,3}_{1,3\infty}$ este identic cu $C^{1}_{1\infty}$, deoarece capătul de sus fiind încastrat, deplasarea laterală a acestuia este totodată normală pe tijă și orizontală, secțiunea normală care cuprinde forța tăietoare este orizontală. Același lucru se poate spune despre identitatea cazurilor $C^{1,3}_{2,3\infty}$ cu $C^{1}_{2\infty}$.

Examinînd tabloul nr. 3 constatăm că *toate cazurile extreme se reduc la cele patru formule cunoscute ale celor patru cazuri clasice.*

B. Cazurile în care întreaga greutate a tijei este suportată de capătul inferior

În aceste cazuri $h/L = 1$, ceea ce înseamnă că folosind condiția de instabilitate $\Delta = 0$, și funcțiile $\Xi_j(x)$ putem face înlocuirea $h = L$ în relația generalizată (46) a instabilității.

În cazurile și mai particulare, în care unul din capete este liber să se deplaseze orizontal, adică $C = 0$ în ecuația (32) a liniei elastice, ne referim la expresia simplificată (47), dacă folosim funcțiile $\Xi_j(x)$ și la expresiile (53), (55), (56), (57) după condițiile de rezemare a capetelor, dacă ne servim de funcțiile $J_m(Z_2)$.

Dacă $h = L$, în expresiile în care s-a dat lui x valoarea L înseamnă că $x = h$ și conform relației (40) avem $(Z_2) \overrightarrow{x=h} 0$; ceea ce simplifică expresiile (24), (25), (26), (27) ale funcțiilor $J_m(Z)$, care intră în condițiile de instabilitate, prin neglijarea termenilor în Z^2 și următorii.

Prin urmare, relaţiile (24), (25), (26), (27) devin

$$\left(\frac{1}{3}\right)! J_{\frac{1}{3}}(Z_2)_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} Z_2^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)! J_{-\frac{1}{3}}(Z_2)_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} Z_2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)! J_{-\frac{2}{3}}(Z_2)_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} Z_2^{-\frac{2}{3}}, \tag{65}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)! J_{\frac{2}{3}}(Z_2)_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} Z_2^{\frac{2}{3}},$$

iar expresiile

$$\left(\frac{1}{3}\right)! J_{\frac{1}{3}}(Z_2)_1 \to 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)! J_{\frac{2}{3}}(Z_2)_1 \to 0 \tag{66}$$

şi făcînd înlocuirile, condiţiile de instabilitate devin după cum urmează.

Ambele capete articulate C_1^2. În acest caz condiţia (53) devine

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)! J_{\frac{2}{3}}(Z_2)\right]_{x=0} = 0 \tag{67}$$

în care Z_2 este dat de relaţia (40), care pentru $x = 0$ devine

$$Z_2 = \frac{2}{3}(h^3/A)^{\frac{1}{2}} \tag{68}$$

şi care — ţinînd seama de relaţia (2) în care x se înlocuieşte cu h — se poate pune sub forma

$$Z_2 = \frac{2}{3} Z^{\frac{1}{2}}(h). \tag{69}$$

Condiţia de instabilitate (67) devine

$$\left(\frac{2}{3}\right)! J_{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} Z^{\frac{1}{2}}(h)\right] = 0 \tag{70}$$

şi ţinînd seama de relaţia (30), în care facem $x = h = L$ rezultă

$$\Xi_1^{(2)}(L_1) = 0 \tag{71}$$

adică tocmai condiţia (47) de instabilitate, ceea ce constituie verificarea.

Procedînd în mod analog și în celelalte cazuri, se obțin după cum urmează:

Articulație jos, articulație sus C_1^1. Condiția de instabilitate (55) devine

$$\left(-\frac{2}{3}\right)! J_{-\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} z^{\frac{1}{2}}(h)\right] = 0 \tag{72}$$

și avînd în vedere relația (28)

$$\Xi_1^{(1)}(L)_1 = 0. \tag{73}$$

Ambele capete încastrate C_2^1. Condiția de instabilitate (56) devine

$$\left(\frac{1}{3}\right)! J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} z^{\frac{1}{2}}(h)\right] = 0 \tag{74}$$

și avînd în vedere relația (31)

$$\Xi_2^{(1)}(L)_1 = 0. \tag{75}$$

Încastrare jos, articulație sus C_2^2. Condiția de instabilitate (57) devine

$$\left(-\frac{1}{3}\right)! J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} z^{\frac{1}{2}}(h)\right] \tag{76}$$

și ținînd seama de relația (32)

$$\Xi_2^{(2)}(L)_1 = 0. \tag{77}$$

Deci relațiile (72), (74), (76), ca și (70) *care exprimă condiția de instabilitate prin funcții Bessel, verifică condiția* (47) *exprimată prin funcții* $\Xi_j^{(i)}(x)$.

CONCLUZII

Funcțiile $\Xi_j^{(i)}(x)$ definite de relația (1), pe care le-am folosit [1] pentru integrarea ecuației liniei elastice (33), în cazurile extreme (pentru $\alpha(x) \to \infty$) degenerează în funcții trigonometrice (tabloul nr. 1); iar în cazurile particulare (pentru $\alpha(x) = 1$) devin funcții Bessel $J_m(Z_1)$ [relațiile (29), (30), (31), (32)] de argument

$$Z_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3/A} \tag{78}$$

și de ordin fracționar ($\pm 1/3$; $\pm 2/3$) (punctul 3, B, cap. I).

Ecuația liniei elastice (33) în cazul extrem (pentru $h/x \to \infty$) devine cu coeficienți constanți relația (36); iar integrala ecuației (33), în acest caz, devine cunoscuta soluție (38) a ecuației (36), aceasta constituind o verificare.

Prin schimbări de variabile, ecuația (32) se poate pune sub forma (43), care pentru $C = 0$ se poate integra cu ajutorul funcțiilor Bessel $J_m(Z_2)$ căpătînd soluția (45). De data aceasta, funcțiile Bessel sînt de alt argument (40) și anume

$$Z_2 = \frac{2}{3}\sqrt{(h-x)^3/A}. \tag{79}$$

Soluţia ecuaţiei liniei elastice îşi găseşte aplicaţia la flambajul tijelor verticale.

Dacă folosim funcţiile $\Xi_j(x)$, condiţia de instabilitate (46) se obţine prin anularea unui determinant; soluţie ce se reduce pentru $C = 0$ (în cazul în care unul din capetele tijei are libertatea să se deplaseze în direcţie orizontală) la anularea funcţiei $\Xi_j^{(i)} L$ relaţia (47).

Dacă $C = 0$, putem folosi funcţiile $J_m(Z_2)$, care conduc la condiţiile date de anularea unui determinant şi exprimate prin relaţiile (53), (55), (56) şi (57). Dacă extindem particularizarea punînd condiţia $h = L$, cînd întreaga greutate a tijei este suportată de capătul inferior, condiţiile de mai sus se reduc la anularea funcţiilor $[J_m(z_2)]_{x=0}$, ceea ce conduce la condiţiile $\Xi_j^{(i)}(L)_{1=0}$.

Se verifică astfel, în aceste cazuri particulare $h = 1$, soluţia mai generală (47).

Din cele expuse mai sus rezultă că, folcsind funcţiile $\Xi_j^{(i)}(x)$ se obţin soluţiile pentru cazuri mai generale şi mai direct decît dacă folosim funcţiile $J_m(Z)$.

În cazurile extreme pentru $x/L \to \infty$, greutatea tijei devenind neglijabilă, condiţia de instabilitate (46), conform tabloului nr. 1, se exprimă în funcţii trigonometrice, ceea ce conduce la cunoscutele formule de flambaj redate în tabloul nr. 3.

În afară de verificările obţinute, studiul cazurilor extreme precizează condiţiile de rezemare ale capetelor pentru toate cazurile posibile, reducîndu-le la cele patru cazuri clasice.

Studiul cazurilor extreme ($h/L \to \infty$) a fost necesar ca şi al cazurilor asimptotice ($h/L \to 0$) [3], pentru a completa pe cele studiate [4] [3] în intervalul limitat de la $h/L = 2$ pînă la $h/L = 1/3 \ldots 1/5$, şi care poate fi lărgit oricît de mult în ambele sensuri către poziţia extremă şi către poziţia asimptotică. Din examinarea tabloului nr. 2 rezultă că pentru $h/L \to \infty$, unele cazuri tind să se confunde, astfel $C_{1,3}^{1,0} \to C_{1,3}^{2,3}$ şi $C_{1,3}^{2,0} \to C_1^2$.

Pe diagrama $IV_{1,3}^{i,i'}$ (fig. 6) [5] se observă că pentru $h/L = 2$ diferenţele în valoarea coeficientului de flambaj c devin neglijabile pentru cazurile mai sus menţionate.

Deşi în practică interesează lărgirea intervalului studiat către poziţia asimptotică, am arătat [5] că pentru $h/L < 1/3$ coeficientul de flambaj c se apropie repede către valoarea asimptotei. Forma curbelor c către poziţia extremă, interesează pentru clarificarea cazurilor diferite, după felul de rezemare al extremităţilor.

Examinarea poziţiilor: extreme ($h/L \to \infty$), particulare ($h/L = 1$) şi asimptotice ($h/L \to 0$), contribuie la clarificarea problemei şi verificarea soluţiilor.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КЛАССА ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор исследует функции $\Xi_j^{(i)}(x)$, определенные соотношениями (1)—(14) в случаях:

А. *Крайних*, при $\alpha(x) \to \infty$ с обозначением $\Xi_j^{(i)}(x)_\infty$.

Б. *Частных*, при $\alpha(x) = 1$ с обозначением $\Xi_j^{(i)}(x)_1$.

В крайнем положении функции $\Xi_j^{(i)}(x)$ переходят в тригонометрические функции (табл. 1), а при особом положении [$\alpha(x) = 1$] стано-

вятся функциями Бесселя $J_m(Z_1)$, данными соотношениями (29)—(32) с аргументом, представленным (78).

Путем разложения функции $\Xi_j^{(i)}(x)_\infty$, при $i=j$, получается ряд (6), представляющий тригонометрическую функцию (7). При $i \neq j$, поступают аналогично, путем разложения в ряды, или исходя из случая $i=j$, путем дифференцирования или интегрирования (I A. 2), что проверяет первый метод.

Исследованные функции [1], использованные при интегрировании уравнения упругой линии (33), в проблеме изгиба тяжелых стержней применяются и при крайнем положении (II A), причем получается известное решение (38) дифференциального уравнения с введением в него постоянных коэффициентов (36).

Для частных случаев $C=0$, где одна из опор может свободно перемещаться в горизонтальном направлении, представлено для сравнения при помощи бесселевых функций $J_m(Z_2)$ решение (45) уравнения (33), причем на этот раз с другим аргументом (79) (II B).

В разделе III условие неустойчивости (71) указано в общем случае функциями $\Xi_j(x)$ (A) и функциями $J_m(Z_2)$ в частном случае $C=0$ и для различных условий опирания концов (B).

В разделе IV указывается применение к изгибу стержней. В крайних случаях при $x/L \to \infty$, когда весом стержня можно уже пренебречь, условие неустойчивости (46), согласно таблице 1, выражается тригонометрической функцией, что приводит к известным формулам изгиба, приведенным в таблице 3 (A). При применении функции $(J_m Z_2)$, помимо приведения к частному случаю $C=0$, задается еще условие $h=L$, где вес стержня ложится на нижний край, что упрощает выражения условия неустойчивости при различных условиях опирания концов и таким образом проверяется общее условие (47) (B).

В заключение автор доказывает, что исследование особых положений способствует выяснению проблемы и проверке исследуемых решений [2], [3] в ограниченном интервале от $h/L=2$ до $h/L=$ $=1/3 \ldots 1/5$, который может быть увеличен в обоих направлениях к крайнему положению $h/L \to \infty$ и к асимптотическому положению $h/L \to 0$.

LES CAS PARTICULIERS D'UNE CLASSE DE FONCTIONS AVEC APPLICATIONS AU FLAMBAGE DES TIGES

(RÉSUMÉ)

L'Auteur étudie les fonctions $\Xi_j^{(i)}(x)$, définies par les relations (1) — (14), pour les cas:

A. *Extrêmes*, pour lesquels $\alpha(x) \to \infty$, notés par $\Xi_j^{(i)}(x)_\infty$.

B. *Particuliers*, pour lesquels $\alpha(x)=1$, notés par $\Xi_j^{(i)}(x)_1$.

Dans les cas extrêmes, les fonctions $\Xi_j^{(i)}(x)$ deviennent des fonctions trigonométriques (voir tableau n° 1), mais dans les cas particuliers $[\alpha(x)=1]$ elles deviennent des fonctions de Bessel $J_m(Z_1)$ exprimées par les relations (29)—(32), dont l'argument est défini par la relation (78).

(cc) Pour $i = j$ développant les fonctions $\Xi_j^{(0)}(x)_\infty$, on obtient la série (6) qui représente la fonction trigonométrique (7). Pour $i \neq j$, on procède de la même manière par développements en série ou bien, en partant du cas $i = j$, par calcul différentiel ou intégral (v. I, A, 2), ce qui vérifie la première méthode.

Les fonctions étudiées et utilisées [1] à l'intégration de l'équation de la ligne élastique (33) dans le problème du flambage des tiges lourdes, sont utilisées dans le cas extrême (v. II, A). On obtient la solution (38) de l'équation différentielle, devenue à coefficients constants (36).

Pour les cas particuliers $C = 0$, où l'un des appuis a la liberté de se déplacer dans le sens horizontal, on a retrouvé pour la comparaison la solution (45) de l'équation (33) à l'aide des fonctions de Bessel $J_m(Z_2)$, cette fois-ci à argument différent (79) (v. II, B).

Dans le IIIe chapitre, on démontre la condition de l'instabilité (71) par les fonctions $\Xi_j(x)$ (v. A) pour les cas particuliers $C = 0$ et pour différentes conditions d'appui (v. B).

Dans le IVe chapitre, on démontre l'application de cette étude au flambage des tiges. Pour les cas extrêmes, lorsque $x/L \to \infty$, le poids de la tige devenant négligeable, la condition de l'instabilité (46), conformément au tableau 1, est exprimée par des fonctions trigonométriques, ce qui conduit aux formules bien connues du flambage, formules figurant sur le tableau n° 3 (v. A). En utilisant les fonctions $J_m(Z_2)$ en dehors de la particularisation $C = 0$, on pose encore la condition $h=L$ où tout le poids de la tige porte sur l'extrémité inférieure, ce qui simplifie les expressions de la condition de l'instabilité pour différentes conditions d'appui et permet de vérifier ainsi la solution générale (47) (v. B).

En conclusion, on démontre que l'examen des cas particuliers contribue à l'élucidation du problème et à la vérification des solutions étudiées [2], [3] pour l'intervalle limité allant de $h/L = 2$ jusqu'à $h/L \simeq 1/3 \ldots 1/5$, qui peut être étendu, dans les deux sens, vers la position extrême $h/L \to \infty$ et vers la position asymptotique $h/L \to 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pîrvulescu, Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. III, nr. 1—2, 1952, p. 53.
2. G. N. Watson, *Teoria besselevih funkţii*, Izdatelstvo. Moscova, 1949, p. 25.
3. S. Timoshenko, *Théorie de la stabilité élastique*. Paris, 1947, p. 110.
4. N. S. Pîrvulescu, Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. III, nr. 3—4, 1952, p. 205.
5. N. S. Pîrvulescu, Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 55.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

REZISTENŢA MATERIALELOR

DESPRE UNELE ÎNCERCĂRI PENTRU STABILIREA INFLUENŢEI CRESTĂTURILOR ŞI A COROZIUNII ASUPRA REZISTENŢEI LA OBOSEALĂ A PRĂJINILOR DE FORAJ ECRUISATE

DE

M. GELLER

Problema ruperii prăjinilor de foraj, neputînd fi rezolvată cu ajutorul mijloacelor uzuale de cercetare — care constau în încercări de tracţiune şi de rezilienţă, precum şi în examenul structural macro- şi microscopic — atenţia a fost îndreptată în sensul studierii comportării la oboseală a materialului ecruisat. Această cercetare s-a dovedit a fi foarte extinsă. De aceea ea nu a putut fi rezolvată decît pe etape. În anul 1951 s-a studiat comportarea materialului ecruisat, prin încercări la oboseală cu epruvete netede şi uscate. În anul următor, studiul experimental s-a extins asupra efectului coroziunii asupra oboselii materialului ecruisat, iar în anul 1953 s-a studiat efectul separat şi simultan al crestăturilor şi al coroziunii asupra aceluiaşi material.

Influenţa reductoare de rezistenţă a coroziunii a fost demonstrată într-o lucrare precedentă. S-a constatat atunci, că avantajul care reieşea din sporirea rezistenţei statice prin ecruisaj — şi care consta totodată şi în ridicarea rezistenţei la oboseală în stare uscată — dispărea complet atunci cînd solicitarea se efectua cu coroziune.

Cît priveşte efectul crestăturilor, este cunoscut — într-o formă generală — că acestea reduc sensibil rezistenţa la oboseală. Cauza acestei reduceri constă în concentrarea eforturilor în fundul crestăturilor. Pentru forme regulate de crestături s-au stabilit formule ce exprimă intensitatea acestei concentrări. De exemplu, în cazul unei găuri de formă eliptică într-o bară supusă tracţiunii (o astfel de gaură este considerată tot ca o crestătură) efortul maxim σ_m la capetele axei mari este $= \sigma_0 \, \mu$, unde σ_0 este efortul mediu de tracţiune (calculat pe baza secţiunii reduse prin gaură), iar $\mu = 1 + 2 \, a/b$, a şi b fiind semiaxele elipsei. Dacă elipsa este foarte turtită, de exemlu $a = 100 \, b$, se obţine $\sigma_m = 201 \, \sigma_0$. Această concentrare de efort este însă limitată la o porţiune extrem de îngustă la capetele elipsei. Imediat alături valoarea efortului de tracţiune scade brusc, reducîndu-se la o mărime sub limita elastică.

Această concentrare extraordinar de accentuată a eforturilor, limitată la porţiuni extrem de înguste, conduce la una din caracteristicile cele mai remarcabile

ale ruperilor de oboseală: ele se produc întotdeauna fără deformaţii (mai corect fără deformaţii vizibile sau măsurabile). Toate ruperile datorite oboselei sînt — în ultimă analiză — efectul unei crestături, fie de dimensiuni macroscopice (fisuri, cute, ştirbituri), fie microscopice (incluzii, sufluri, segregaţii intercristaline), fie chiar radioscopice (defectele reţelei cristaline). Este interesant de amintit, în legătură cu aceasta, că savantul ceh S m e k a l a explicat prin astfel de crestături cristaline exorbitanta disproporţie dintre rezistenţa cristalelor, dedusă din mărimea forţelor interatomice şi rezistenţa efectivă.

Sub efectul considerabilei concentrări de efort, se produce o ruptură minusculă, cîtă vreme porţiunea de material imediat vecină nu s-a deformat decît elastic. Aceste ruperi — spre a spune aşa: infinitesimale — nu produc decît alunecări de dimensiuni extrem de mici şi de fiecare dată cu o altă direcţie, după orientarea atomică a cristalelor supuse ruperii. Nu se poate deci produce fenomenul caracteristic al alungirii şi strictiunii, adică deformaţia uzuală, care îşi are originea în alunecări afectînd secţiunea întreagă a unei bare.

Ruperea rapidă ca urmare a crestăturilor era deci de aşteptat. Însă asupra mărimii vitezei de distrugere nu ne putem face o imagine clară, deoarece nu am întîlnit în literatură indicaţii privind materiale ecruisate şi încă mai puţin indicaţii referitoare la oţelul care ne interesează pe noi. Deci, dacă fenomenul se putea prevedea calitativ, cantitativ el era cu totul necunoscut.

Despre suprapunerea coroziunii cu efectul de crestătură se putea spune a priori, că va conduce la ruperi excepţional de rapide ale pieselor experimentale. Această aşteptare a fost pe deplin confirmată de încercări. Efectul suprapunerii a fost atît de puternic, încît însăşi metoda de experimentare a trebuit să fie modificată, precum va reieşi din cele ce urmează.

Încercările

Detaliile aparaturii sînt cunoscute din lucrările precedente [1], [2]. Epruvetele netede au fost de acelaşi tip ca cele din trecut. Cele cu crestătură s-au confecţionat în conformitate cu GOST 2860—45 şi anume cu diametrul 9,02 mm, avînd la mijloc un jghiab periferic de secţiune semicirculară, cu raza de 0,75 mm (fig. 1). În fundul jghiabului secţiunea era deci egală cu aceea a epruvetelor netede (diametrul 7,52 mm). Ca lichid corosiv s-a utilizat, ca şi în trecut, tot apa.

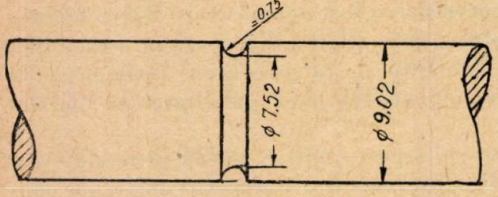


Fig. 1

Materialul experimental a fost preluat dintr-o prăjină de foraj 5 9/16″, cu $D = 141{,}3$ mm, $d = 120{,}2$ mm. Compoziţia chimică a oţelului a fost: C 0,30%, Mn 0,41%, Si 0,19%, S 0,038%, P 0,040%.

Din prăjina normalizată s-au tăiat fîşii pentru examinarea în această stare, iar alte două serii de fîşii au fost ecruisate prin tracţiune cu 6%, respectiv 8%. Fîşiile au fost apoi prelucrate, fie în tipul neted, fie în cel cu crestătură.

La proba de tracţiune s-au obţinut următoarele rezultate:

în starea normalizată	= 57,5 kg/mm²,	= 28,3%	= 60,5%
» ecruisată 6%	64,5	»	21,6%	53,6%
» ecruisată 8%	68,3	»	20,0%	52,0%

Încercările la oboseală au fost conduse pînă la realizarea unui număr de 2 500 000 cicluri de încărcare, ceea ce reprezintă o soluție aproape precisă pentru încercările în stare uscată și una acceptabilă pentru coroziunea simplă (a se vedea lucrarea [1]). Același procedeu s-a aplicat și la încercările cu epruvete crestate uscate, deoarece scopul principal era nu de a determina cifre pentru rezistența limită (care nici nu există în cazul coroziunilor și în acela al crestăturilor), ci de a obține cifre care să permită o comparație între trei stări diferite (normalizare, ecruisaj 6% și ecruisaj 8%).

Metoda a devenit însă inaplicabilă, atunci cînd s-a încercat suprapunerea coroziunii cu efectul de crestătură. În nici un caz nu a fost posibilă realizarea unui număr de 2 500 000 cicluri, oricît am fi redus valoarea sarcinii mobile P la mașina de încercări. Cu $P = 0$ epruveta este totuși supusă unui efort de 12,48 kg/mm², din cauza greutății moarte (rulmenți + capsule + tije). Or, sub acest efort, ruperea s-a produs mult înainte de a realiza 2 500 000 cicluri.

Metoda de încercare s-a modificat aici în sensul următor: mașina s-a încărcat uniform cu $P = 0{,}8$ kg (această mică greutate avea scopul de a evita vibrațiile care se produc la mersul în gol) și s-a cronometrat durata de lucru m (minute) pînă la rupere. Interesul pentru sarcini P mai mari ca 0,8 kg era foarte redus, căci domeniul care ne interesa pe noi era invers, acela care ar fi corespuns unui $n = 2\,500\,000$ cicluri. Efortul corespunzător acestui n nu s-ar fi putut obține decît printr-o extrapolare cu totul nesigură. În consecință, rezultatele încercărilor cu epruvete crestate și corodate sînt exprimate prin durata pînă la rupere, sarcina fiind constantă $P = 0{,}8$ kg.

Dispersiunea rezultatelor obținute cu unul și același tip de epruvete a fost în general slabă la încercările cu epruvete în stare uscată și a crescut la cele cu coroziune, respectiv cu crestătură, devenind maximă la cele cu suprapunerea ultimelor două efecte. Acele epruvete care s-au comportat în mod evident anormal, au fost eliminate. Ele prezentau fie o eroare de formă (mai ales de crestătură), fie un ecruisaj neuniform.

În cele ce urmează dăm rezultatele încercărilor care au condus la rupere, exceptînd pe acelea cu sarcini mai mici, la care epruvetele au rezistat la peste 2 500 000 cicluri.

1. *Epruvete normalizate, netede, uscate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
P kg	24,245	23,880	22,160	21,674	20,920	19,253	17,380	15,904
m min.	29	43	51	114	142	214	502	900

2. *Epruvete normalizate, netede, corodate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
P kg.	17,938	15,430	13,455	12,133	11,595	10,288	8,156	6,188
m min.	21	51	100	132	195	380	647	900

3. *Epruvete normalizate, crestate, uscate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
P kg	13,450	12,000	11,595	10,226	9,000	8,150	6,500	4,800
m min.	21	41	50	100	117	210	380	900

4. *Epruvete normalizate, crestate, corodate*
$P = 0{,}8$ kg

Nr.	1	2	3	4	5	6
m min.	590	600	605	635	680	695 în mediu 634 min.

5. *Epruvete ecruisate 6%, netede, uscate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P kg	24,245	23,880	22,160	21,674	20,920	19,253	17,938	17,380	16,230
m min.	48	42	73	132	152	282	550	565	900

6. *Epruvete ecruisate 6%, netede, corodate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P kg	17,938	15,430	13,455	12,133	11,595	10,238	8,156	8,000	6,188	5,880
m min.	32	67	76	80	100	317	500	395	795	900

7. *Epruvete ecruisate 6%, crestate, uscate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
P kg	17,938	15,430	13,455	12,133	11,595	8,150	6,500	4,500
m min.	15	33	80	95	107	224	400	900

8. *Epruvete ecruisate 6%, crestate, corodate*

$P = 0{,}8$ kg

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	
m min.	460	480	490	525	550	570	585	în mediu 523 min.

9. *Epruvete ecruisate 8%, netede, uscate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P kg	26,766	25,045	25,580	24,245	22,670	22,160	21,674	20,930	19,253	17,932	17,280
m min.	19	32	42	45	80	167	152	270	330	710	900

10. *Epruvete ecruisate 8%, netede, corodate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
P kg	17,938	15,430	13,455	11,595	10,288	8,156	6,526
m min.	34	120	73	270	296	480	900

11. *Epruvete ecruisate 8%, crestate, uscate*

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
P kg	17,938	15,938	12,000	10,226	9,000	6,500	6,000
m min.	15	25	68	74	108	310	900

12. *Epruvete ecruisate 8%, crestate, corodate*

$P = 0{,}8$ kg

Nr.	1	2	3	4	5	6	
m min.	430	455	480	505	515	530	în mediu 487 min.

Relaţiile dintre *P* şi *m*

Utilizînd ca şi în trecut, relaţia liniar-logaritmică

$$P_c = a \log m + b$$

şi aplicînd la seriile de rezultate 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10 şi 11 metoda celor mai mici pătrate, se obţin expresiile pentru P_c.

1. *Epruvete normalizate, netede, uscate*

Nr.	P kg	m min.	$\log m$	$\log^2 m$	$P \log m$	P_c kg
1	24,245	29	1,46240	2,13861	35,45588	24,389
2	23,880	43	1,63347	2,66822	39,00726	23,430
3	22,160	51	1,70757	2,91579	37,83975	23,015
4	21,674	114	2,05690	4,23083	44,58125	21,057
5	20,920	142	2,15229	4,63235	45,02590	20,523
6	19,253	214	2,33041	5,43081	44,86738	19,524
7	17,380	502	2,70070	7,29378	46,93816	17,449
8	15,904	900	2,95424	8,72753	46,98423	16,029

$\Sigma P = 165{,}416$ $\Sigma \log m = 16{,}99798$ $\Sigma \log^2 m = 38{,}03792$ $\Sigma P \log m = 340{,}69981$

$38{,}038\ a + 16{,}998\ b = 340{,}899$

$16{,}998\ a + 8\ b = 165{,}416$ $a = -5{,}604$ $b = 32{,}584$

$P_c = -5{,}604 \log m + 32{,}584$ (P_c kg, m minute)

Reprezentarea grafică pentru acest caz, ca și pentru cele ce urmează, reiese din figura 2.

2. *Epruvete normalizate, netede, corodate*

Nr.	P kg	m min.	$\log m$	$\log^2 m$	$P \log m$	P_c kg
1	17,938	21	1,32222	1,74826	23,71761	18,003
2	15,430	51	1,70757	2,91579	26,34827	15,387
3	13,455	100	2,00000	4,00000	26,95100	13,403
4	12,133	132	2,12057	4,49681	25,72251	12,585
5	11,595	195	2,29003	5,24423	26,55255	11,432
6	10,288	380	2,57978	6,65526	26,54304	9,469
7	8,156	647	2,81090	7,90115	22,92652	7,900
8	6,188	900	2,95424	8,72753	18,07404	6,928

$\Sigma P = 95{,}105$ $\Sigma \log m = 17{,}78531$ $\Sigma \log^2 m = 41{,}68903$ $\Sigma P \log m = 196{,}83454$

$41{,}689\ a + 17{,}785\ b = 196{,}834$

$17{,}785\ a + 8\ b = 95{,}105$ $a = -6{,}786$ $b = 26{,}975$

$P_c = -6{,}786 \log m + 26{,}975$ (P_c kg, m minute)

3. *Epruvete normalizate, crestate, uscate*

Nr.	P kg	m min.	$\log m$	$\log^2 m$	$P \log m$	P_c
1	13,450	21	1,32222	1,74826	17,78386	13,518
2	12,000	41	1,61278	2,60106	19,35336	11,942
3	11,595	50	1,69897	2,88650	19,69956	11,475
4	10,226	100	2,00000	4,00000	20,45200	9,842
5	9,000	117	2,06819	4,27741	18,61371	9,472
6	8,150	210	2,32222	5,39270	18,92609	8,094
7	6,500	380	2,57978	6,65526	16,76857	6,697
8	4,800	900	2,95424	8,72753	14,18035	4,666

$\Sigma P = 75{,}721$ $\Sigma \log m = 16{,}55840$ $\Sigma \log^2 m = 36{,}28872$ $\Sigma P \log m = 145{,}77750$

$36{,}289\ a + 16{,}558\ b = 145{,}778$

$16{,}558\ a + 8\ b = 75{,}721$ $a = -5{,}424$ $b = 20{,}690$

$P_c = -5{,}424 \log m + 20{,}690$ (P_c kg, m minute)

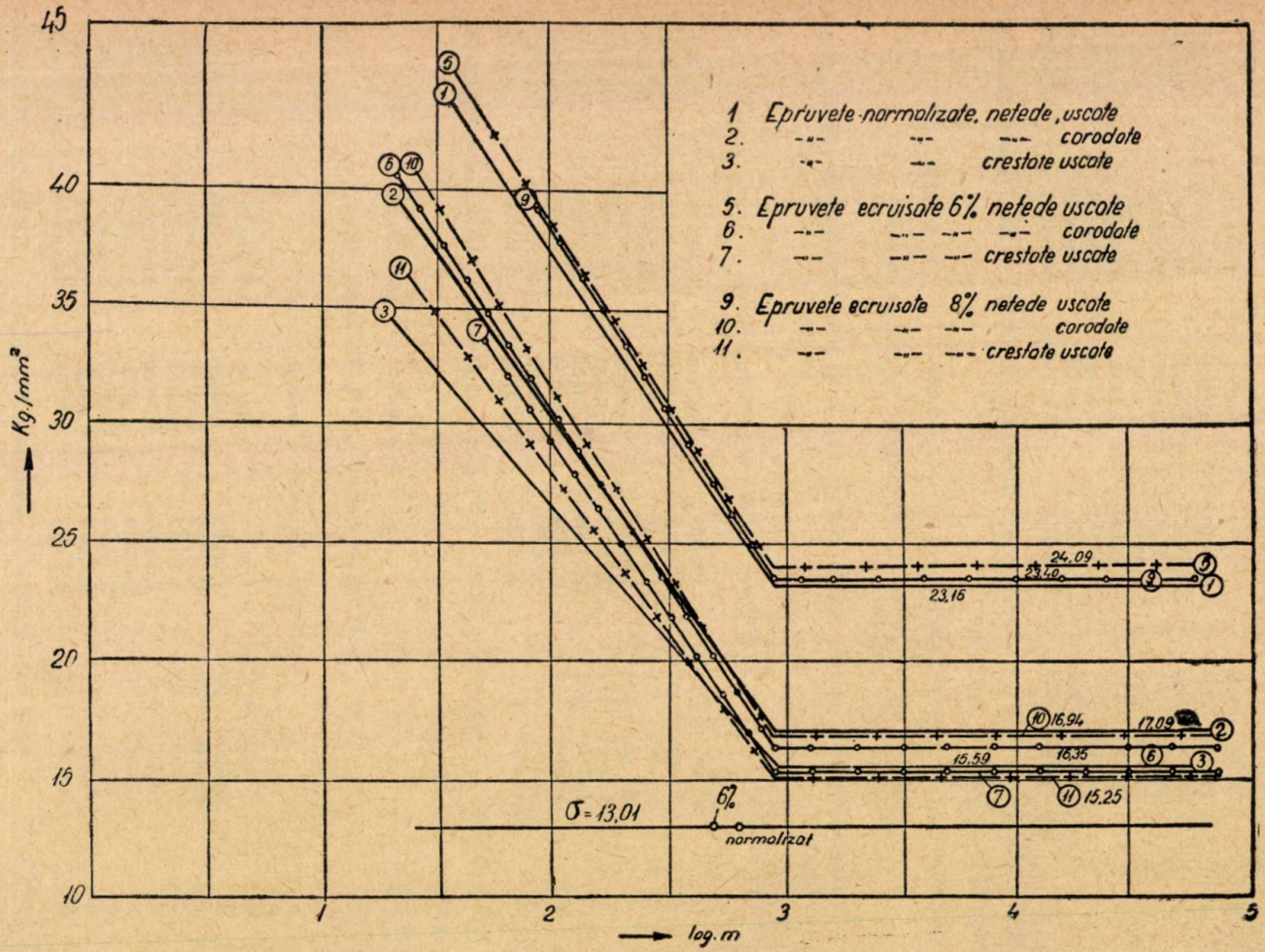

1 Epruvete normalizate, netede, uscate
2. -"- -"- -"- corodate
3. -"- -"- crestate uscate
5. Epruvete ecruisate 6% netede uscate
6. -"- -"- -"- -"- corodate
7. -"- -"- -"- crestate uscate
9. Epruvete ecruisate 8% netede uscate
10. -"- -"- -"- corodate
11. -"- -"- -"- crestate uscate
Kg./mm²
log. m
σ = 13,01
6%
normalizat
24,09
23,40
23,16
16,94
17,09
16,35
15,59
15,25

Fig. 2

4. *Epruvete ecruisate 6%, netede, uscate*

Nr.	P kg	m min.	$\log m$	$\log^2 m$	$P \log m$	P_c kg
1	24,245	48	1,68124	2,82656	40,76166	23,795
2	23,880	42	1,62325	2,63494	38,76321	24,132
3	22,160	73	1,86332	3,47196	41,29117	22,733
4	21,674	132	2,12057	4,49681	45,96123	21,235
5	20,920	152	2,18184	4,76042	45,64409	20,881
6	19,253	282	2,45025	6,00372	47,17466	19,323
7	17,938	550	2,74036	7,50957	49,15657	17,634
8	17,380	565	2,75205	7,57377	47,83062	17,565
9	16,230	900	2,95424	8,72753	47,94731	16,388

$\Sigma P = 183,680$ $\Sigma \log m = 20,36712$ $\Sigma \log^2 m = 48,00522$ $\Sigma P \log m = 404,53052$

$48,005\ a + 20,367\ b = 404,531$

$20,367\ a + 9\ b = 183,680$ $a = -5,817$ $b = 33,573$

$P_c = -5,817 \log m + 33,573$ (P_c în kg, m minute)

5. *Epruvete ecruisate 6%, netede, corodate*

Nr.	P kg	m min.	$\log m$	$\log^2 m$	$P \log m$	P kg
1	17,938	32	1,50515	2,26547	26,99938	16,729
2	15,430	67	1,83251	3,35809	28,27562	14,260
3	13,455	76	1,88081	3,53744	25,30629	13,894
4	12,133	80	1,90309	3,62175	23,09019	13,728
5	11,595	100	2,00000	4,00000	23,19000	12,997
6	10,238	317	2,50106	6,25553	25,73090	9,220
7	8,156	500	2,69897	7,28443	22,01279	7,728
8	8,000	395	2,59770	6,74804	20,78160	8,491
9	6,188	795	2,90037	8,41214	17,94748	6,209
10	5,880	900	2,95424	8,72753	17,37093	5,804

$\Sigma P = 109,063$ $\Sigma \log m = 22,77390$ $\Sigma \log^2 m = 54,21042$ $\Sigma P \log m = 230,70518$

$54,210\ a + 22,774\ b = 230,705$

$22,774\ a + 10\ b = 109,063$ $a = -7,539$ $b = 28,075$

$P_c = -7,539 \log m + 28,075$ (P_c kg, m minute).

6. *Epruvete ecruisate 6%, crestate, uscate*

Nr.	P kg	m min.	$\log m$	$\log^2 m$	$P \log m$	P_c kg
1	17,938	15	1,17609	1,38319	21,09670	18,244
2	15,430	33	1,51851	2,30587	23,43061	15,532
3	13,455	80	1,90309	3,62175	25,60608	12 486
4	12,133	95	1,97772	3,91138	23,99568	11,894
5	11,595	107	2,02938	4,11838	23,53066	11,485
6	8,150	224	2,35025	5,52368	19,15454	8,944
7	6,500	400	2,60206	6,77072	16,91359	6,949
8	4,500	900	2,95424	8,72753	13,29408	4,160

$\Sigma P = 89,701$ $\Sigma \log m = 16,51134$ $\Sigma \log^2 m = 36,36250$ $\Sigma P \log m = 167,02194$

$36,363\ a + 16,511\ b = 167,022$

$16,511\ a + 8\ b = 89,701$ $a = -7,921$ $b = 27,560$

$P_c = -7,921 \log m + 27,560$ (P_c kg, m minute)

7. *Epruvete ecruisate 8%, netede, uscate*

Nr.	P kg	m min.	log m	log^2 m	P log m	P_c kg
1	26,766	19	1,27875	1,63520	34,22702	26,702
2	25,045	32	1,50515	2,26547	37,69648	25,447
3	25,580	42	1,62325	2,63474	41,52273	24,793
4	24,245	45	1,65321	2,73310	40,08207	24,627
5	22,670	80	1,90309	3,62175	43,14305	23,242
6	22,160	167	2,22272	4,94048	49,25547	21,446
7	21,674	152	2,18184	4,76042	47,28920	21,697
8	20,920	270	2,43136	5,91151	50,86405	20,314
9	19,253	330	2,51851	6,34289	48,48887	19,831
10	17,932	710	2,85126	8,12978	51,14590	17,987
11	17,280	900	2,95424	8,72753	51,04926	17,417

$\Sigma P = 243{,}531$ $\Sigma \log m = 23{,}12338$ $\Sigma \log^2 m = 51{,}70307$ $\Sigma P \log m = 494{,}76410$

$51{,}703\ a + 23{,}123\ b = 494{,}764$

$23{,}123\ a + 11\ b = 243{,}531$ $a = -5{,}542$ $b = 33{,}789$

$P = -5{,}542 \log m + 33{,}789$ (P_c kg, m minute)

8. *Epruvete ecruisate 8%, netede, corodate*

Nr.	P kg	m min.	log m	log^2 m	P log m	P_c kg
1	17,938	34	1,53148	2,34543	27,47168	17,838
2	15,430	120	2,07918	4,32298	32,08174	13,544
3	13,455	73	1,86332	3,47196	25,07097	15,235
4	11,595	270	2,43136	5,91151	28,19161	10,785
5	10,288	296	2,47129	6,10727	25,42463	10,472
6	8,156	480	2,64124	7,18904	21,86819	8,828
7	6,526	900	2,95424	8,72753	19,27937	6,690

$\Sigma P = 83{,}388$ $\Sigma \log m = 16{,}01211$ $\Sigma \log^2 m = 38{,}07572$ $\Sigma P \log m = 179{,}38819$

$38{,}076\ a + 16{,}012\ b = 179{,}388$

$16{,}012\ a + 7\ b = 83{,}388$ $a = -7{,}833$ $b = 29{,}830$

$P_c = -7{,}833 \log m + 29{,}830$ (P_c kg, m minute)

9. *Epruvete ecruisate 8%, crestate, uscate*

Nr.	P kg	m min.	log m	log^2 m	P log m	P_c kg
1	17,938	15	1,17609	1,38318	21,09670	16,656
2	15.938	25	1,39794	1,95423	22,28036	15,091
3	12,000	68	1,83251	3,35809	21,99012	12.022
4	10,226	74	1,86923	3.49402	19,11474	11,763
5	9,000	108	2,03342	4,13479	18,30079	10,603
6	6,500	310	2,49136	6,20687	16,19384	7,369
7	6,000	900	2,95424	8,72753	17,72544	4,099

$\Sigma P = 77{,}602$ $\Sigma \log m = 13{,}75389$ $\Sigma \log^2 m = 29{,}25871$ $\Sigma P \log m = 136{,}70198$

$29{,}258\ a + 13{,}754\ b = 136{,}702$

$13{,}754\ a + 7\ b = 77{,}602$ $a = -7{,}063$ $b = 24{,}965$

$P_c = -7{,}063 \log m + 24{,}965$ (P_c kg, m minute)

Interpretarea rezultatelor

Cifrele de oboseală pentru starea netedă, uscată, netedă corodată și crestată uscată reies precum urmează (utilizînd relația explicată în rapoartele anterioare: $\sigma_{ob} = 0{,}66\ P + 12{,}48$ kg/mm²):

Material	Epruvete netede, uscate	Epruvete netede, corodate	Epruvete crestate, uscate
Normalizat	$\sigma_{ob} = 23{,}16$ kg/mm²	$\sigma_{ob} = 17{,}09$ kg/mm²	$\sigma_{ob} = 15{,}59$ kg/mm²
Ecruisat 6%	= 23,40 „	= 16,35 „	= 15,25 „
Ecruisat 8%	= 24,09 „	= 16,94 „	= 15,21 „

Aceste cifre confirmă din nou că coroziunea are un efect nivelator, adică diferențele constatate în stare uscată (și indicînd o superioritate a materialului ecruisat) se șterg complet sub efectul coroziunii. Efectul crestăturii se dovedește a fi mult mai puternic ca acela al coroziunii, dar și aici se constată aceeași nivelare ca în lucrările anterioare, cu o ușoară inferioritate a materialului ecruisat.

Suprapunerea efectului de crestătură cu acela al coroziunii arată, din contra, o diferențiere pronunțată a celor 3 stări: la un efort de 13,01 kg/mm² durata medie de lucru a fost de 634 minute la materialul normalizat, de 523 minute la cel ecruisat cu 6% și de 487 minute la cel ecruisat cu 8%. Inferioritatea materialului ecruisat este deci netă.

Ecruisajul creează deci o stare defavorabilă pentru prăjinile de foraj, deoarece ele lucrează într-un mediu lichid și capătă, în cursul lucrului, crestături, a căror provenientă este, de cele mai multe ori, tot coroziunea.

Cele de mai sus arată că încercările uzuale de laborator nu descoperă și nici nu pot descoperi adevăratele cauze de rupere, deoarece din proba de tracțiune ar reieși chiar o superioritate a materialului ecruisat, cîtă vreme în condițiile reale de lucru, adică cu coroziune (inclusiv crestăturile rezultînd din acestea) situația este profund schimbată.

О НЕКОТОРЫХ ИСПЫТАНИЯХ, ПРОИЗВЕДЕННЫХ С ЦЕЛЬЮ УСТАНОВЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ НАСЕЧЕК И КОРРОЗИЙ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ ХОЛОДНОКОВАННЫХ БУРИЛЬНЫХ ТРУБ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

При испытаниях на усталость материала бурильных труб в состоянии: *а)* нормализаций, *б)* 6% холодной проковки и *в)* 8% холодной проковки, при которых использовались для каждого из вышеупомянутых состояний гладкие сухие образцы, подвергавшиеся коррозии, и сухие насеченные, оказалось, что:

1. Коррозия сглаживает различия между показателями усталости в вышеуказанных трех состояниях, то есть получаются показатели, очень близкие между собой.

2. Насечки производят гораздо больший эффект, уменьшая значительно больше чем коррозия показатель усталости.

Испытания на усталость с одновременным наложением друг на друга эффектов, производимых коррозией и насечками, показали, что разрыв холоднокованного материала происходит гораздо быстрее, чем нормализованного.

SUR CERTAINS ESSAIS POUR ÉTABLIR L'INFLUENCE DES ENCOCHES ET DE LA CORROSION SUR LA RÉSISTANCE À LA FATIGUE DES TIGES DE FORAGE ÉCROUIES

(RÉSUMÉ)

Des essais de résistance à la fatigue, pratiqués sur des aciers pour tiges de forage à l'état: *a)* normalisé, *b)* écroui à 6 %, écroui à 8% et en utilisant pour chacun de ces états des éprouvettes lisses sèches, lisses corrodées et sèches à encoches, ont démontré que:

1) la corrosion réduit la différence entre les chiffres de fatigue pour ces trois états, c'est-à-dire que l'on obtient des chiffres fort proches les uns des autres, et

2) les encoches ont un effet beaucoup plus marqué, en réduisant, plus sensiblement que la corrosion, le chiffre de fatigue.

Les essais de résistance à la fatigue, avec superposition simultanée des effets de la corrosion et de l'encoche, ont démontré que la rupture du matériel écroui a lieu beaucoup plus tôt que celle du matériel écroui normalisé.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Geller, Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. III, nr. 3—4, iulie-decembrie 1952, p. 389.
2. — Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 89.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

UZURA BANDAJELOR ŞI A ŞINELOR

DE

ST. SEBEŞAN

Creşterea continuă a transportului pe calea ferată a ridicat pentru tehnicienii din această ramură, într-un mod din ce în ce mai accentuat, problema uzurii bandajelor de la roţile vehiculelor, precum şi a şinelor, în părţile în care aceste două corpuri vin în contact.

Lupta contra acestor uzuri poate fi dusă numai printr-un ansamblu întreg de ameliorări, de ordin metalurgic, mecanic şi constructiv, aplicate atît elementelor căii cît şi acelora ale vehiculelor, rezultate de pe urma examinării îndeaproape a modului în care ele se produc, precum şi a cauzelor care contribuie la producerea lor

I. MODIFICĂRILE DE FORMĂ ALE BANDAJELOR ŞI ŞINELOR ŞI CAUZELE CARE LE PRODUC

Pentru a ne face o idee asupra modului în care ele se produc, vom examina modificările de formă în timpul exploatării, ale unui bandaj de vagon pe două boghiuri a cîte două osii, utilizat la trenuri accelerate, avînd rezistenţa de 60 kg/mm^2 şi duritatea Brinell de 330, circulînd pe o linie cu raze de curbură mijlocii, pe şine cu o înclinare de 1: 20 şi cu diferite grade de uzură, care iniţial, în stare nouă, au avut ciuperca cu o lăţime de 72 mm şi boltită în partea inferioară cu o rază de 225 mm. Figura 1 reprezintă acest bandaj în forma lui iniţială şi separat după 32 000, 60 000, 100 000 şi 144 000 km parcurşi (profilul iniţial fiind punctat de fiecare dată). Aceste profile în nici un caz nu pot avea pretenţia unei exactităţi absolute şi a unei valabilităţi generale, deoarece ar trebui observate un număr mai mare de bandaje, rulînd în condiţii diferite. Totuşi ele ne pot da o bună imagine a proceselor care se petrec.

Uzura începe sub forma unor uşoare scobituri, în două locuri destul de îndepărtate între ele; anume, în punctul de contact A al suprafeţei de rulare care are înclinarea de 1:20, la o distanţă ceva mai mare de 70 mm de la faţa interioară a bandajului, şi în punctul B aşezat tocmai pe curba de racordare dintre suprafaţa de rulare şi flancul buzei. Uzura din punctul B provine aproape numai din cauza circulaţiei în curbe şi este cu atît mai mare faţă de uzura din A, cu cît liniile parcurse sînt mai bogate în curbe.

Din aceste două locuri, uzurile se extind repede în ambele părţi, tăind o scobitură în formă de seceră din profilul buzei bandajului şi a racordării şi o scobitură în formă de lentilă din profilul suprafeţei de rulare. Secera începe din flancul

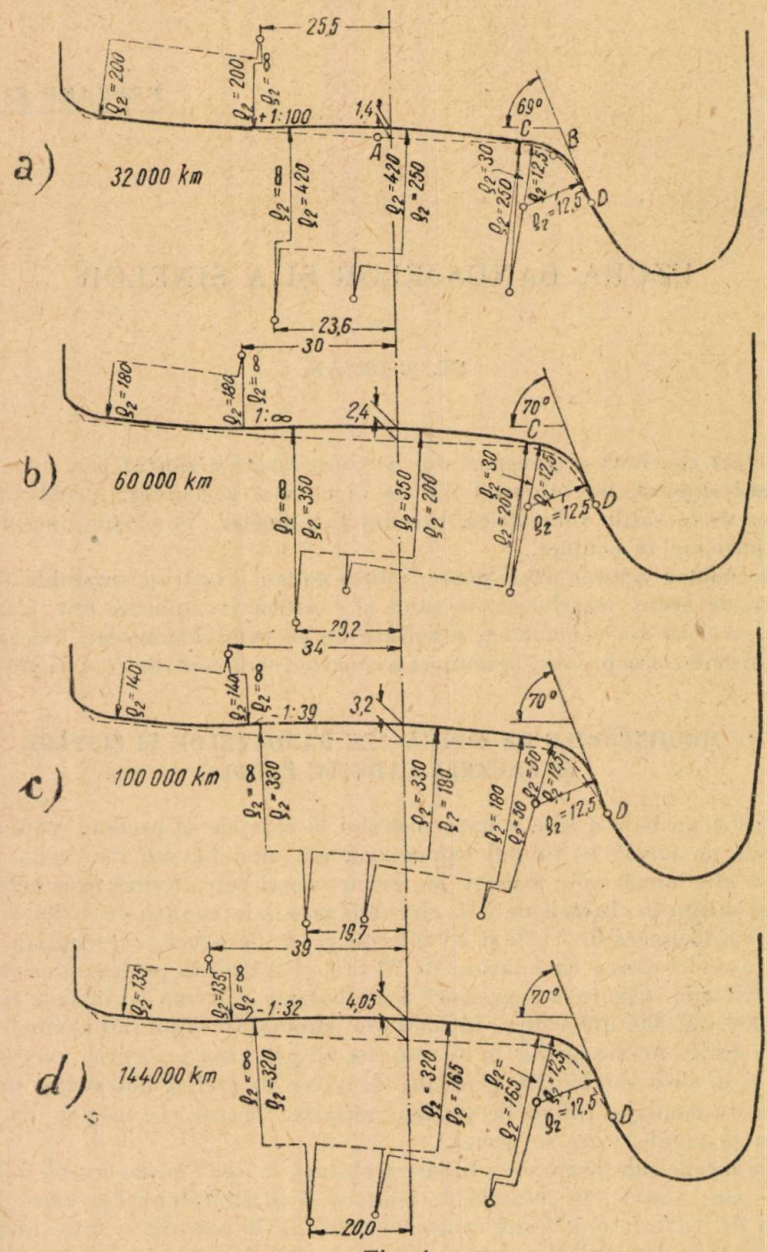


Fig. 1

puzei bandajului, cu un vîrf ascuţit *D*, care se ascute pe măsură ce lungimea parcursă creşte şi se întinde în jos spre vîrful buzei bandajului (fig. 1, *a* şi *d*).

În partea ei inferioară, secera este rotunjită, avînd o rază de circa 12,5 mm faţă de raza iniţială de 15 mm. Porţiunea dintre seceră şi lentilă, care la început rămîne neatacată, se micşorează repede şi dispare complet după un parcurs de circa 20 000...30 000 km, cedînd unei cocoaşe *C* cu o muchie bine pronunţată în punctul de demarcaţie (fig. 1, *a* şi *b*), pînă cînd şi aceasta devine treptat mai mică, iar după un parcurs mai îndelungat dispare complet, contopindu-se secera cu lentila, fără nici un punct de demarcaţie între ele (fig. 1, *c* şi *d*).

Scobitura lentilei începe din punctul *C*, cu o rază care este mult mai mare decît raza de curbură a secerei. Raza scobiturii în formă de lentilă creşte sensibil şi continuu, începînd de la punctul *C* pînă aproape de planul cercului de rulare, care se consideră la 70 mm de la faţa inferioară a bandajului roţii. Începînd de la punctul acesta, lentila are raza cea mai mare şi aproximativ constantă. Maximul curburii are loc într-un punct situat puţin peste 90 mm de la muchia interioară a roţii şi se întinde în timpul uzurii puţin spre interior. Raza acestei porţiuni scade cu cît uzura creşte, la început destul de repede, apoi mai încet pînă la circa 300 mm, care se realizează la un parcurs de aproximativ 150 000 km.

La această porţiune de profil a lentilei, se racordează prin intermediul unei porţiuni drepte, o contracurbă. Observăm că pe măsură ce uzura ia formă de lentilă, porţiunea dreaptă creşte, îşi schimbă înclinarea, trecînd printr-o orizontală, după un parcurs de circa 60 000 km.

Contracurba are o rază aproape constantă pînă la o distanţă de circa 10 mm de la faţa exterioară a bandajului. Această rază însă scade pe măsură ce parcursul creşte şi anume de la 200 mm la un parcurs de 32 000 km, pînă la 135 mm la un parcurs de 144 000 km.

Dacă examinăm bandajele tuturor roţilor aceluiaşi vagon, vom constata că ele prezintă deosebiri aproape neglijabile. Acest lucru se explică prin faptul că un boghiu cu două osii se comportă la înscrierea în curbe, exact ca orice vehicul cu două osii, adică osia din faţă, denumită osie conducătoare, atacă cu buza bandajului roţii exterioare, firul exterior al căii, între ele luînd naştere o forţă, denumită forţă conducătoare, în timp ce osia a doua va avea tendinţa, dacă lărgimea căii şi lungimea ampatamentului (distanţa între osii) îi permite, de a se dispune aproximativ radial faţă de curba căii. Din cele arătate s-ar părea deci, că cele două osii ale aceluiaşi boghiu, circulînd în condiţii inegale faţă de cale, vor prezenta şi uzuri inegale. Nu trebuie însă să uităm că la circulaţia vagonului în sens contrar, rolurile osiilor boghiului se inversează, osia care anterior avea o poziţie aproximativ radială, devine conducătoare, iar cealaltă îşi va lua poziţia aproximativ radială.

De asemenea, la circulaţia în aliniament nu pot apărea condiţii de circulaţie inegale faţă de cale, la mersul într-un sens sau altul al vagonului.

De aceea, dacă vagonul circulă pe distanţe egale într-un sens sau altul, este de aşteptat ca uzurile tuturor roţilor să fie aproximativ aceleaşi, micile deosebiri datorindu-se numai unor inegalităţi ale curbelor, atît ca curbură şi orientare, cît şi ca număr, la mersul într-un sens sau altul al vagonului.

Modificările de formă, obţinute la bandajul unei roţi montate la boghiul unui vagon, comparate cu cele ale bandajelor de la roţile unor vehicule cu mai mult de două osii legate fără jocuri longitudinale (rigid) în şasiurile respective, cum ar fi de exemplu roţile cuplare ale unei locomotive cu abur, ne indică o asemănare ca dezvoltare, fără să aibă aceleaşi mărimi, numai cu roţile conducătoare. Aici, deoarece greutatea unei locomotive este mai mare decît a unui vagon, uzurile în general sînt mai mari şi în particular scobitura de la buza bandajului este mai adîncă.

Or, această observaţie ne conduce la concluzia că uzura este condiţionată de mărimea forţei de frecare dintre roată şi şină, ceea ce era evident, iar la buza bandajului, de valoarea forţei conducătoare.

De asemenea se mai constată la bandajele roţilor de la aceste vehicule, că raza celei mai aplatisate curburi a lentilei, devine cu atît mai mare, cu cît roţile în curbe sînt mai mult împinse lateral în mod forţat, ceea ce se întîmplă cu atît mai mult, cu cît unghiul de atac *) al roţii respective faţă de cale este mai mare.

După cum se va arăta mai detaliat în cele ce urmează, acest unghi de atac la un vehicul cu mai multe osii rigide, este mai mare la osiile conducătoare şi scade din ce în ce mai mult la osiile mai îndepărtate de osia conducătoare; la aceste osii şi uzura scade din ce în ce mai mult, fapt pe care experienţa îl confirmă pe deplin.

În ceea ce priveşte siguranţa contra deraierilor, se poate demonstra teoretic şi experimental că o mărire a secerii de la buza bandajului, care conduce, după cum rezultă din figura 1 la o mărire a unghiului de flanc al buzei, îmbunătăţeşte această siguranţă. În schimb un unghi mare de flanc creează rezistenţe mai mari la înaintarea vehiculului în curbe şi deci uzuri mai puternice. Unghiul de flanc de 60° adoptat şi la noi la C.F.R. se consideră ca un unghi optim, care ne dă o siguranţă suficientă contra deraierilor şi în acelaşi timp şi uzuri nu prea exagerate.

Fig. 2

În privinţa uzurilor care se produc la mersul în linie dreaptă, observaţiile au condus la concluzia că ele au o importanţă incomparabil mai mică, decît cele produse în timpul circulaţiei în curbe. Se ştie de altfel că dispoziţia biconică prezentată de suprafeţele de rulare ale celor două bandaje ale roţilor calate pe aceeaşi osie, asigură în mod teoretic o ghidare a osiei în cale, fără să se producă vreun contact pentru un timp mai îndelungat între buzele bandajelor şi şine. Pentru clarificarea acestei probleme, considerăm că osia montată, dintr-o cauză oarecare, s-a deplasat transversal în cale consumînd jocul J_0 dintre buza bandajului şi şină. Datorită conicităţii bandajelor, centrul osiei montate va începe să descrie un arc de cerc, însă nu în mod continuu. Roata care rulează pe un diametru mai mare, va avansa faţă de cealaltă care rămîne în urmă. Însă roata care rămîne în urmă se va apropia din ce în ce mai mult cu buza bandajului, de şină, rulînd în acest caz pe un diametru din ce în ce mai mare, iar roata din faţă îndepărtîndu-se cu buza bandajului de şină, va rula pe un diametru din ce în ce mai mic. În această situaţie nouă, roata rămasă în urmă va avansa, avansul roţii care se află înainte începe să se reducă şi să se transforme în întîrziere, pentru ca apoi fenomenul să se repete în sens invers. Centrul osiei montate va descrie o linie de natură sinusoidală, compusă din două arce de cerc cu raza R sau în limbajul obişnuit se spune că osia *şerpuieşte*.

Ecuaţia traiectoriei mijlocului osiei a fost determinată pentru prima dată în anul 1883 de K l i n g e l, sub forma

$$y = y_0 \sin px, \qquad (1)$$

*) Prin noţiunea de unghi de atac înţelegem unghiul notat în figura 2 cu α, format între planul vertical al roţii care trece prin punctul de contact între buza bandajului şi şină şi firul exterior al căii în acelaşi punct.

Noţiunea de unghi de atac se menţine şi pentru roţile a căror buză nu este în contact cu şina, adică şi la roţile neconducătoare. Aici el se consideră ca un unghi format de planul vertical al roţii care trece prin punctul de contact al suprafeţei de rulare a bandajului cu şina şi direcţia tangentei la firul exterior al căii în acelaşi punct.

sau

$$y = y_0 \sin \sqrt{\frac{i}{ax}}\, x, \tag{2}$$

unde i reprezintă conicitatea bandajelor, a jumătatea ecartamentului căii şi r raza roţii.

În figura 3 am reprezentat această traiectorie pentru $y_0 = 5$ mm. Pentru lungimea de undă avem

$$L_u = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{a \cdot r}{l}}\, m \tag{3}$$

Pentru ecartamentul normal cînd $i = \frac{1}{20}$ şi $r = 0{,}5$ m avem

$$L_u = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}5}{\frac{1}{20}}} \cong 17{,}2 \text{ m}$$

Rezultă de aici, precum şi din figura 3 că în mişcarea sa, osia montată loveşte şina cu o buză a bandajului o singură dată, pe o lungime de 17,2 m, ceea ce pentru uzură n-ar prezenta nici o importanţă, cu atît mai mult cu cît pe suprafaţa de rulare a bandajului nu se produce nici o alunecare.

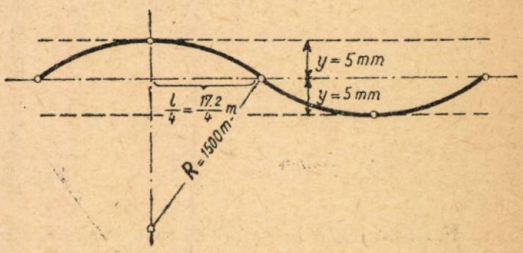


Fig. 3

Acest rezultat teoretic a putut să fie confirmat şi de experienţă, de-abia în zilele noastre, odată cu dezvoltarea cinematografiei. Două aparate de filmat au fotografiat în timpul mersului, la o osie montată, jocul buzelor celor două bandaje faţă de şine.

Rezultatele înregistrării cinematografice transpuse pe figura 4 ne arată, că mişcarea reală a osiei montate se apropie cu atît mai mult de cea teoretică, cu cît linia se apropie mai mult de o dreaptă ideală.

Însă sub forma aceasta simplă, mişcarea de şerpuire a osiei montate se poate produce în cazul cînd lagărul osiei are un joc longitudinal şi transversal suficient între plăcile de gardă, pentru ca ea să se rotească faţă de şasiul vehiculului, atîta cît are nevoie pentru aceste mişcări. În al doilea rînd, mişcarea de şerpuire se produce dacă mişcările transmise şasiului în mod periodic, nu vor pune vehiculul în mişcări oscilatorii transversale care să deranjeze mişcările simple sinusoidale ale osiilor montate, sau chiar să intre cu ele în rezonanţă, în cazul cînd perioadele celor două oscilaţii coincid. În aceste cazuri mişcarea abătîndu-se de la sinusoida naturală, din cauză că roţile sînt calate pe osie, vor apărea alunecări în planurile roţilor între bandaje şi şină, iar în cazul rezonanţei, forţele transversale tinzînd către infinit, vor lua naştere şi

Fig. 4

frecări puternice între buzele bandajelor şi şine, care se traduc prin uzuri neregulate pe ambele suprafeţe în contact. Prin urmare, o şerpuire nestînjenită a osiilor montate poate conduce nu numai la vibraţii transversale neplăcute ale vehiculului, ci şi la uzuri puternice pe suprafeţele de contact între roţi şi şine, putîndu-se ajunge chiar pînă la periclitarea siguranţei circulaţiei, prin forţele transversale exagerat de mari care se pot naşte datorită rezonanţei, sau în cazurile cele mai frecvente, la aprinderi dese de fusuri de osie *).

La locomotivele cu abur, acest fenomen nu poate să apară, deoarece aici întotdeauna osiile sînt rigidizate în direcţie longitudinală faţă de şasiu şi deci osiile întotdeauna sînt împiedicate de a şerpui şi de a transmite vreo mişcare de şerpuire corpului locomotivei — tendinţele de şerpuire anulîndu-se reciproc — astfel evitîndu-se dificultăţile menţionate mai sus.

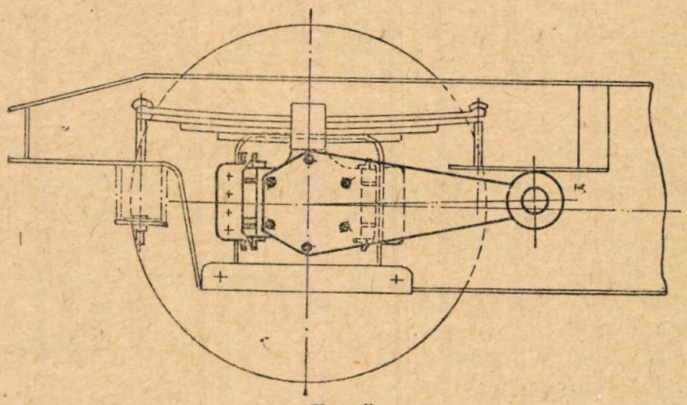


Fig. 5

Fenomenul a fost observat la vagoane, în special la acelea pe două osii, cu jocuri mari la cutiile de grăsime, care la noi la C.F.R. constituie cea mai mare parte a parcului de material rulant.

De aceea, este bine, atît pentru mersul liniştit al vehiculului, cît şi pentru evitarea uzurilor de bandaje şi şine, să se elimine, pe cît este posibil, libertatea de şerpuire nestînjenită a osiilor montate, prin eliminarea completă a jocurilor dintre cutiile de grăsime şi plăcile de gardă, prin adoptarea unor dispozitive de rigidizare longitudinală, cum ar fi de exemplu braţele radiale care leagă cutia de grăsime de şasiu (fig. 5).

Un astfel de braţ radial reprezentat în figura 5 serveşte la rigidizarea longitudinală a unei cutii de grăsime de la un boghiu. Pe lîngă multiplele sale avantaje arătate mai sus, punctul de articulaţie *B* fiind prevăzut cu o garnitură de cauciuc, amortizează toate zgomotele de la roată, care nu se mai transmit cutiei şi în acelaşi timp, fereşte atît cutia cît şi plăcile de gardă de orice uzură, deoarece de data aceasta cutia de grăsime nu mai este ghidată de plăcile de gardă. Un astfel de

*) O cauză importantă a aprinderii fuselor poate fi rezonanţa transversală a vagonului, care se produce atunci cînd perioada oscilaţiilor de şerpuire a osiei montate coincide cu perioada oscilaţiilor transversale ale cutiei vagonului pe sistemul pendular format de leagănul boghiului, sau în cazul vagoanelor pe două osii, de către suspensorii de arc. Forţele mari transversale cînd se nasc datorită rezonanţei. acţionează între fus şi cuzinet în regiunile holcherelor, de unde încălzirea se propagă asupra fusului şi a cuzinetului întreg.

Clarificarea acestor fenomene, precum şi măsurile constructive care se pot lua pentru înlăturarea lor, ar constitui obiectul unui studiu aparte.

dispozitiv, bineînţeles din motive constructive, mai lung, poate fi adaptat şi la un vagon pe două osii.

În acelaşi scop există şi încercări de amortizare a mişcărilor de şerpuire ale vehiculelor, prin producerea de frecare permanentă între pietrele de alunecare ale traverselor dansante de la boghiuri sau prin dispozitive de acuplare transversală elastică a două boghiuri, în aşa fel încît prin conjugarea mişcărilor lor transversale să se anihileze efectul şerpuirii. În toate cazurile, experienţa pe lîngă faptul că a înregistrat un mers incomparabil mai liniştit, dar a scos în evidenţă şi uzuri mai reduse la bandaje.

În scopul de a realiza un mers liniştit şi o uzură redusă, pentru noile vagoane C.F.R., seria C^{AFLD} de tip uşor cu 88 locuri, proiectate de Institutul de proiectări al căilor ferate, au fost prevăzute boghiuri cubrate radiale şi cu

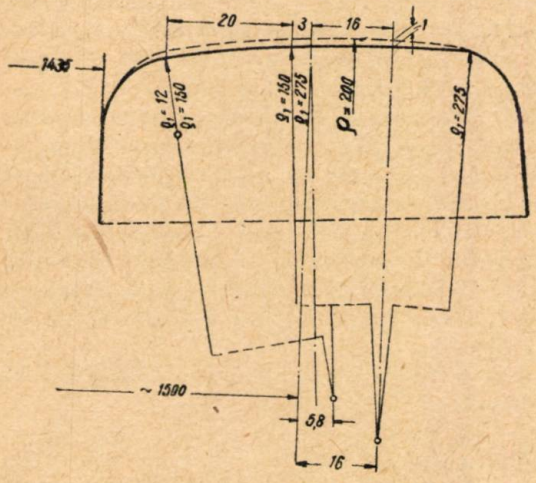


Fig. 6

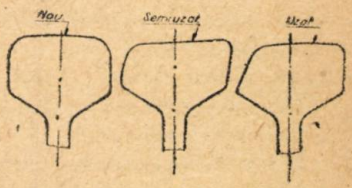


Fig. 7

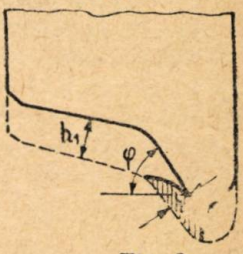


Fig. 8

greutatea cutiei vagonului lăsată pe pietrele de alunecare ale traversei dansante. Rămîne ca experienţa să verifice în ce măsură aceste două scopuri au putut fi atinse. În orice caz sînt aşteptate rezultate interesante în aceste privinţe.

În general, uzura provocată la mersul în linie dreaptă a vehiculului, chiar şi fără o ameliorare a mişcărilor de şerpuire, nu atinge nici pe departe importanţa uzurilor care pot apărea la mersul în curbe. De aceea şi măsurile de ameliorare, arătate mai sus, sînt luate întotdeauna, în primul rînd, pentru realizarea mersului liniştit, ele însă aplicîndu-se şi la reducerea uzurilor. Cît de reduse sînt ele faţă de uzura în curbe, rezultă din examinarea uzurii şinelor în aliniament (fig. 6). Observăm că această uzură constă într-o simplă aplatizare a curburii ciupercii, care în cazul din figura 6 ajunge de la $\rho = 200$ mm la $\rho = 275$ mm. În schimb în curbe (fig. 7) uzurile sînt incomparabil mai mari, observîndu-se în special uzura pronunţată a flancului şinei care corespunde cu uzura buzei bandajului.

Din punctul de vedere al consumului de bandaje, uzura buzei are o importanţă mare.

Astfel, aşa cum rezultă din figura 8, la o uzură a buzei pe adîncimea h corespunde o strunjire pe suprafaţa de rulare care atinge valoarea $h_1 = \frac{h}{\cos \varphi}$, altfel

forma corectă a buzei n-ar putea fi realizată. De aici ar rezulta că la un unghi de flanc al buzei de 60° pentru scoaterea unei uzuri de 1 mm de la buză, ar trebui să se strunjească un şpan de 1,73 mm de la suprafaţa de rulare. Şi acesta este încă un motiv în plus ca problema uzurilor în curbe să o tratăm cu cea mai mare atenţie.

Pentru reducerea uzurii de la buza bandajului şi de la flancul şinei, se obişnuieşte ca aceste două elemente să se ungă pe porţiunile curbelor. Această ungere, utilizată pe o scară largă de majoritatea administraţiilor de cale ferată, a dat rezultate importante. Astfel din unele statistici s-a stabilit că prin ungere se dublează durata căii în curbe şi se măreşte cu 60% durata bandajelor.

Dispozitivele utilizate sînt foarte variate, însă majoritatea sînt plasate la locomotivă, realizînd o ungere fie a buzei bandajului, fie a şinei. Cele mai răspîndite sînt acelea care realizează ungerea buzei. În afara cazului de ungere cu ulei, sînt şi altele, cînd se utilizează grafitul coloidal, sau aburii de eşapament care antrenează cu sine particule de ulei. Acest ultim caz este aplicat şi la căile ferate din ţara noastră, aburii de eşapament fiind luaţi de la pompa de aer a frînei.

Din literatură şi statistici se constată că în general, există deja aparate care dau rezultate interesante, fără să se poate însă spune, că vreunul din ele s-ar fi impus.

O cauză importantă a uzurii mai provine, nu numai din dificultăţile de înscriere în curbă a materialului rulant, ci şi din cauza construcţiei căii. Un rol important în această privinţă îl joacă supraînălţarea firului exterior al căii în curbe, care după cum se ştie este destinată pentru a combate, din punctul de vedere al confortului, al securităţii şi al conservării materialului, efectele forţei centrifuge care se manifestă în timpul circulaţiei în curbe. Valoarea ei « h » bineînţeles va depinde de viteza de circulaţie şi de raza de curbură a căii.

În cazul unei compensări complete a forţei centrifuge, supraînălţarea căii rezultă din următoarea formulă cunoscută

$$h = 11{,}8\frac{V^2}{R} \text{ mm},$$

n care V reprezintă viteza în km/oră ; R raza de curbură în metri şi care se deduce foarte simplu dintr-o relaţie de echilibru între forţa centrifugă şi forţa centripetă care acţionează asupra vehiculului datorită supraînălţării « h ».

Această formulă, pentru deducerea supraînălţărilor firului exterior al căii în curbe, s-ar preta foarte bine pentru liniile parcurse de trenuri, care circulă cu aceeaşi viteză V, în schimb însă comportă inconveniente de ordin practic în celelalte cazuri. Astfel dacă ea este aplicată unei linii cu trafic mixt (trenuri rapide şi de marfă), supraînălţările calculate pentru vitezele cele mai ridicate, vor fi prea mari pentru trenurile de mică viteză, care vor fi împinse spre şina interioară curbă, călcînd cu roţile interioare pe diametre mai mari şi producînd astfel mişcări şerpuitoare pronunţate, însoţite de alunecări puternice. Din contră, dacă supraînălţarea este calculată pentru o viteză redusă, trenurile rapide nu vor avea la viteze mari de trecere prin curbă, un confort suficient din cauza acceleraţiilor transversale mari şi nici o securitate suficientă, din cauza forţelor conducătoare mari care se pot naşte între buzele bandajelor şi şine.

De aceea supraînălţările prescrise la noi în ţară şi în U.R.S.S., sînt calculate după formula

$$h = 8\frac{V^2}{R},$$

care, după experienţa cîştigată în acest domeniu, atinge obiectivele arătate mai sus.

Totuşi se pare că pentru specificul ţării noastre, supraînălţările calculate după această formulă, n-ar fi tocmai cele mai potrivite.

Aceasta se poate constata scriind-o în felul următor

$$h = \frac{8\,V^2}{R} = \frac{11{,}8\,(0{,}82\,V)^2}{R},$$

ceea ce înseamnă că supraînălţările sînt calculate pentru o viteză medie de 82 % din viteza maximă. În schimb trenurile de marfă, care constituie majoritatea pe liniile din ţara noastră circulă cu viteze de 40—60 % din vitezele maxime. În acest caz, aşa cum a confirmat şi experienţa, se produc uzuri puternice atît la şine cît şi la bandaje.

În literatura tehnică din ţara noastră, în legătură cu această problemă a apărut o publicaţie dată de inginerul D. Drimmer [1]. Pe baza observaţiei de mai sus, autorul propune să se adopte supraînălţări potrivite pentru viteza obişnuită a trenurilor de marfă, eliminînd deci uzurile la această categorie de trenuri. Pentru vitezele lor de circulaţie, supraînălţările trebuie să fie determinate cu ajutorul formulei teoretice (3). Pe de altă parte, se va calcula pentru fiecare supraînălţare astfel obţinută, viteza maximă admisă în curbă, în aşa fel încît, chiar atunci cînd valorile reale pentru V, h şi R ar varia pe teren faţă de cele nominale, în limitele toleranţelor admise, acceleraţia centrifugă necompensată trebuie să nu depăşească 1,0 m/s^2, ceea ce constituie o limită pentru confortul călătorilor.

Pe această bază autorul stabileşte şi o formulă pentru determinarea vitezei maxime în curbe.

Aplicînd această propunere, s-ar obţine o uzură simţitor mai mică, la şine şi bandaje, în schimb vitezele maxime de circulaţie în curbe, ar fi ceva mai mici. Pentru situaţia actuală a vitezelor de circulaţie ale trenurilor din ţara noastră, soluţia pare a fi avantajoasă.

II. REDUCEREA UZURILOR PRIN MĂSURI DE ORDIN METALURGIC

Nenumărate rezultate ale experienţelor făcute în acest sens ne permit a afirma că o mărire a rezistenţei bandajelor la tracţiune, micşorează uzura în serviciu. De aceea apare tendinţa de a se mări pe cît este posibil această rezistenţă. În general ea variază în diferite ţări între 75 kg/mm^2 şi 108 kg/mm^2.

În ţara noastră oţelurile de bandaje standardizate sînt oţeluri carbon obişnuite cu o rezistenţă de rupere la tracţiune de 76...86 kg/mm^2, la locomotive, tendere şi roţile motoare ale automotoarelor şi de 66...76 la vagoane şi automotoare. După laminare, aceste bandaje sînt recoapte cu scopul înlăturării tensiunilor interne din material. Experienţa a stabilit că recoacerea nu influenţează în rău rezistenţa la uzură a bandajului, operaţie care, în orice caz, înlătură ruperile de bandaje în serviciu sau chiar la încălţarea roţilor.

Rezistenţa la rupere a oţelului de şine standardizate în ţara noastră este fixată între 70 şi 85 kg/mm^2 adică aproximativ egală cu a bandajelor. S-a constatat că în timp, şinele se uzează mult mai încet decît bandajele, deoarece solicitarea lor la uzură este mult mai mică. În orice caz, limita superioară de 85 kg/mm^2, aici a fost fixată ca o limită optimă în sensul de a da uzuri cît mai reduse, dar în acelaşi timp nici fragilitatea, care creşte odată cu creşterea rezistenţei să nu cauzeze ruperi prea dese de şine.

Şi în ţara noastră între anii 1926—1929 rezistenţa bandajelor a fost ridicată pînă la 92 kg/mm² cu scopul de a le reduce uzura. În scurt timp experienţa a arătat că se înmulţeau în mod îngrijorător cazurile de ruptură, în special în timpul iernii, la temperaturi scăzute, lucru care a obligat administraţia ca în anul 1930, rezistenţa să fie limitată la 86 kg/mm², valoare care se menţine şi astăzi. Se pare că peste această limită oţelul trebuie tratat termic dar în acest caz, bandajele rămîn chiar foarte sensibile la cea mai mică eroare de tratament termic. Fabricarea şi mai departe a acestor bandaje ar pretinde deci o tehnică delicată şi costisitoare. O rezistenţă de peste 97 kg/mm² nu se poate realiza la bandaje decît numai cu oţeluri speciale conţinînd crom şi mangan, tratate termic, la care însă s-au constatat şi reduceri importante ale uzurii.

Observaţiile făcute au condus la concluzia că, compoziţia chimică joacă un rol mult mai important în reducerea uzurii, decît rezistenţa materialului. O influenţă puternică în această privinţă o are manganul, care este bine să fie adăugat în proporţia de 2 %, la un conţinut de 0,2 % carbon.

Problema care se pune pentru noi, este de a stabili dacă fabricarea unui astfel de oţel cu mangan ar fi compensată de cîştigul provenit din reducerea uzurii. Un astfel de oţel poate fi cu cel mult 10 % mai scump decît un oţel carbon.

În U.R.S.S., încă din anul 1935 se aplică o soluţie foarte interesantă şi anume aceea a utilizării roţilor *monobloc*, adică la care bandajul face corp comun cu discul roţii. Aceste roţi, principial, nu se deosebesc de vechile roţi *Griffin* care actualmente sînt scoase din uz, deoarece fiind confecţionate din fontă, pe suprafeţele lor de rulare se formau fărîmiţături şi aşchieri precum şi spărturi la buzele bandajelor. Ele însă se fabrică din oţel ordinar cu carbon cu o rezistenţă la rupere de 80 kg/mm² şi călit superficial prin stropire cu apă, obţinîndu-se în urma călirii rezistenţa de 100 kg/mm².

La astfel de roţi se poate deci realiza o micşorare a uzurii, prin mărirea rezistenţei materialului, fără să ne temem de pericolul ruperii bandajului. Un alt avantaj al lor este şi faptul că osia montată devine mai uşoară, putîndu-se dimensiona mai slab, deoarece în acest caz nu mai suportă tensiunile de fretaj ale bandajelor. De asemenea, în acest caz nu poate apărea nici măcar riscul slăbirii bandajelor. Ele sînt ceva mai scumpe decît roţile cu bandaje, ceea ce însă se compensează prin durata lor mai îndelungată în serviciu. Rentabilitatea lor faţă de roţile cu bandaje apare evidentă, mai ales atunci cînd după uzarea lor completă, discurile se rebandajează, funcţionînd mai departe ca roţi cu bandaje.

III. REDUCEREA UZURILOR PRIN MĂSURI CONSTRUCTIVE APLICATE VEHICULELOR ŞI CĂII

În cele expuse anterior, am constatat că uzurile de cea mai mare importanţă au loc în curbe. Aici ele sînt condiţionate de valorile forţelor de frecare dintre roţi şi şine, de valorile forţelor conducătoare şi de unghiurile de atac. Cunoaşterea acestor factori şi posibilităţile de micşorare a influenţei lor, nu rezultă decît numai în urma cunoaşterii modului în care vehiculul se înscrie în curbă. De aceea, fără a intra în prea multe detalii, vom examina în cele ce urmează, modul în care un vehicul de cale ferată se înscrie în curbă, limitîndu-ne numai la strictul necesar pentru a trage concluzii asupra uzurilor.

Considerînd o osie montată, legată rigid fără joc longitudinal sau transversal în şasiul unui vehicul, care trece printr-o curbă (fig. 9), observăm că viteza de

rotaţie a roţii A este egală cu $\overline{OA} \cdot \omega$ avînd o direcţie perpendiculară pe $\overline{OA}$. Această viteză poate fi descompusă într-o viteză $\overline{O\Omega} \cdot \omega$ şi una $\overline{\Omega A} \cdot \omega$.

De asemenea, şi viteza roţii B egală cu $\overline{OB} \cdot \omega$ poate fi descompusă în vitezele $\overline{O\Omega} \cdot \omega$ şi $\overline{\Omega B} \cdot \omega$.

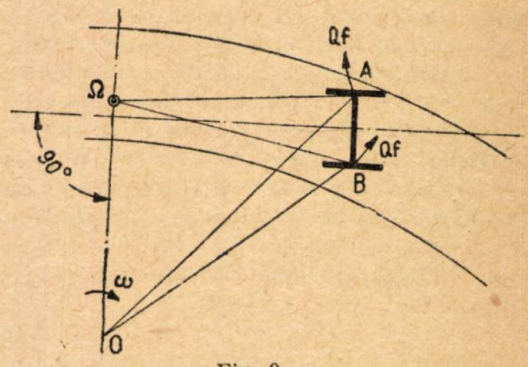


Fig. 9

Punctul Ω găsindu-se pe perpendiculara dusă din centrul de curbură O pe axa geometrică a şasiului, înseamnă că viteza comună a celor două roţi, $\overline{O\Omega} \cdot \omega$ este viteza de rulare a osiei montate, lipsită de alunecări, iar $\overline{\Omega A} \cdot \omega$ şi $\overline{\Omega B} \cdot \omega$ sînt vitezele de alunecare ale celor două roţi pe şină, în virtutea cărora osia montată trece prin curbă.

Aceste viteze de alunecare dau naştere unor forţe de frecare Qf între roată şi şină în direcţia alunecării, unde am notat cu Q sarcina pe roată şi cu f coeficientul de frecare între roată şi şină.

Punctul Ω poartă numele de centru de frecare. În cazul particular cînd osia montată nu execută o forţă de tracţiune sau de frînare, cînd bandajele sînt considerate cilindrice şi cu acelaşi diametru, iar efectul forţei centrifuge este compensat complet de supraînălţarea căii, centrul de frecare Ω se găseşte tocmai la piciorul perpendicularei dusă din centrul de curbură O pe axa longitudinală a şasiului. În celelalte cazuri Ω se plasează pe această perpendiculară către firul exterior sau interior al curbei. Nu este însă necesar să mergem cu aceste detalii de precizie atît de departe, deoarece s-ar obţine rezultate prea puţin diferenţiate, faţă de situaţia ideală de mai sus, care pentru concluziile noastre asupra uzurilor n-ar prezenta nici o importanţă, aşa cum ar prezenta de exemplu în cazul unor cercetări mai profunde asupra siguranţei circulaţiei. De aceea în cele ce urmează, vom considera pe Ω plasat la piciorul perpendicularei, în ipotezele ideale arătate mai sus.

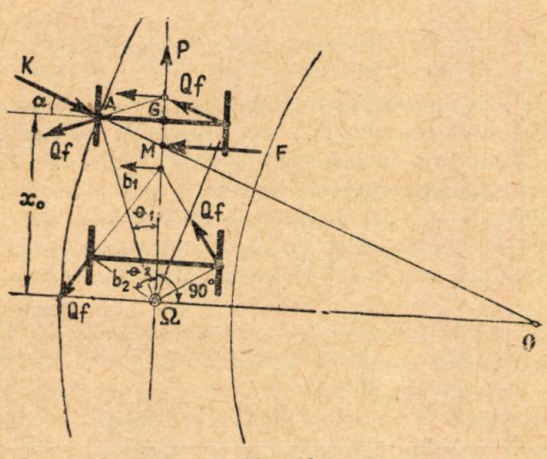


Fig. 10

Dacă un vehicul are mai multe osii rigide, centrul de frecare Ω va fi acelaşi pentru toate osiile, aşa cum se poate vedea în figura 10. Remarcăm că, în cazul acesta, Ω reprezintă şi centrul instantaneu de rotaţie a vehiculului în curbă.

Am arătat că, în linie dreaptă, între buzele bandajelor şi şine se lasă un joc, care este mai mare în curbe, deoarece aici se obişnuieşte să se dea căii o supralărgire. Datorită acestui joc, axa longitudinală a şasiului poate ocupa poziţii diferite şi deci în cazul acesta şi poziţia centrului de frecare Ω s-ar schimba. Totuşi şi în

acest caz el trebuie să aibă o poziție bine definită pe axa longitudinală a vehiculului care să rezulte din ecuațiile de echilibru ale forțelor de frecare de pe fiecare roată cu forțele exterioare care acționează asupra vehiculului. Aceste forțe exterioare sînt forța conducătoare K normală pe șină și forța de remorcare P a vehiculului. Ele trebuie să-și facă echilibru cu rezultanta forțelor de frecare F.

Se vede din figura 10 că acest echilibru se realizează atunci cînd rezultanta F a forțelor de frecare Qf, care în acest caz este perpendiculară pe axa longitudinală a vehiculului, trece prin punctul de intersecție al forțelor K și P. Acest lucru se va întîmpla numai pentru o anumită poziție a axei vehiculului, deci numai pentru un anumit unghi de atac K al osiei conducătoare, pentru care vehiculul va avea un echilibru stabil în timpul trecerii lui prin curbă. Deci poziția centrului de frecare Ω va fi bine determinată.

Valoarea unghiului de atac α al roții conducătoare se poate determina ușor din relația

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{M\Omega}}{R}.$$

Întrucît K are în general o valoare foarte mică (niciodată nu poate să depășească 2° pe căile normale), vom putea presupune că rezultanta forțelor de frecare F trece prin axa primei osii. Eroarea ar fi foarte mică, putînd fi apreciată prin calcul. Astfel pentru ecartamentul normal de 1,50 m și $\alpha = 2°$ vom avea

$$\overline{GM} = \frac{1{,}50}{2} \operatorname{tg}\alpha = 0{,}75 \times 0{,}03492 = 0{,}02619 \text{ m},$$

distanță care poate fi neglijată fără inconveniente, în raport cu ampatamentele vehiculelor care sînt de ordinul metrilor. Această aproximație fiind făcută, observăm că distanța $x_0 = \overline{M\Omega}$ nu mai depinde de valoarea unghiului de atac α și că ea este independentă de raza de curbură a căii. De asemenea, fără nici o eroare importantă, forța conducătoare K se poate considera egală cu rezultanta forțelor de frecare F. Pe baza acestei simplificări, determinarea poziției centrului de frecare Ω și a forțelor conducătoare se poate face fără dificultăți pe cale analitică sau chiar grafică.

Astfel, pentru un vagon pe două osii cu un ampatament $d = 4{,}5$ m, obținem poziția centrului de frecare la o distanță $x_0 = 4{,}9$ m, și o valoare a forței conducătoare $K = 1{,}7$ t.

Pe baza acestor elemente avem posibilitatea să determinăm și rezistența la înaintarea vagonului, datorită curbei, ținînd seamă de faptul că rezistența ne dă indicații prețioase asupra uzurii. Această rezistență R_c, este o forță care acționează pe direcția axei longitudinale a vagonului și care față de centrul curbei creează un moment $(R_c \cdot R)$, care echilibrează momentul de rotație a vagonului față de același centru. Adică avem relația

$$R_c = 1000 \frac{M}{R} \text{ kg}.$$

Dacă această rezistență o raportăm la greutatea totală a vagonului $4Q$, obținem rezistența specifică r_c, care în cazul exemplului mai sus considerat va avea valoarea $r_c = 2{,}43$ kg/t, corespunzătoare unei raze $R = 300$ m.

Dacă jocul osiei în cale nu este suficient pentru o dispunere aproximativ radială a osiei din urmă, atunci vehiculul nu va mai circula liber, așa cum am văzut pînă acum, ci roata dinapoi rulează, împinsă, cu baza bandajului

spre firul interior al căii cu o forţă K_2 (fig. 11) care va împiedica dispunerea radială a acestei osii. Această circulaţie o denumim *forţată* şi observăm că în acest caz vehiculul este ghidat în cale de ambele osii ale sale, cu alte cuvinte aici apar două forţe conducătoare.

La vehiculele cu mai multe osii, în scopul micşorării ampatamentului rigid şi pentru o mai uşoară aşezare a vehiculului în curbă, nu este neapărat necesar ca cea de a două forţă conducătoare să acţioneze asupra ultimei osii, ea poate acţiona şi asupra unei osii intermediare, celorlalte dîndu-le jocuri transversale corespunzătoare curbei, pe cît este posibil din punct de vedere constructiv, în aşa fel încît asupra acestor osii să nu acţioneze forţe conducătoare. Aceste jocuri se determină prin cunoscutele diagrame, circulare sau parabolice.

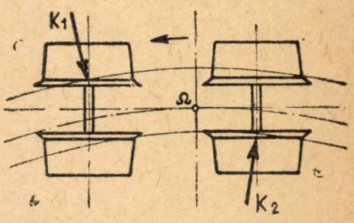


Fig. 11

Nu se pot da jocuri transversale osiilor motoare ale locomotivelor cu aburi, care nu permit acest lucru din motive mecanice şi constructive. Din lipsa acestei posibilităţi, atunci cînd necesitatea geometrică la înscriere în curbă o cere, se obişnuieşte să se subţieze în mod intenţionat buzele bandajelor, sau chiar să se desfiinţeze. Aceste osii cu jocuri transversale prezintă marele avantaj, că dacă jocurile sînt numai puţin supradimensionate faţă de necesar, ele nu vor mai da componentele transversale ale forţelor de frecare, rămînînd numai cele în planurile roţilor, care bineînţeles dînd momente mai mici faţă de centrul de frecare, vor da forţe conducătoare mai reduse şi prin urmare şi uzuri mai mici la buzele bandajelor de la roţile conducătoare, precum şi uzuri mai reduse pe suprafeţele de rulare ale bandajelor proprii.

În cazul circulaţiei forţate, vehiculul fiind ghidat în două puncte, poziţia centrului de frecare Ω se determină uşor, el găsindu-se la piciorul perpendicularei dusă din centrul de curbură pe axa vehiculului. Ca necunoscute, rămîn în acest caz numai două forţe conducătoare K_1, şi K_2.

Revenim la exemplul nostru de mai sus, considerînd vagonul circulînd în aceeaşi curbă cu $R = 300$ m, însă cu supralărgiri atît de reduse, încît circulaţia să fie neapărat forţată şi poziţia centrului de frecare Ω să fie, de exemplu, la $x_0 = 2{,}92$ m, obţinem pentru cele două forţe conducătoare, valorile $K_1 = 1{,}55$ t şi $K_2 = 1{,}43$ t.

Comparînd aceste rezultate cu cele obţinute la circulaţia liberă a vagonului, vom observa că pe lîngă forţa conducătoare foarte puţin micşorată de mai înainte, a mai apărut o nouă reacţie. Deci calea cu supralărgiri mici, la prima vedere ar părea dezavantajoasă. Chiar intuiţia ne conduce să credem că, pe o cale mai largă, vehiculul se înscrie mai uşor în curbă.

Trebuie însă să ţinem seama de faptul că unghiul de atac al osiei conducătoare scade la mersul forţat, faţă de mersul liber, în cazul în care mersul forţat îl obţinem din micşorarea supralărgirii în curbă. Cum uzura bandajului depinde de forţa conducătoare şi de unghiul de atac, unghiurile de atac mici sînt foarte avantajoase. De altfel însăşi rezistenţa la înaintare a vagonului în curbe pentru care aici obţinem valoarea $r_c = 1{,}98$ kg/t este sensibil mai mică decît în cazul anterior al circulaţiei libere, unde am găsit pentru acelaşi vehicul 2,43 kg/t.

Este deci foarte important, din punctul de vedere al uzurilor la bandaje şi şine, ca supralărgirile căii să fie reduse în aşa măsură, încît să dea o circulaţie forţată pentru majoritatea vehiculelor.

Pentru a ne convinge dacă un vehicul, cu un anumit ampatament, circulă liber sau forţat, putem utiliza următorul raţionament. Pentru a avea un mers liber, ultima osie trebuie să aibă posibilitatea să se deplaseze înspre interiorul curbei cu o distanţă y, în tendinţa ei naturală de a se dispune radial. Această distanţă $y = \overline{AB}$ o putem determina uşor din figura 12 unde am considerat ampatamentul $\overline{BD}$ al vehiculului redus la axa lui şi, la fel, calea am redus-o la axa ei, fiind reprezentată de cercul cu raza R. Din asemănarea triunghiurilor ABD şi BDC rezultă

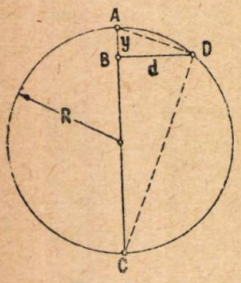


Fig. 12

$$\frac{y}{d} = \frac{d}{2R - y}$$

de unde, neglijînd y^2 faţă de $2\,R\,y$ se obţine

$$y \cong \frac{d^2}{2R}$$

Circulaţia vehiculului va fi liberă dacă acest y satisface condiţia

$$y \leqslant 2\,e,$$

unde $2\,e$ reprezintă jocul total al buzelor bandajelor în cale.

Considerînd jocul, în linie dreaptă, de 10 mm la care, în curbă, se adaugă supralărgirile care după actualul R.E.T. *) al căilor ferate din ţara noastră, sînt date în tabloul nr. 1, de unde în acelaşi timp rezultă şi ampatamentele maxime calculate după relaţia de mai sus pentru care este posibil mersul liber.

Tabloul nr. 1

R	500	400	300	250	200	150	m
Supralărgire	5	10	15	20	25		mm
$2\,e$	15	20	25	30	35		mm
$d = \sqrt{2R \cdot 2e}$	3,46	3,46	3,54	3,46	3,25		m

Din acest tablou rezultă că, curbele căilor ferate din ţara noastră permit un mers liber tuturor boghiurilor deoarece acestea pot avea ampatamente pînă la 3,6 m. Este bine ca supralărgirile să fie restrînse pînă într-atîta, încît circulaţia forţată să înceapă de la ampatamente de $2 \sim 2{,}5$ m încadrîndu-se în această categorie şi toate vagoanele noastre cu boghiuri. Or, pentru aceasta ar fi necesar ca supralărgirile să fie chiar desfiinţate la unele curbe cu raze mari şi mult reduse la cele cu raze mici.

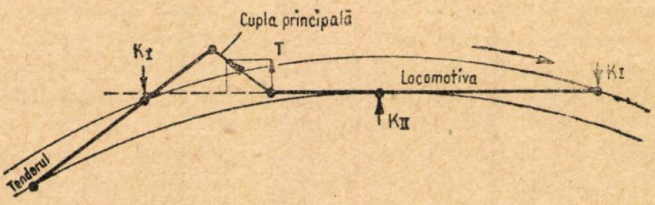
Această desfiinţare a supralărgirilor ar atrage după sine o restudiere a jocurilor transversale ale osiilor neconducătoare ale locomotivelor, modificări care s-ar putea realiza cu multă uşurinţă cu ocazia reparaţiilor cu ridicare de pe osii a acestor vehicule.

În cazul locomotivelor cu abur, în afară de măsurile constructive arătate mai sus, care urmăresc reducerea forţelor conducătoare, menţionăm că mai există cîteva măsuri de luat în acelaşi scop, a căror eficacitate este şi mai importantă.

*) Regulament de exploatare tehnică.

Astfel, trebuie să avem o grijă deosebită la dimensionarea dispozitivelor de rapel ale osiilor alergătoare radiale, bisseluri, bisseluri conjugate cu prima osie cuplară sau boghiuri care pe lîngă faptul că trebuie să preia şocurile de atac ale vîrfurilor acelor, sau ale unor neregularităţi orizontale ale căii, mai au şi menirea de a repartiza forţele conducătoare în mod aproximativ egal între osia conducătoare a acestor dispozitive şi prima osie cuplară a locomotivei, obţinîndu-se astfel reducerea acestor forţe pe fiecare roată conducătoare şi deci reducîndu-se prin aceasta uzurile corespunzătoare.

De asemenea, sistemul de acuplare între locomotivă şi tender trebuie să permită o aşezare naturală în curbă şi independentă, a celor două vehicule, orice forţare din partea acestuia fiind dăunătoare în circulaţia în curbă a sistemului locomotivă-tender. O importanţă deosebită o are în această privinţă, aşezarea cuplei principale, în aşa fel, încît componenţa transversală a forţei de tracţiune T să acţioneze către exteriorul curbei (fig. 13), dînd un moment în raport cu centrul de frecare de acelaşi sens cu momentul forţei conducătoare, deci să micşoreze



BUDAPESTI MŰSZAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Fig. 13

această forţă. Aceasta se realizează printr-o dimensionare potrivită a consolei tenderului.

În cazul vagoanelor, efectul forţei de remorcare este întotdeauna avantajos, deoarece componenta transversală a acestuia este de acelaşi sens cu forţa conducătoare şi deci micşorează efectul acestei forţe.

Tot aici trebuie amintit că s-au făcut încercări de a se utiliza la vehiculele de cale ferată, osii cu roţi independente, care se puteau roti faţă de osie prin intermediul unor lagăre cu rulmenţi. Scopul principal al încercării acestor roţi, a fost să se elimine alunecările din planurile roţilor. Rezultatele au fost însă negative, în sensul că uzurile constatate au fost cu foarte puţin mai reduse decît la roţile calate rigid pe osie, prezentînd chiar neregularităţi. Pe de altă parte, aceste osii au fost scoase repede din funcţiune, din cauză că ele suportă greu şocurile transversale primite din partea căii.

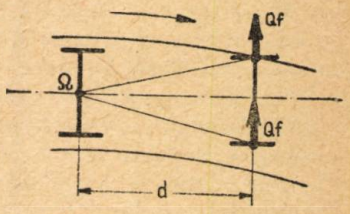


Fig. 14

Acest lucru rezultă chiar şi pe cale teoretică. Aşa cum este arătat în figura 14, centrul de frecare la aceste vehicule este aşezat întotdeauna pe ultima osie, care, în lipsa componentelor forţelor de frecare, are posibilitatea să se dispună perfect radial. Asupra vehiculului nu vor lucra decît numai componentele transversale ale forţelor de frecare pe osia din faţă. Rezultă că forţa conducătoare va fi dată de expresia

$$K = 2\,Qf.$$

Considerînd vagonul din exemplul de mai sus, prevăzut de data aceasta cu roţi independente, obţinem pentru forţa conducătoare

$$K = 5{,}72 \times 0{,}25 = 1{,}43 \text{ t},$$

adică, o valoare ceva mai mică decît aceea pe care am obţinut-o la prima osie în cazul circulaţiei forţate cu osii obişnuite, adică 1,55 t. Pentru rezistenţa specifică găsim $r_c = 1{,}9$ kg/t, în timp ce la circulaţia forţată cu osiile obişnuite am obţinut 1,98 kg/t. Această indicaţie este suficientă pentru a ne convinge că uzurile nu pot fi mult reduse prin utilizarea osiilor cu roţi independente. De aceea, avînd în vedere şi debilitatea lor constructivă ele nu se pot recomanda.

În studiul de mai sus, al forţelor ce se nasc între bandaje şi şine, noi am considerat că, în timpul rulării roţii pe şină, are loc o alunecare pură. Dar cercetări recente au stabilit că aceste alunecări pure nu există întotdeauna în timpul rulării, roata se poate deplasa lateral şi prin deformarea elastică a materialelor bandajului şi a şinei care vin în contact, fără nici o alunecare pură. Acest fenomen poartă numele de *pseudoalunecare* şi studiul lui a fost dezvoltat mult în tehnica rulării pneumaticelor de la automobile, unde el apare foarte accentuat şi evident. În cazul acesta, forţa care se naşte între bandaj şi şină nu mai este Qf, ci va avea o valoare proporţională cu deformaţiile elastice ale celor două materiale. Însă este evident că această forţă nu poate depăşi pe Qf. Cu alte cuvinte, dacă alunecarea devine atît de mare încît forţa datorită pseudoalunecării va deveni mai mare decît Qf, pseudoalunecarea încetează şi începe alunecarea pură.

Studiile şi experienţele făcute pînă în momentul de faţă, asupra fenomenelor de contact între roată şi şină la vehiculele de cale ferată, au condus la concluzia că pînă la unghiul de atac de circa 30′ este valabilă ipoteza pseudoalunecărilor, iar pentru unghiuri de atac mai mari este valabilă ipoteza alunecărilor pure.

Aplicarea acestor teorii în studiile noastre asupra uzurilor nu poate aduce modificări asupra concluziilor, cu atît mai mult cu cît se constată că uzurile prezintă importanţă în curbe cu raze mici, unde nu mai poate fi vorba de fenomene de pseudoalunecare, unghiurile de atac avînd în orice caz valori superioare celui de 30′.

În sfîrşit, ca o ultimă problemă, apare aceea a vagoanelor cu două osii orientabile, care actualmente constituie cea mai mare parte a parcului de vagoane din ţara noastră, motiv care ne şi îndeamnă să le privim cu o atenţie deosebită.

Prescripţiile internaţionale admit construcţia vagoanelor cu osii fixe, numai pînă la un ampatament de 4,5 m. La vagoanele cu un ampatament mai mare, între cutiile de grăsime şi furcile de osie, trebuie să existe un joc longitudinal şi transversal suficient de mare, pentru ca osiile în curbă să poată lua poziţii convergente, în direcţii radiale. Readucerea osiei în poziţia normală, perpendiculară pe axa longitudinală a vagonului, după ce el a ieşit din curbă, se face cu ajutorul arcului de suspensie. Forţa de readucere (rapel) se creează prin schimbarea înclinării suspensorilor de arc. De altfel această forţă de readucere se manifestă şi la mersul în linie dreaptă, în caz contrar, sub acţiunea unor forţe mici provenite de la cale, osia montată ar da mişcări neregulate sau în mod natural ar şerpui datorită conicităţii bandajelor.

Forţele care produc orientarea vagonului sînt tocmai forţele conducătoare care acţionează între buza bandajului şi şină. După cum arată calculul şi experienţa osia nu ia niciodată o poziţie riguros radială şi de aceea centrul de frecare va apărea întotdeauna la o distanţă oarecare de osie, diferită de zero. Determinarea forţelor conducătoare şi a poziţiei centrelor de frecare se poate face numai prin calcul, pe baza echilibrului forţelor care acţionează pe fiecare osie în parte, deci cu totul

diferit de vehiculele cu osii rigide. Aşa cum rezultă din figura 15, forţele care acţionează asupra osiei dinainte şi dinapoi sînt forţele conducătoare K_A, respectiv K_B şi forţele P, care creează momentul de rotire a cutiei vagonului în curbă, cutie care în sine este echilibrată; forţele vor fi egale şi de sens contrar. Întrucît, aşa cum se va vedea mai departe, valoarea lor în general este mică, iar unghiurile de rotire ale

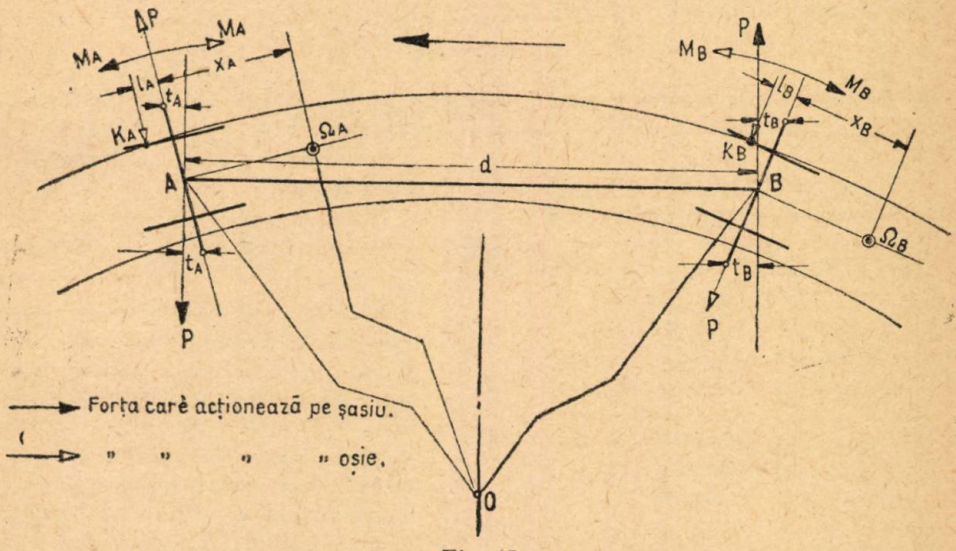


Fig. 15

osiilor fiind mici, rezultă că nu facem o eroare prea mare dacă considerăm că asupra osiilor acţionează aceleaşi forţe P ca şi asupra cutiei. În afară de aceasta, forţele longitudinale de rapel ale arcurilor de suspensiune, vor crea momentele M_A şi M_B, care acţionează asupra celor două osii în sensul indicat în figură, unde de la început am pus ipoteza că şi ultima osie atacă de asemenea firul exterior al căii.

Pe baza notaţiilor din figura 15, ecuaţiile de echilibru ale forţelor sînt următoarele:

Pentru şasiu

$$M_A = M_B + P\,d = 0. \tag{4}$$

Pentru osia A, suma momentelor în raport cu centrul instantaneu de rotaţie Ω_A, ne dă

$$K_A\,(l_A + x_A) - P x_A - M_A - 2Qf\,\sqrt{x_A^2 + a^2} = 0, \tag{5}$$

iar suma proiecţiilor forţelor pe direcţia lui K ne dă

$$K_A = P + 2\,Qf\,\frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + a^2}} \tag{6}$$

Pentru osia B, avem aceleaşi ecuaţii de momente şi proiecţii

$$K_B\,(l_B + x_B) + P x_B + M_B - 2Qf\,\sqrt{x_B^2 + a^2} = 0 \tag{7}$$

$$K_B = -\,P + 2Qf\,\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + a^2}} \tag{8}$$

Pentru determinarea momentelor care apar în aceste ecuaţii şi care am văzut că se produc prin devierea osiilor din poziţia medie perpendiculară pe axa longitudinală a vagonului, trebuie cunoscută în prealabil, valoarea forţelor de rapel produse de suspensiunile arcurilor aşezate deasupra cutiilor de grăsime. Forţa de rapel longitudinală T produsă prin deplasarea t a centrului osiei (fig. 16) se determină cu ajutorul relaţiei

$$T = t \cdot Q' \cdot m$$

unde Q' este sarcina arcuită pe roată care se ia de obicei 85% din sarcina statică Q, iar m este coeficientul de rapel, adică forţa de rapel la $Q' = 1$ şi $t = 1$.

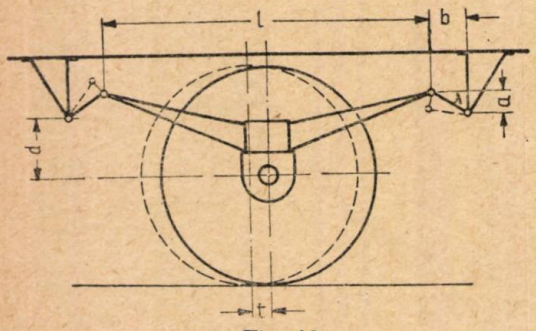


Fig. 16

Valoarea lui m se determină din expresia

$$m = \frac{l^2 \lambda^2 + 2b^3 l - 4ab^2 d}{a(al + 2b\,d)^2} \text{ (1/mm)},$$

dedusă pe cale cinematică, după metodele curente cunoscute din teoria mecanismelor, valabil însă numai pentru deplasările mici ale centrului osiei. Observăm că el depinde numai de elementele suspensiei, prin urmare va avea aceeaşi valoare pentru toate cele patru arcuri ale vagonului. Deoarece planurile verticale longitudinale, în care lucrează forţele de rapel, trec prin centrele fuselor de osii, care la vagoanele C.F.R., s-au stabilit la 2 000 mm, vom avea

$$M_A = 2\,000\ t_A Q' m \qquad \text{(t mm)} \qquad (9)$$

$$M_B = 2\,000\ t_B Q' m \qquad \text{(t mm)} \qquad (10)$$

Valorile deplasărilor t_A respectiv t_B, depind la rîndul lor de distanţele X_A respectiv X_B la centrele de frecare.

Această dependenţă se stabileşte geometric din figura 15, de unde prin simplificări se ajunge la expresiile

$$t_A = 1\,000 \frac{\frac{d}{2} - X_A}{R} \qquad (11)$$

$$t_B = 1\,000 \frac{\frac{d}{2} + X_B}{R}. \qquad (12)$$

Pentru o rezolvare mai uşoară a ecuaţiilor (4)...(8) introducem pe K_A din ecuaţia (6) în ecuaţia (5) şi rezolvăm ecuaţia astfel obţinută în raport cu P. De asemenea introducem K_B din ecuaţia (8) în ecuaţia (7) şi rezolvăm tot în raport cu P. Egalînd ambele expresii pentru P obţinem

$$P = \frac{1}{l_A}\left(M_A - 2Qf\frac{l_A X_A - a^2}{\sqrt{X_A^2 + a^2}}\right) = \frac{1}{l_B}\left(M_B - 2Qf\frac{a^2 - l_B X_B}{\sqrt{X_B^2 + a^2}}\right) \qquad (13)$$

Ecuaţiile (4), (13) ne dau posibilitatea determinării valorilor tuturor necunoscutelor X_A, t_A, X_B, t_B, P, K_A şi K_B, numai prin tatonări, admiţînd de la început un X_A aproximativ, care apoi trebuie să verifice ecuaţiile.

Calculul se face prin diferite raze de curbură din ce în ce mai mici. Vom putea observa că K_B scade repede cu micşorarea razei de curbură a căii şi pentru un anumit R devine egal cu O. Dacă raza curbei coboară sub această valoare, buza bandajului de pe roata exterioară a osiei din urmă nu va mai avea contact cu şina exterioară. În cazul acesta, condiţiile de echilibru stabilite anterior se vor schimba. Deci şi ecuaţiile (4), (13) trebuie refăcute pentru noile condiţii. Nu vom insista asupra acestei probleme, întrucît metoda de stabilire a ecuaţiilor este aceeaşi. De la o anumită rază în jos va avea loc atacul firului interior cînd condiţiile de echilibru de asemenea se schimbă.

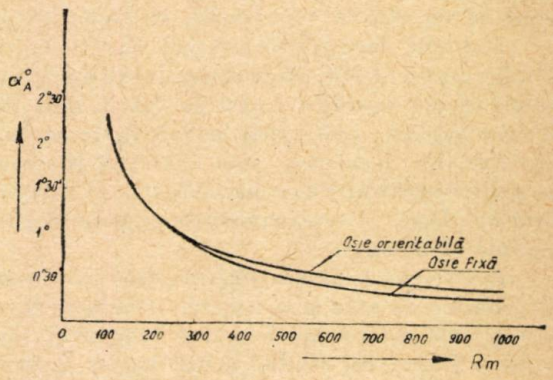


Fig. 17

Executînd acest calcul pentru un vagon de marfă acoperit, cu două osii, din parcul C.F.R. (seria G^D) cu tara de 13 900 kg şi ampatamentul de 7 m, în comparaţie cu un vagon cu osii fixe avînd acelaşi ampatament de 7 m, în ipoteza că acest vagon pentru toate razele de curbură circulă forţat, pe baza datelor calculate se pot trasa diagramele din figurile 17 şi 18.

În figura 17 sînt trasate curbele de variaţie ale unghiului de atac în funcţie de raza de curbură a căii la osia din faţă în ambele ipoteze, adică cu osia fixă sau orientabilă, iar în figura 18 sînt trasate curbele de variaţie ale forţelor conducătoare în funcţie de raza de curbură a căii, de asemenea în ambele ipoteze.

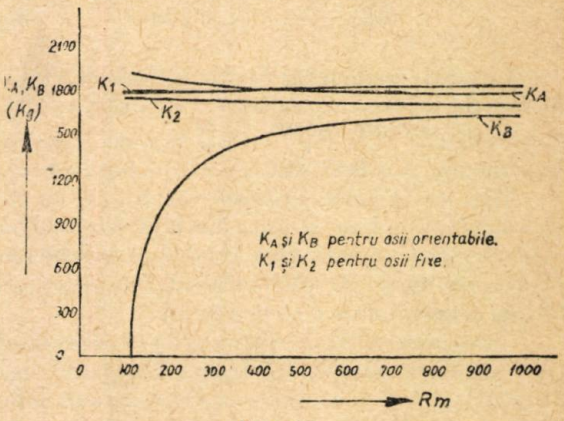


Fig. 18

Din aceste două diagrame, precum şi din calculul variaţiei lui X_B, se poate vedea foarte uşor că ultima osie a vagonului, cu osii orientabile, tinde către o poziţie aproximativ radială. În schimb osia din faţă, observăm că, în mod surprinzător ne dă unghiuri de atac ceva mai mari decît aceeaşi osie a vagonului cu osii fixe, cele două curbe confundîndu-se aproximativ la raze sub 200 m. De asemenea la această osie se constată că forţa conducătoare K_A la raze mai mici de circa 500 m este mai mare decît forţa conducătoare K_1 a osiei fixe. În consecinţă, conform calculului şi uzurile ar urma să fie mai mari în cazul osiei din faţă realizată ca osie orientabilă, faţă de uzurile aceleiaşi osii realizată ca osie fixă. În ceea ce priveşte osia din urmă cu toate că forţa conducătoare K_B

este tot timpul inferioară lui K_2 (fig. 18), totuși, în cazul osiei orientabile, ea atacînd firul exterior al căii sub un anumit unghi de atac, sînt de așteptat de asemenea uzuri mai mari.

Iată că nu mai poate fi vorba de celebra ipoteză a *autoghidării* radiale a osiilor orientabile, care ar putea fi valabilă eventual pentru ultima osie, însă în nici un caz pentru prima, care a stat la baza dispozițiilor internaționale, pentru construirea vagoanelor cu osii fixe numai pînă la un ampatament de 4,5 m. Se pare că dacă vrem să scăpăm de uzuri mari, va trebui să protestăm contra acestei dispoziții.

De altfel, dacă privim relațiile (4), (8) observăm că pozițiile centrelor de frecare sînt în funcție de $2Qf$, adică de sarcini pe osie și de coeficientul de frecare. Cum aceste valori se pot modifica destul de des în cale, înseamnă că și mersul prin curbe a acestor vagoane este foarte neliniștit, lucru care nu se întîmplă la vagoanele cu osii fixe. De asemenea, este neliniștit și mersul lor în linie dreaptă, din cauza șerpuirii nestînjenite a osiilor montate, care, după cum am văzut, creează și o mărire a uzurilor. Deci, toate argumentele se pare că tind spre convingerea că acest sistem trebuie abandonat.

Pentru concluzii mai generale, din care să rezulte și influența altor factori asupra unghiurilor de atac și a forțelor conducătoare la aceste vagoane cu osii orientabile, cum ar fi ampatamentul vagonului, sarcina pe osie și valoarea forței de rapel a suspensiei, studiul a fost extins la următoarele șase serii de vagoane de marfă pe două osii din parcul de vagoane C.F.R.

Seria	*ampatament*	*tara*	*Incărcătura*
G^{DDEFF}	7,4 m	14 200 kg	15 000 kg
N_T^{DFF}	9 m	11 800 kg	15 000 kg
E^F	6,5 m	15 400 kg	15 000 kg
I_T^{DFF}	6,2 m	9 000 kg	15 000 kg
G_V^{SHF}	6 m	11 600 kg	20 000 kg
G_V^W	5 m	8 600 kg	15 000 kg

Variațiile unghiurilor de atac ale osiei din față precum și ale forțelor conducătoare în funcție de raza de curbură a căii sînt redate în figurile 19 și 20 numai pentru vagoanele G^{DDEFF}, G_V^{SHF} și G_V^W pentru care am obținut rezultatele cele mai concludente. Curbele sînt trasate pe baza calculelor de mai sus.

Din aceste două diagrame rezultă că, cu cît ampatamentul este mai mare, cu atît unghiul de atac al osiei din față este mai mare, de asemenea și forțele conducătoare sînt mai mari, ceea ce conduce la uzuri mai puternice. Din figura 20 rezultă că sarcina mare pe osie influențează nefavorabil asupra uzurilor, în sensul că forțele conducătoare sînt mai mari.

În ceea ce privește valoarea coeficientului de rapel m al suspensiei în calcule, s-a considerat $m = 0{,}007$ 1/mm. S-a putut ușor constata prin cîteva încercări de calcul că, cu cît m este mai mare, cu atît osia din urmă va începe atacul firului interior al căii pentru un ampatament mai mic și raze de curbură a căii mai mari. Dacă el este mai redus, la curbele cu raze mici pentru osia din față obținem unghiuri de atac mari. De aceea se pare că valorile optime pentru coeficientul de rapel m trebuie să se găsească între limitele 0,006—0,007 1/mm.

Pentru completarea studiului de mai sus, menționăm că se impune necesitatea unor experiențe metodic conduse și pe o scară largă, pentru a se verifica rezultatele calculelor.

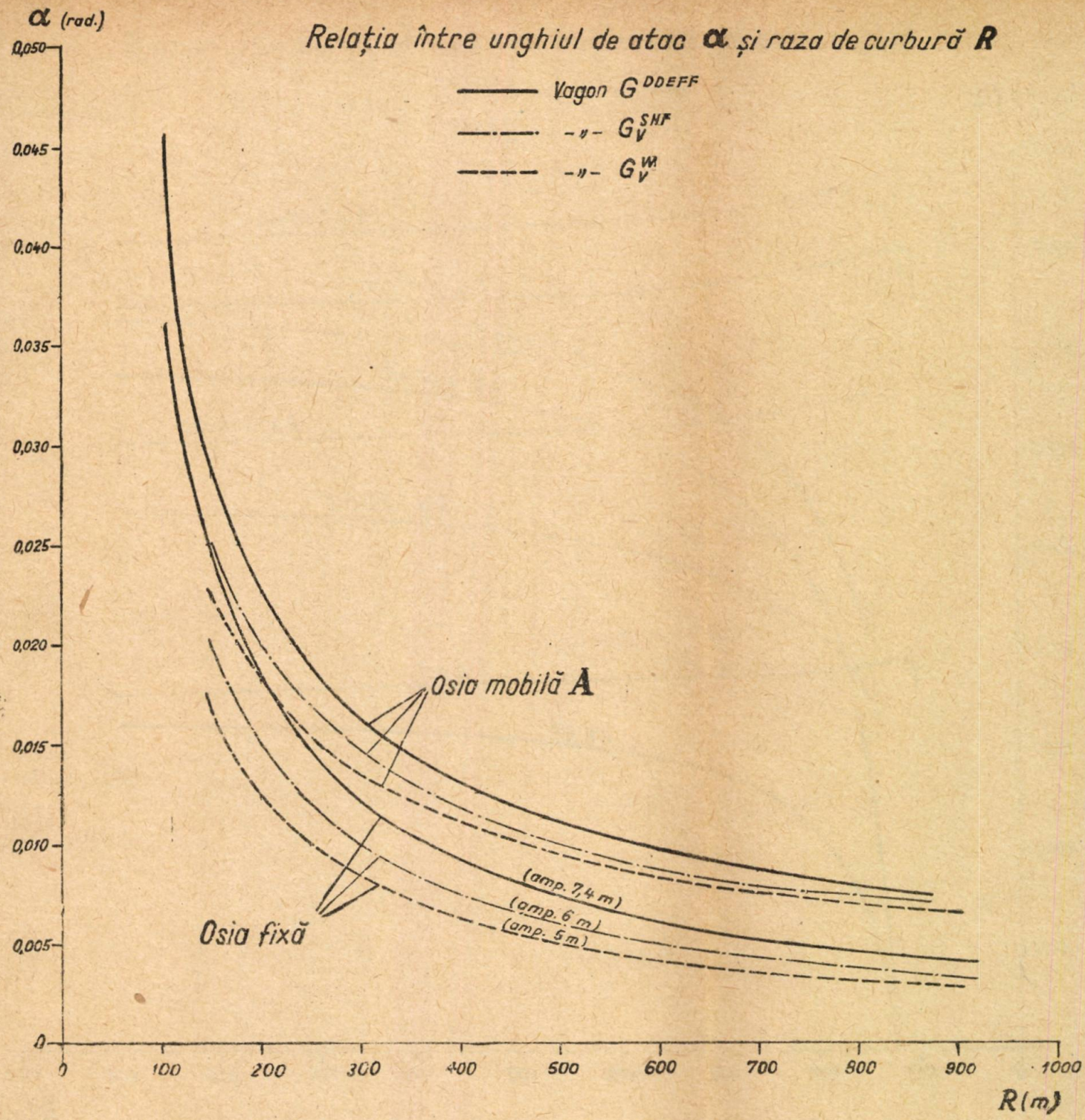

α (rad.)
Relația între unghiul de atac α și raza de curbură R
Vagon G^{DDEFF}
-»- G_V^{SHF}
-»- G_V^{W}
0,050
0,045
0,040
0,035
0,030
0,025
0,020
0,015
0,010
0,005
0
Osia mobilă A
Osia fixă
(amp. 7,4 m)
(amp. 6 m)
(amp. 5 m)
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
R(m)

Fig. 19

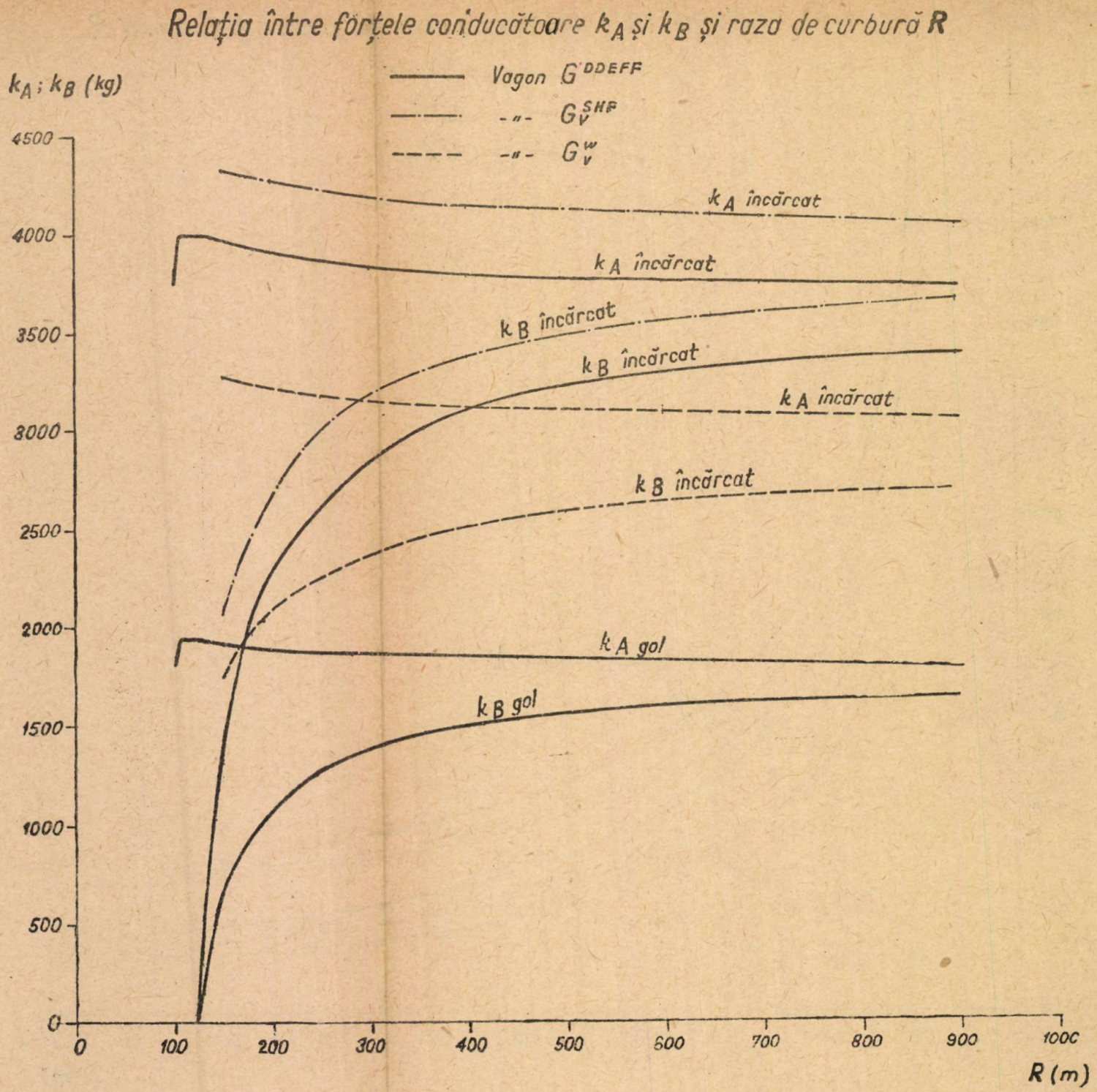

Relația între forțele conducătoare k_A și k_B și raza de curbură R
k_A ; k_B (kg)
Vagon G^{DDEFF}
-"- G_V^{SHF}
-"- G_V^W
k_A încărcat
k_A încărcat
k_B încărcat
k_B încărcat
k_A încărcat
k_B încărcat
k_A gol
k_B gol
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
R (m)

Fig. 20

Din cele expuse însă în linii generale, în lucrarea de faţă, se desprind următoarele concluzii:

În combaterea uzurilor de la bandajele roţilor de la vehiculele de cale ferată şi ale şinelor, există încă rezerve suficiente. Aceste rezerve constau în măsuri de ordin constructiv care trebuie luate asupra elementelor căii şi a vehiculelor. Problema este ceva mai dificilă, în ceea ce priveşte vehiculele, deoarece necesită un studiu aprofundat pentru fiecare tip de vehicul. Acestea însă, odată făcute şi aplicate, vor conduce la economii importante pentru calea ferată.

ИЗНОС БАНДАЖЕЙ И РЕЛЬС

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе подробно исследуются изменения формы колесных бандажей железнодорожного подвижного состава и рельс вследствие износа, наиболее важные причины их вызывающие и меры конструктивного и металлургического порядка, необходимые для их устранения.

Износ и их причины исследуются в отношении жестких и самоустанавливающихся осей подвижного состава с различными видами сцепления и циркулирующего как по прямым линиям, так и изогнутым.

В заключении автор указывает на влияние постройки пути и его надстроек, нагрузки на оси подвижного состава, системы сцепки и в особенности продольной и поперечной игры осей.

L'USURE DES BANDAGES ET DES RAILS

(RÉSUMÉ)

On étudie en détail, dans ce travail, les modifications de forme dues à l'usure des bandages des roues des véhicules et à celle des rails des voies ferrées, ainsi que les causes les plus importantes qui les produisent et les mesures d'ordre constructif et métallurgique à prendre pour les éviter.

Les usures et leurs causes sont étudiées pour des véhicules aux essieux rigides ou pivotants, pourvus de différents dispositifs d'accouplement et circulant tant en ligne droite qu'en ligne courbe.

On en conclut à l'influence du mode de construction de la superstructure de la voie (surhaussement et élargissement), des pressions sur l'essieu des systèmes d'accouplement des véhicules et, en particulier, à l'influence du jeu longitudinal et transversal des essieux des véhicules.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Drimer, Analele C.F.R., ianuarie-martie 1950, p. 153.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

CONSIDERAŢII ASUPRA CALCULULUI LAGĂRELOR FĂRĂ JOC RADIAL

DE

V. N. CONSTANTINESCU

În cazul lagărelor fără joc radial cuzinetul este păsuit pe fus, în aşa fel încît jocul radial este nul. În timpul funcţionării (fig. 1), centrul A al fusului ia o poziţie diferită de centrul A' al cuzinetului, iar între fus şi cuzinet se formează un film de ulei de grosime

$$\delta = e \cos \theta, \tag{1}$$

e fiind excentricitatea dintre fus şi cuzinet.

Plecînd de la ecuaţia diferenţială a mişcării în pelicula de lubrifiant [1], pentru lagărele fără joc radial se poate deduce repartiţia exactă de presiuni [2], care, în sistemul de axe $x = r\theta$, y, z, planul xy fiind situat la jumătatea lagărului, se poate pune în mod aproximativ, însă suficient de exact, sub o formă utilizabilă practic

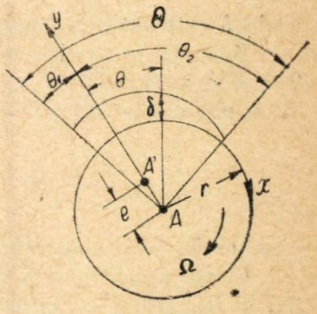


Fig. 1

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1\Omega r^2}{e^2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda}\right)\left[\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+\pi k \operatorname{tg}\theta + C_2\right] +$$

$$+\frac{12\mu_1\Omega r^2}{e^2\cos\theta}\left\{\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda} - \frac{\operatorname{ch} 1{,}732\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 1{,}732\,\lambda}\right)\frac{1 \pm 1{,}273\,C_2}{3}\sin 2\theta + \right. \tag{2}$$

$$+\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda} - \frac{\operatorname{ch} 3{,}873\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}873\,\lambda}\right)\frac{-1 \pm 2{,}546\,C_2}{15}\sin 4\theta +$$

$$\left. +k\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda} - \frac{\operatorname{ch} 0{,}703\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 0{,}703\,\lambda}\right)\sin 1{,}222\,\theta + \right.\right.$$

$$+\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3{,}063\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}063\,\lambda}\right)\sin 3{,}222\,\theta\Bigg]- \tag{2}$$

$$-0{,}75\,k\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3{,}296\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}296\lambda}\right)\sin 3{,}444\,\theta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 5{,}352\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}352\,\lambda}\right)\sin 5{,}444\,\theta\right]\Bigg\},$$

în care p_0 este presiunea atmosferică exterioară, μ_1 viscozitatea uleiului la intrarea în lagăr ($\theta = -\theta_1$), Ω viteza unghiulară de rotaţie a fusului, r raza fusului, iar λ este alungirea lagărului

$$\lambda = \frac{b}{2r}, \tag{3}$$

unde b este lăţimea lagărului.

Semnul $\pm$ care afectează unii termeni ai relaţiei (2) trebuie considerat $+$pentru $\theta < \theta < \pi$ şi $-$ pentru $-\pi < \theta < 0$; C_2 şi k sînt două constante arbitrare ce se pot determina punînd următoarele condiţii la limită

$$\text{la } \theta = -\theta_1;\ \theta = \theta_2 \text{ şi } z = 0{,}2b;\ p = p_0, \tag{4}$$

alese astfel încît abaterile de la repartiţia reală a presiunilor să fie minime [2].

Constantele C_2 şi k depind de alungirea λ a lagărului şi de unghiurile extreme θ_1, şi θ_2, sau dacă notăm

$$\nu = \frac{\theta_2}{\Theta}, \tag{5}$$

depind de λ, ν şi Θ adică

$$k = k\ (\lambda,\ \nu,\ \Theta);\ C_2 = C_2\ (\lambda,\ \nu,\ \Theta), \tag{6}$$

a căror variaţie în funcţie de unghiul de înfăşurare al cuzinetului Θ, avînd λ şi ν ca parametri este arătată în figurile 2 şi 3.

Din examinarea diagramelor din figurile 2 şi 3 se vede că, atunci cînd $\Theta \to \frac{\pi}{2\nu}$, adică în cazul limită pînă la care funcţionarea în regim hidrodinamic mai este posibilă $\left(\theta_2 \to \frac{\pi}{2}\right)$, k tinde către zero, iar C_2 creşte foarte mult tinzînd către o limită finită.

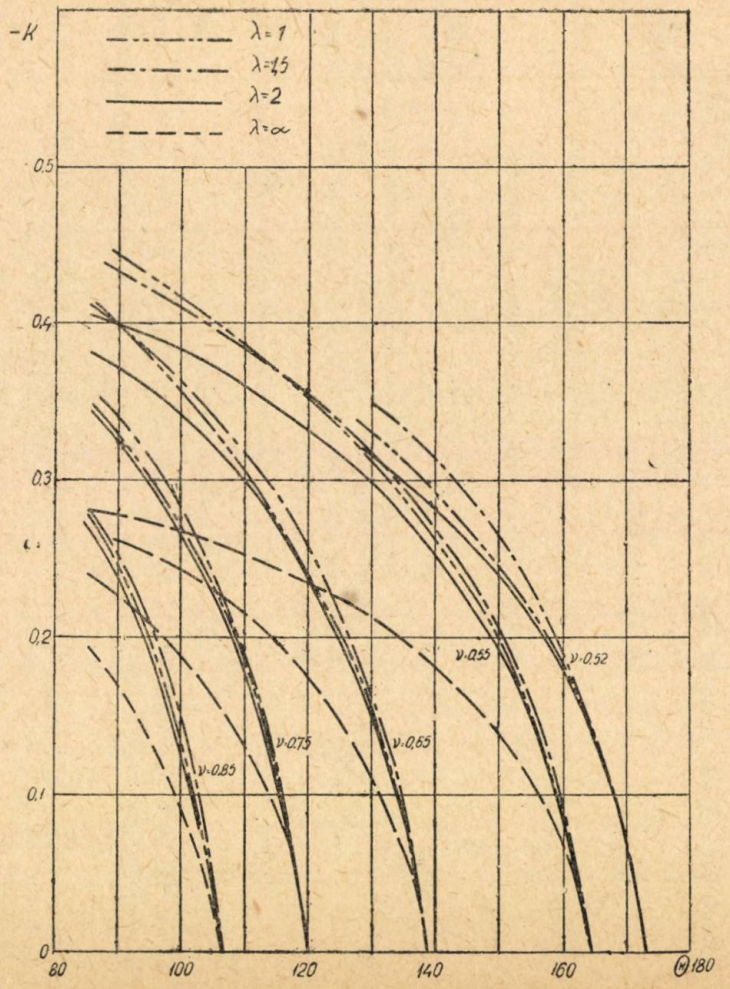

-K
λ=1
λ=1,5
λ=2
λ=∞
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
80
100
120
140
160
Θ 180
ν=0,85
ν=0,75
ν=0,65
ν=0,55
ν=0,52

Fig. 2

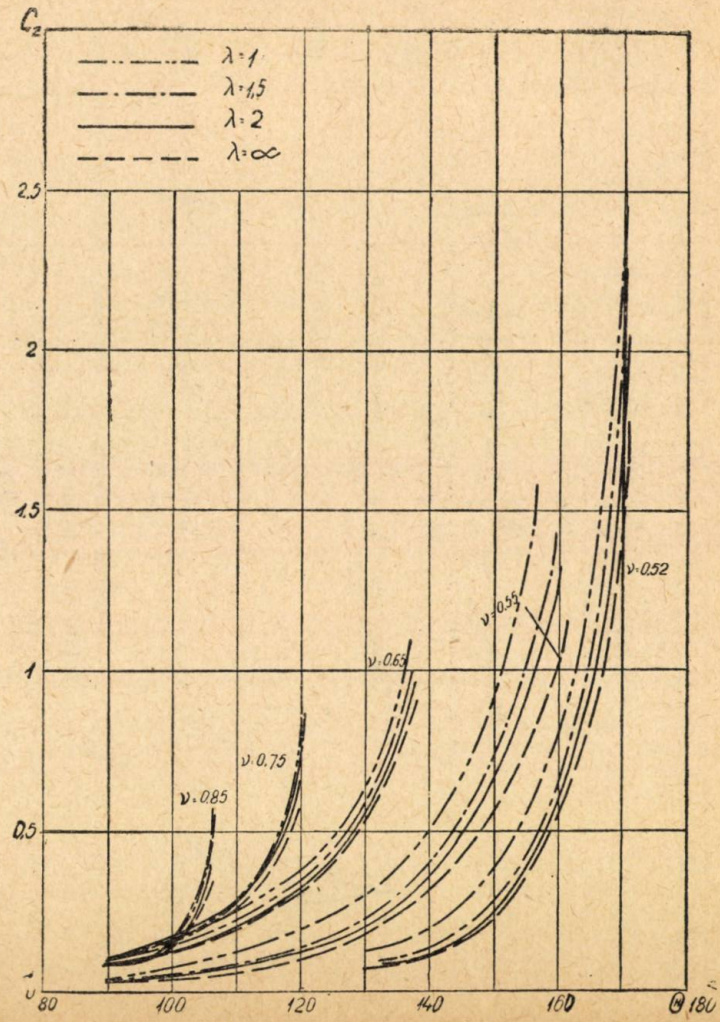

C_z
λ=1
λ=1,5
λ=2
λ=∞
2,5
2
1,5
1
0,5
0
80
100
120
140
160
Θ 180
ν=0,85
ν=0,75
ν=0,65
ν=0,55
ν=0,52

Fig. 3

Într-adevăr, de exemplu, C_2 și k în cazul $\lambda = \infty$ au respectiv valoarea

$$k = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_2}{2}\right)-\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\theta_2+\operatorname{tg}_1} \tag{7}$$

și

$$C_2 = -\frac{\operatorname{tg}\theta_1\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_2}{2}\right)+\operatorname{tg}\theta_2\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\theta_2+\operatorname{tg}\theta_1}, \tag{8}$$

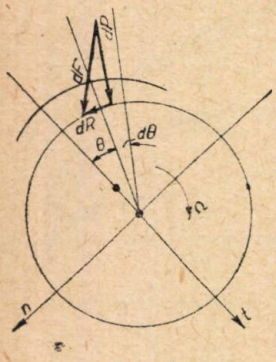


Fig. 4

care, cînd $\theta_2 \to \frac{\pi}{2}$ devin egale cu

$$\lim_{\theta_2 \to \frac{\pi}{2}} k = 0 \tag{9}$$

și

$$\lim_{\theta_2 \to \frac{\pi}{2}} C_2 = -\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right). \tag{10}$$

Pentru o alungire λ oarecare, raționamentul este întru totul analog.

Pe o suprafață elementară

$$ds = r\,d\theta\,dz, \tag{11}$$

acționează o forță normală (fig. 4)

$$dP = (p - p_0)\,ds \tag{12}$$

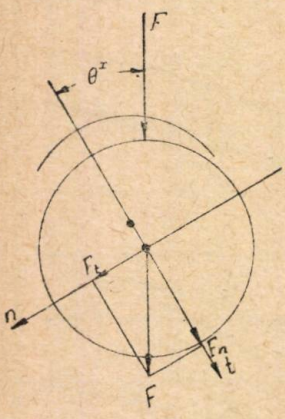


Fig. 5

și una de frecare

$$dR = \tau ds = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} dS, \tag{13}$$

în care μ este viscozitatea locală a uleiului [2]

$$\mu = \mu_1\frac{\delta}{\delta_1}\,; \quad \delta_1 = e\cos\theta_1, \tag{14}$$

iar u este viteza uleiului în direcția axei x (fig. 1).

Forța elementară rezultantă dF are, în raport cu un sistem de axe format din linia centrelor și o normală pe ea, proiecțiile

$$dF_n = dP\sin\theta + dR\cos\theta \tag{15}$$

și

$$dF_t = dP\cos\theta - dR\sin\theta, \tag{16}$$

în așa fel încît proiecțiile F_n și F_t ale sarcinii F (fig. 5), pe care trebuie să o suporte lagărul, vor fi egale cu

$$F_n = \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p - p_0)\,r\sin\theta\,d\theta\,dz + \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\cos\theta\,d\theta\,dz \tag{17}$$

și

$$F_t = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p - p_0) r \cos\theta \, d\theta \, dz - \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sin\theta \, d\theta \, dz, \tag{18}$$

iar unghiul θ^* dintre linia centrelor și direcția sarcinii va fi definit de relația

$$\operatorname{tg}\theta^* = \frac{F_n}{F_t}. \tag{19}$$

Într-o primă aproximație se poate neglija efectul frecărilor, așa că relațiile (17) și (18) iau forma

$$F_n = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p - p_0) r \sin\theta \, d\theta \, dz \tag{20}$$

și

$$F_t = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p - p_0) r \cos\theta \, d\theta \, dz. \tag{21}$$

Pentru calculul sarcinii F să observăm mai întîi că în relația (20) intervin integrale de forma

$$I = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \sin h\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta, \tag{22}$$

în care h este un număr irațional, iar limitele θ_1 și θ_2 sînt oarecare. În aceste condiții integrala (20) nu se poate efectua exact; ea se poate efectua însă aproximativ în felul următor:

Pentru intervalul $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ se poate pune

$$\operatorname{tg}\theta \cong \frac{1}{1 - e^{\theta - \frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}} + \frac{\theta}{2}, \tag{23}$$

care reprezintă aproape exact tgθ. Dezvoltînd prima fracție în serie [3], obținem

$$\frac{1}{1 - e^{\theta - \frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}} - \frac{B_2}{2!}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{B_4}{4!}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{B_6}{6!}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^5 - \ldots - (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} - \ldots, \tag{24}$$

în care B_{2n} sînt numere Bernoulli. Seria (24) este convergentă pentru toate valorile $\theta - \frac{\pi}{2} < 2\pi$ sau $\theta < \frac{3\pi}{2}$. Cum în cazul de față întotdeauna $\theta < \frac{\pi}{2}$, conver-

genţa seriei (24) este foarte rapidă. Luînd primii termeni ai dezvoltării se obţine

$$\frac{1}{1-e^{\theta-\frac{\pi}{2}}} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta-\frac{\pi}{2}} - \frac{B_2}{2!}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), \tag{25}$$

sau

$$\operatorname{tg}\theta \cong \frac{1}{2}\left(1-\pi\frac{B_2}{2!}\right) - \frac{1}{1-e^{-\pi/2}} + \left(\frac{1}{2}-\frac{B_2}{2!}\right)\theta - \frac{1}{\theta-\frac{\pi}{2}}, \tag{26}$$

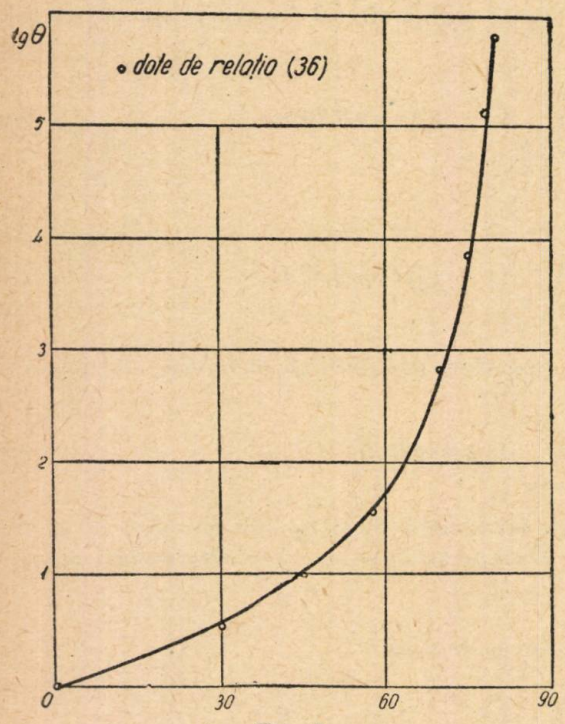


Fig. 6

în care $B_2 = \frac{1}{6}$.

Din diagrama (fig. 6) se poate constata că în tot intervalul, erorile sînt neglijabile.

În acest caz notînd cu

$$a = \frac{1}{2}\left(1+\pi\frac{B_2}{2!}\right) - \frac{1}{1-e^{-\pi/2}} \tag{27}$$

şi

$$b = \frac{1}{2} - \frac{B_2}{2!}, \tag{28}$$

vom avea

$$\operatorname{tg}\theta = a + b\theta - \frac{1}{\theta-\frac{\pi}{2}}, \tag{29}$$

pentru intervalul $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, şi

$$\operatorname{tg}\theta = -a + b\theta - \frac{1}{\theta+\frac{\pi}{2}}, \tag{30}$$

pentru intervalul $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$.

În acest mod integrala nedefinită capătă forma

$$I = \frac{b}{h^2}\sin h\,\theta - \frac{1}{h}(a+b\theta)\cos h\theta - \cos h\frac{\pi}{2}\,\text{şi}\; h\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) - \tag{31}$$

$$-\sin h\frac{\pi}{2}\,\text{ci}\; h\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

Integrala între limitele $-\theta_1$ și θ_2 se obține integrînd de la $-\theta_1$ la 0 și apoi de la 0 la θ_2,

$$I=\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\sin h\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta=2\frac{a}{h}+\frac{b}{h^2}(\sin h\theta_2+\sin h\,\theta_1)- \tag{32}$$

$$-\frac{1}{h}[(a+b\theta_2)\cos h\theta_2+(a+b\theta_1)\cos h\theta_1]+\cos h\frac{\pi}{2}\left[-2\,\mathrm{si}\,h\frac{\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\mathrm{si}\,h\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\,h\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\right]+\sin h\frac{\pi}{2}\left[2\,\mathrm{ci}\,h\frac{\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\mathrm{ci}\,h\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{ci}\,h\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\right].$$

Dacă proiecțiile F_n și F_t se pun sub forma

$$F_n=\frac{2\mu_1\Omega br}{\psi^2}C_n \tag{33}$$

și

$$F_t=\frac{2\mu_1\Omega br}{\psi^2}C_t, \tag{34}$$

în care $\psi=\frac{e}{r}$ este excentricitatea relativă, coeficienții adimensionali C_n și C_t au, respectiv valoarea

$$C_n=3\left(1-\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}\right)\left\{\cos\theta_1\,\mathrm{logtg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)-\cos\theta_2\,\mathrm{logtg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_2}{2}\right)+\right.$$

$$+\theta_1+\theta_2-\pi k\left[\sin\theta_1+\sin\theta_2+\mathrm{logtg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)-\mathrm{logtg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+C_2(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\right]\right\}+2\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,1{,}732\lambda}{1{,}732\lambda}\right)\left[(1-1{,}273C_2)\right.$$

$$\left.\left(\theta_1-\frac{\sin 2\theta_1}{2}\right)+(1+1{,}273\,C_2)\left(\theta_2-\frac{\sin 2\theta_2}{2}\right)\right]- \tag{35}$$

$$-\frac{2}{5}\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,3{,}873\lambda}{3{,}873\lambda}\right)\left[(1+2{,}546\,C_2)\left(\sin 2\theta_1-\theta_1-\frac{\sin 4\theta_1}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+(1-2{,}546\,C_2)\left(\sin 2\theta_2-\theta_2-\frac{\sin 4\theta_2}{4}\right)\right]+$$

$$+6k\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,0{,}703\lambda}{0{,}703\lambda}\right)\left\{\frac{2a}{1{,}222}+\frac{5}{12\times 1{,}222^2}(\sin 1{,}222\,\theta_1+\right.$$

$$\left.+\sin 1{,}222\,\theta_2)-\frac{1}{1{,}222}\left[\left(a+\frac{5}{12}\theta_2\right)\cos 1{,}222\,\theta_2+\right.\right.$$

$$+\left(a+\frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 1{,}222\,\theta_1\Big]+\cos 1{,}222\frac{\pi}{2}\Big[-2\,\mathrm{si}\,1{,}222\frac{\pi}{2}-$$

$$-\mathrm{si}\,1{,}222\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\,1{,}222\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]+\sin 1{,}222\frac{\pi}{2}\Big[2\,\mathrm{ci}\,1{,}222\frac{\pi}{2}-$$

$$-\mathrm{ci}\,1{,}222\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{ci}\,1{,}222\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]\Big\}+6k\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,3{,}063\lambda}{3{,}063\lambda}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{2a}{3{,}222}+\frac{5}{12\times 3{,}222^2}(\sin 3{,}222\,\theta_1+\sin 3{,}222\,\theta_2)-\right.$$

$$-\frac{1}{3{,}222}\Big[\left(a+\frac{5}{12}\theta_2\right)\cos 3{,}222\,\theta_2+\left(a+\frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 3{,}222\,\theta_1\Big]+$$

$$+\cos 3{,}222\frac{\pi}{2}\Big[-2\,\mathrm{si}\,3{,}222\frac{\pi}{2}-\mathrm{si}\,3{,}222\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\mathrm{si}\;3{,}222\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]+\sin 3{,}222\frac{\pi}{2}\Big[2\,\mathrm{ci}\,3{,}222\frac{\pi}{2}-\mathrm{ci}\,3{,}222\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\mathrm{ci}\,3{,}222\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]\Big\}-4{,}5\,k\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,3{,}296\lambda}{3{,}296\lambda}\right)\left\{\frac{2a}{3{,}444}+\right.$$

$$+\frac{5}{12\times 3{,}444^2}(\sin 3{,}444\,\theta_1+\sin 3{,}444\,\theta_2)-\frac{1}{3{,}444}\Big[\left(a+\frac{5}{12}\theta_2\right)\cos 3{,}444\,\theta_2+$$

$$+\left(a+\frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 3{,}444\,\theta_1\Big]+\cos 3{,}444\frac{\pi}{2}\Big[-2\,\mathrm{si}\,3{,}444\frac{\pi}{2}-$$

$$-\mathrm{si}\,3{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\;3{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]+\sin 3{,}444\frac{\pi}{2}\Big[2\,\mathrm{ci}\,3{,}444\frac{\pi}{2}-$$

$$-\mathrm{ci}\,3{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{ci}\,3{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]\Big\}-$$

$$-4{,}5\,k\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}915\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,5{,}352\lambda}{5{,}352\lambda}\right)\left\{\frac{2a}{5{,}444}+\frac{5}{12\times 5{,}444^2}(\sin 5{,}444\,\theta_1+\right.$$

$$+\sin 5{,}444\,\theta_2)-\frac{1}{5{,}444}\Big[\left(a+\frac{5}{12}\theta_2\right)\cos 5{,}444\,\theta_2+$$

$$+\left(a+\frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 5{,}444\,\theta_1\Big]+\cos 5{,}444\frac{\pi}{2}\Big[-2\,\mathrm{si}\,5{,}444\frac{\pi}{2}-$$

$$-\mathrm{si}\,5{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\;5{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]+\sin 5{,}444\frac{\pi}{2}\Big[2\,\mathrm{ci}\,5{,}444\frac{\pi}{2}-$$

$$-\mathrm{ci}\,5{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{ci}\;5{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]\Big\}$$

și

$$C_t = 3\left(1 - \frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}\right)\left[\sin\theta_2 \log\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_2}{2}\right) + \log\cos\theta_2 + \right.$$

$$+ \sin\theta_1 \log\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2}\right) - \log\cos\theta_1 + \pi k(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) +$$

$$\left. + C_2(\sin\theta_2 + \sin\theta_1)\right] + \left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916} - \frac{\text{th}\,1{,}732\lambda}{1{,}732\lambda}\right)[\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2 +$$

$$+ 1{,}273\,C_2(2 - \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)] + \frac{1}{10}\left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,3{,}873\lambda}{3{,}873\lambda}\right)[\cos 4\theta_2 -$$

$$- \cos 4\theta_1 + 2{,}546\,C_2(2 - \cos 4\theta_1 - \cos 4\theta_2)] + \tag{36}$$

$$+ \frac{6k}{1{,}222}\left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,0{,}703\lambda}{0{,}703\lambda}\right)(\cos 1{,}222\,\theta_1 - \cos 1{,}222\,\theta_2) +$$

$$+ \frac{6k}{3{,}222}\left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,3{,}063\lambda}{3{,}063\lambda}\right)(\cos 3{,}222\,\theta_1 - \cos 3{,}222\,\theta_2) -$$

$$- \frac{4{,}5k}{3{,}444}\left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,3{,}296\lambda}{3{,}296\lambda}\right)(\cos 3{,}444\,\theta_1 - \cos 3{,}444\,\theta_2) -$$

$$- \frac{4{,}5k}{5{,}444}\left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,5{,}352\lambda}{5{,}352\lambda}\right)(\cos 5{,}444\,\theta_1 - \cos 5{,}444\,\theta_2).$$

Sarcina totală F va fi dată de relația

$$F = \frac{2\mu_1 \Omega br}{\psi^2}\sqrt{C_n^2 + C_t^2} = \frac{2\mu_1 \Omega br}{\psi^2}\zeta. \tag{37}$$

După cum se constată din relațiile (35), (36) și (37), C_n, C_t și ζ sînt funcții de alungirea λ și de unghiurile extreme θ_1 și θ_2 respectiv de Θ și ν, adică de forma

$$C_n = C_n(\lambda, \nu, \Theta); \quad C_t = C_t(\lambda, \nu, \Theta); \quad \zeta = \zeta(\lambda, \nu, \Theta), \tag{38}$$

a căror variație în funcție de unghiul de înfășurare Θ al cuzinetului, avînd λ și ν ca parametri, este arătată în figurile 7, 8 și 9.

Din diagrama din figura 7 se constată că C_t crește cu unghiul de înfășurare al cuzinetului și ia valori foarte mari cînd $\Theta \to \frac{\pi}{2\nu}$ creștere ce se explică prin faptul că, în acest caz, $\theta_2 \to \frac{\pi}{2}$ și grosimea filmului de ulei la ieșire

$$\delta_2 = e\cos\theta_2, \tag{39}$$

tinde către zero, iar presiunile cresc foarte mult.

Alura curbei C_t nu este modificată de variația celorlalți doi parametri λ și ν. Creșterea alungirii λ are ca efect mărirea coeficientului C_t, iar creșterea parametrului ν are ca efect deplasarea diagramei către stînga, C_t crescînd cu ν.

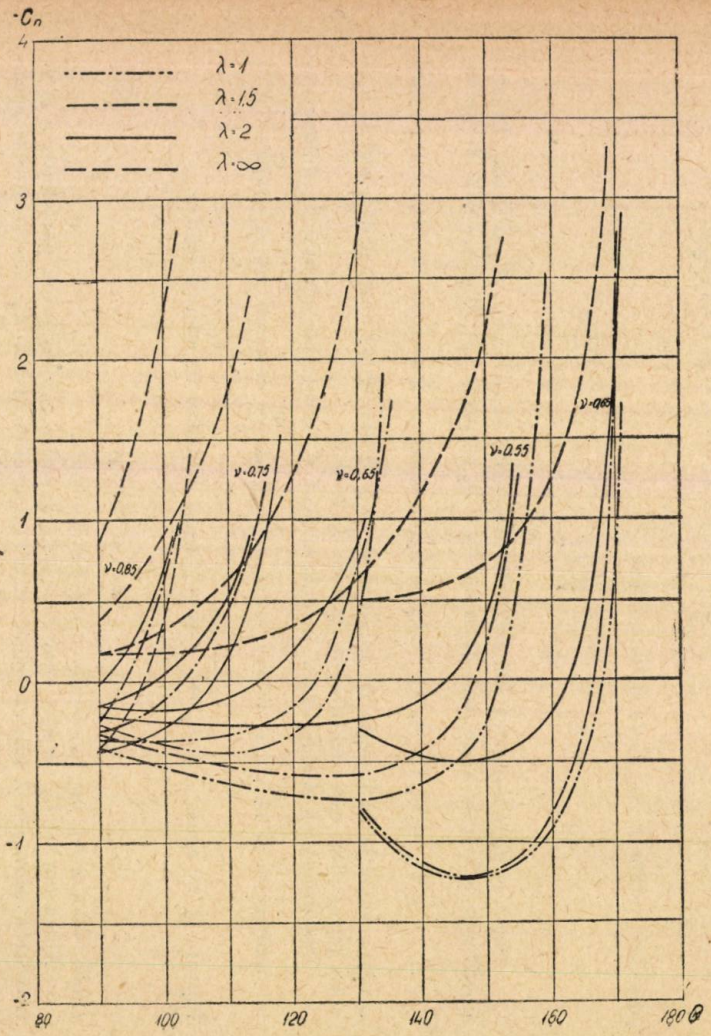

$-C_n$
λ=1
λ=1.5
λ=2
λ=∞
ν=0.85
ν=0.75
ν=0.65
ν=0.55
ν=0.65
4
3
2
1
0
-1
-2
80
100
120
140
160
180
Θ

Fig. 8

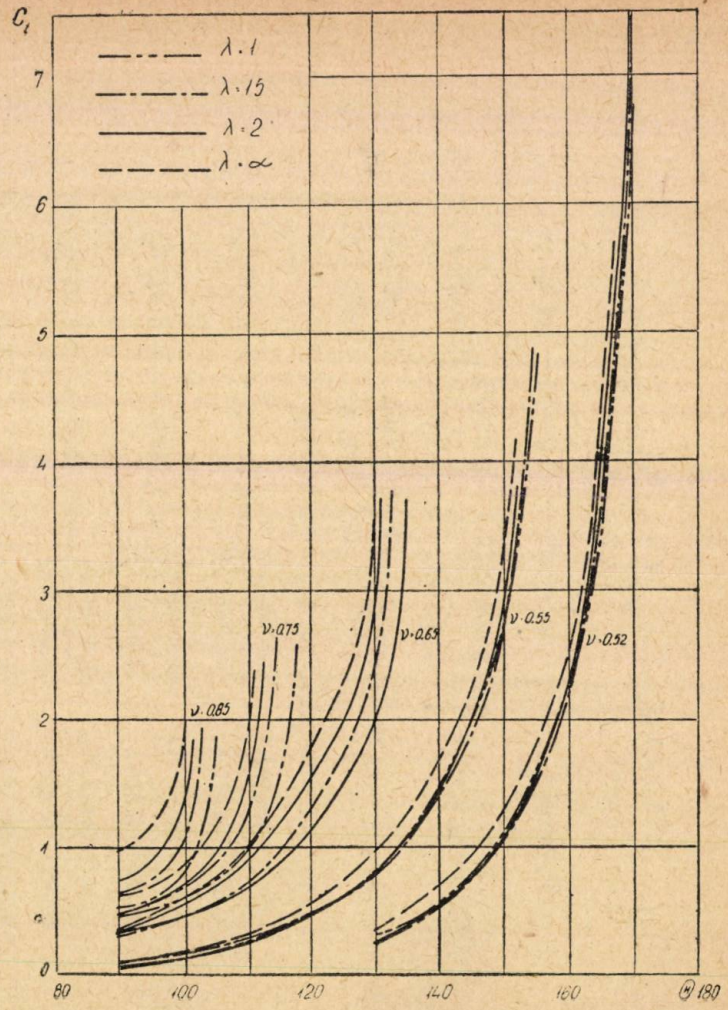

C_t
λ=1
λ=1.5
λ=2
λ=∞
ν=0.85
ν=0.75
ν=0.65
ν=0.55
ν=0.52
7
6
5
4
3
2
1
0
80
100
120
140
160
Θ 180

Fig. 7

Trebuie remarcat că prezentarea variației coeficientului C_f cu alungirea este oarecum deformată, deoarece felul cum s-a definit alungirea (3) deși este comod, din punct de vedere practic și al calculului, nu reprezintă alungirea reală care este egală cu (fig. 1)

$$\lambda_r = \frac{b}{2r \sin \frac{\Theta}{2}} = \frac{\lambda}{\sin \frac{\Theta}{2}}. \tag{40}$$

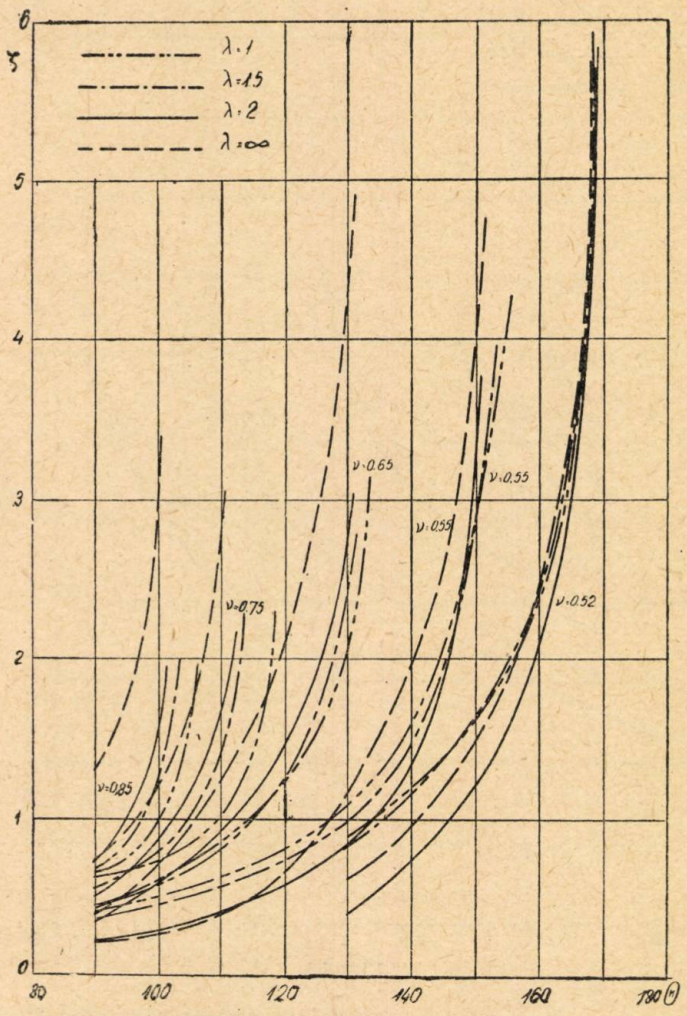


Fig. 9

Cum întotdeauna $\Theta < \pi$, rezultă că întotdeauna $\lambda_r > \lambda$, diferența dintre λ_r și λ crescînd pe măsură ce Θ devine mai mic. În consecință o curbă de o anumită alungire λ, din figura 7, este în realitate, de alungire variabilă. Astfel se explică faptul că pentru o valoare dată a lui ν, variația coeficientului C_f cu alungirea scade cînd unghiul de înfășurare Θ se micșorează.

Consideraţiile de mai sus sînt valabile şi pentru C_n şi ζ.

S-a păstrat totuşi alungirea λ definită de relaţia (3), deoarece în acest mod discuţiile se pot face mai uşor.

Din diagrama de variaţie a coeficentului C_n (fig. 8) se constată că pe măsură ce scade unghiul de înfăşurare Θ al cuzinetului, C_n devine negativ, fenomen ce este atenuat cînd Θ scade excesiv şi cînd alungirea creşte, dar care nu se con-

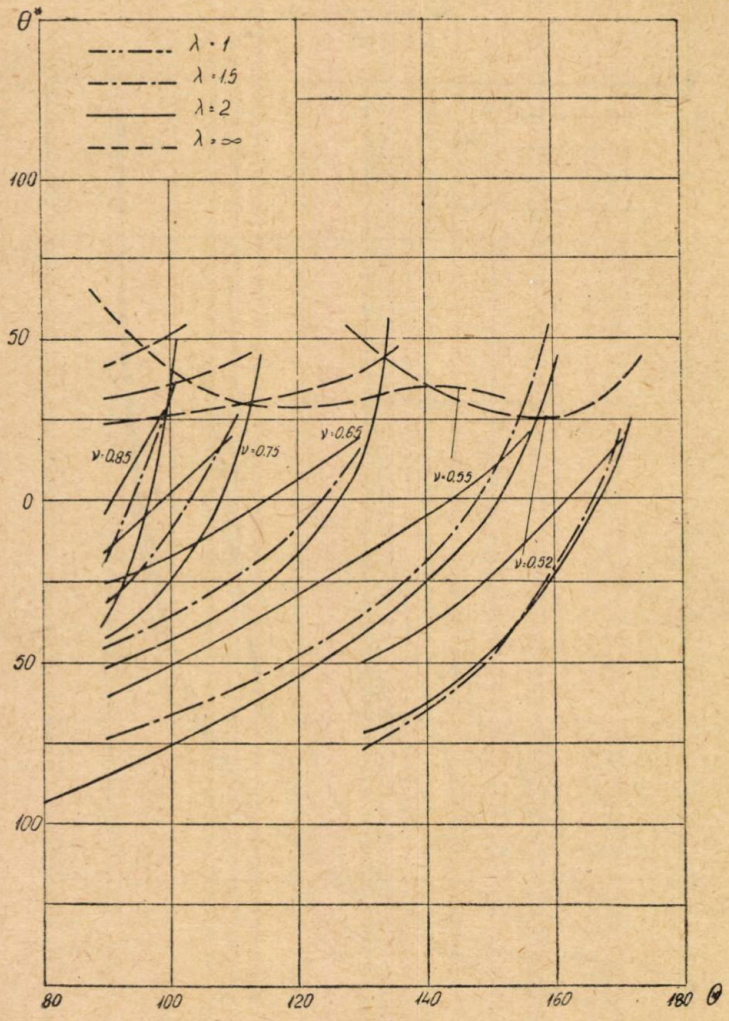


Fig. 10

stată pentru $\lambda = \infty$. De asemenea, fenomenul este atenuat cînd alungirea scade excesiv ($\lambda = 1$). Acest fapt are drept consecinţă imediată schimbarea de semn a unghiului θ^* definit de relaţia (19) sau de relaţia

$$\theta^* = \operatorname{arctg} \frac{C_n}{C_t}, \tag{41}$$

a cărui variaţie se găseşte în diagrama din figura 10.

Aceasta are drept efect deplasarea direcției forței către intrare, lucru ce nu este posibil decît în cazul cînd se produc presiuni negative în zona de ieșire a filmului de ulei.

Într-adevăr, calculîndu-se presiunile cu ajutorul relației (2) se constată existența unor depresiuni apreciabile către ieșire (fig. 11), fenomen atenuat de creșterea alungirii și care nu se produce pentru $\lambda = \infty$ unde, din potrivă, apar ușoare depresiuni la intrarea în lagăr. Astfel dacă definim un coeficient local de presiune avînd valoarea

$$C_p = \frac{(p - p_0)\,\psi^2}{12\,\mu_1\,\Omega} \tag{42}$$

și un coeficient de presiune mediu, definit de relația

$$C_{p_m} = \frac{(p_m - p_0)\,\psi^2}{12\,\mu_1\,\Omega}, \tag{43}$$

în care

$$p_m = \frac{F}{b2r\,\sin\frac{\Theta}{2}} = \frac{\mu_1\,\Omega\,\zeta}{\psi^2\,\sin\frac{\Theta}{2}}, \tag{44}$$

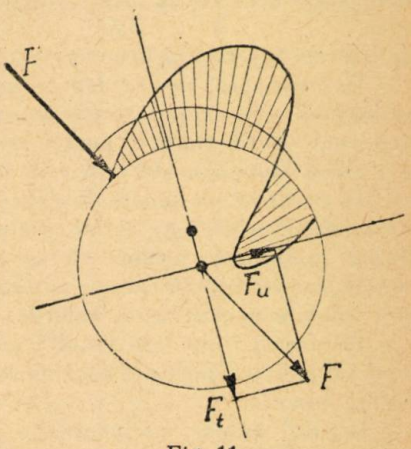


Fig. 11

au cu alte cuvinte

$$C_{p_m} = \frac{\zeta}{12\,\sin\frac{\Theta}{2}}. \tag{45}$$

Pentru $\Theta = 150°$ și $\nu = 0{,}52$, raportul $\frac{C_p}{C_{p_m}}$ ia valorile din tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

λ	1	1,5	2	∞
$\frac{C_p}{C_{p_m}}$	—11,5	—9,6	—8,2	0,77

pentru $\theta = 0{,}9\ \theta_2$.

Acest fenomen se poate explica fizic ținînd seama de faptul că spectrul scurgerii uleiului în spațiul dintre fus și cuzinet pe suprafețe paralele cu *Oxz*, are aspectul din figura 12, *a*, pentru $\lambda = \infty$ și din figura 12, *b*, pentru o alungire oarecare.

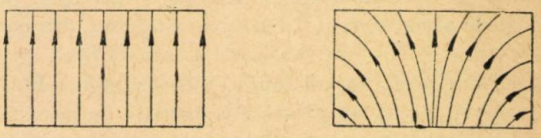


Fig. 12

În cazul alungirii infinite, scurgerea se produce într-o singură direcție, cea dată de rotația fusului; către ieșire, din cauza micșorării grosimii δ a filmului de ulei, presiunile cresc. În cazul unei alungiri finite (fig. 12, *b*), din cauza scăpărilor laterale,

către ieşire, vitezele laterale de scurgere pot creşte în aşa măsură, astfel încît depresiunea corespunzătoare să poată anihila creşterea de presiune, datorită micşorării grosimii filmului de ulei. În acest mod se produc în zona respectivă presiuni negative, mai ales cînd grosimea δ a filmului de ulei nu scade prea mult (adică atunci cînd suprapresiunile în cazul $\lambda = \infty$ nu sînt prea mari). Dacă grosimea filmului de ulei este mică $\left(\Theta \to \frac{\pi}{2\nu}\right)$, creşterea de presiune datorită acestei micşorări a grosimii δ este apreciabilă în comparaţie cu depresiunile provocate de scăpările laterale.

De asemenea, aceste depresiuni pot fi neînsemnate atunci cînd dimensiunile cuzinetului scad excesiv într-o direcţie sau alta, din cauza influenţei mediului exterior, cînd λ scade mult, şi pentru motivele arătate anterior (40), cînd Θ scade excesiv, adică alungirea efectivă este foarte mare.

În realitate, în zonele de depresiuni, filmul de ulei se va rupe restabilindu-se presiunea exterioară p_0, astfel că zonele respective nu lucrează. În acest caz integrarea presiunilor trebuie să se limiteze numai la zona presiunilor pozitive, sau, cu alte cuvinte, în aceste situaţii datele furnizate de diagramele 7, 8, 9, 10 nu sînt valabile pentru toate valorile.

În acelaşi timp însă rezultă că un asemenea lagăr nu funcţionează în bune condiţii, existînd porţiuni care nu lucrează, nefiind deci recomandabil din punct de vedere practic.

Rezultă aşadar că pentru a funcţiona, din punct de vedere hidrodinamic în bune condiţii, pentru o alungire dată, la un anumit ν, unghiul de înfăşurare al cuzinetului trebuie astfel ales încît să nu se producă presiuni negative, adică să fie mai mare decît o valoare minimă

$$\Theta \geqslant \Theta_0 \tag{46}$$

sau , cînd unghiurile de înfăşurare sînt foarte mici, să fie mai mic decît o valoare maximă

$$\Theta \leqslant \Theta_0' \tag{47}$$

Ultima condiţie nu are însă importanţă din punct de vedere practic, deoarece dă valori mult prea mici pentru unghiul de înfăşurare Θ.

Limita relaţiei (46) nu coincide cu valoarea unghiului pentru care $C_n = 0$ respectiv $\theta^* = 0$, deoarece pentru unghiuri de înfăşurare mari şi ν scăzut este posibil ca C_n respectiv θ^* să fie negativ, fără să se producă presiuni negative (fig. 13, *a*); iar pe de altă parte cînd ν este mare, chiar pentru θ^* pozitiv şi, cu atît mai mult pentru $\theta^* = 0$, se produc presiuni negative (fig. 13, *b*).

Se poate da însă un criteriu aproximativ pentru calculul unghiului limită Θ_0, fără să se determine unghiul pentru care apar pentru prima oară presiuni negative, lucru de altfel destul de greu de realizat, din cauza formei complicate a relaţiei (2). Într-adevăr direcţia forţei nu poate fi prea apropiată de intrare, de exemplu, trebuind să rămînă într-o zonă centrală egală cu $\Theta/2$, pentru ca să nu se producă presiuni negative, sau să nu existe o repartiţie de presiuni ca aceea din figura 14, care nu dă o utilizare în bune condiţii a lagărului (unele regiuni fiind foarte puţin încărcate, iar altele foarte mult). Rezultă atunci că în cazul limită θ^* este egal cu

$$\theta^* = \theta_2 - \frac{3}{4}\Theta_0 = (\nu - 0{,}75)\,\Theta_0, \tag{48}$$

relaţie din care, cu ajutorul diagramei 10 se poate deduce Θ_0 pentru fiecare ν şi λ.

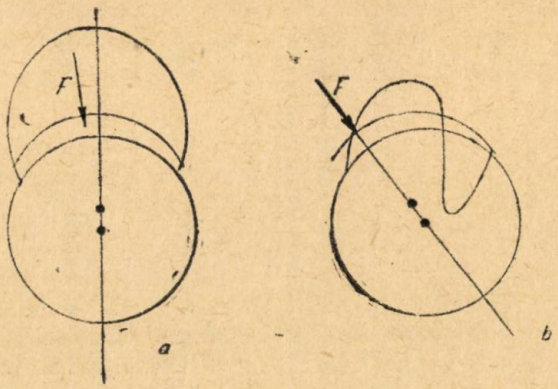


Fig. 13

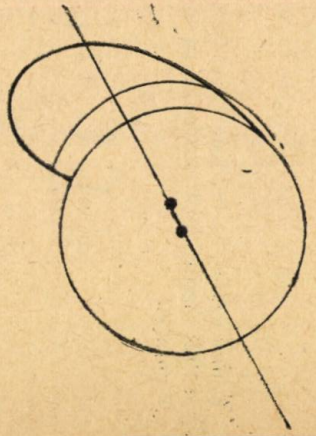


Fig. 14

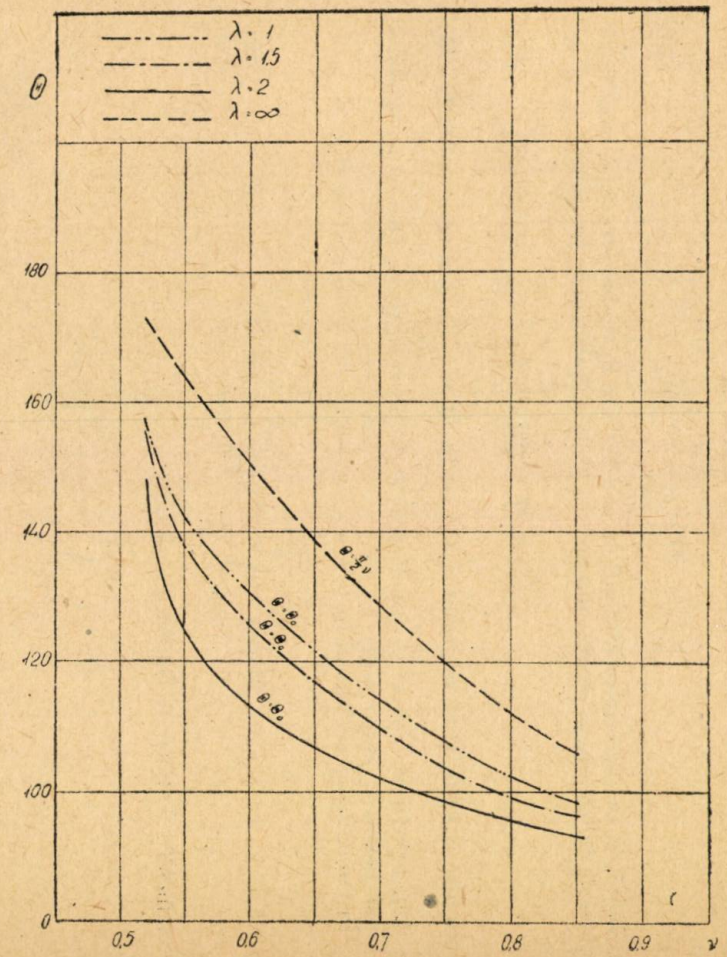


Fig. 15

Atunci, dacă mai ţinem seama şi de faptul că

$$\Theta < \frac{\pi}{2\nu} \tag{49}$$

caz limită, la care grosimea filmului de ulei la eşire δ_2 tinde către zero, rezultă că unghiul de înfăşurare al cuzinetului trebuie să fie cuprins între limitele

$$\Theta_0 \leqslant \Theta < \frac{\pi}{2\nu} \tag{50}$$

sau cu alte cuvinte Θ să se găsească sub curba $\Theta = \frac{\pi}{2\nu}$ şi deasupra curbei $\Theta = \Theta_0$ (fig. 15), pentru ca lagărul să funcţioneze în bune condiţiuni, fără să se producă presiuni negative importante.

În mod analog momentul forţelor de frecare pe fus va fi egal cu (fig. 2)

$$M = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r^2 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} d\theta \, dz. \tag{51}$$

iar momentul forţelor de frecare pe cuzinet

$$M_c = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r^2 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} d\theta \, dz, \tag{52}$$

Expresia $\frac{\partial u}{\partial y}$ se poate calcula imediat, dacă se ţine seama de faptul că viteza u este dată de relaţia [1]

$$u = V \cdot \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2\mu} \frac{\delta p}{\partial x} y\delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right). \tag{53}$$

Într-adevăr derivînd relaţia (53) se obţine

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{V}{\delta} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \delta \left(1 - \frac{2y}{\delta}\right). \tag{54}$$

Ţinînd seama de relaţiile (1) şi (14) şi de faptul că $x = r\theta$ şi $V = r\Omega$ relaţiile (51) şi (52) devin dacă convenim să luăm ca sens pozitiv pentru momente sensul invers rotaţiei

$$M = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r^2 \mu_1 \left(\frac{r\Omega}{e\cos\theta} + \frac{e}{2\mu_1 r} \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \cos\theta \, d\theta \, dz \tag{55}$$

şi

$$M_c = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r^2 \mu_1 \left(\frac{r\Omega}{e\cos\theta} - \frac{e}{2\mu_1 r} \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \cos\theta \, d\theta \, dz \tag{56}$$

în care $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ se obţine derivînd relaţia (2) în raport cu θ.

În mod analog se poate pune:

$$M = \frac{\pi\mu_1 \Omega b r^2}{\psi} C_m \tag{57}$$

și

$$M_c = \frac{\pi\mu_1 \Omega b r^2}{\psi} C_{m_c} \tag{58}$$

în care C_m este egal cu

$$\begin{aligned}
C_m = {} & \frac{\theta_1 + \theta_2}{\pi} + \frac{3}{\pi}\left(1 - \frac{\text{th}5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}\right)\left\{\theta_1 + \theta_2 + \pi k\left[\text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_2}{2}\right) - \right.\right. \\
& \left.\left. - \text{Log tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2}\right)\right]\right\} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\text{th}5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,1{,}732\lambda}{1{,}732\lambda}\right)\left[(1 - \right. \\
& - 1{,}273\,C_2)\left(\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{2}\right) + (1 + 1{,}273C_2)\left(\theta_2 + \right. \\
& \left.\left. - \frac{\sin^2\theta_2}{2}\right)\right] - \frac{2}{5\pi}\left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,3{,}873\lambda}{3{,}873\lambda}\right) \times \\
& \times \left[(1 + 2{,}546C_2)\left(\sin 2\theta_1 - \theta_1 + \frac{3}{4}\sin 4\,\theta_1\right) + \right. \\
& \left. + (1 - 2{,}546C_2)\left(\sin 2\theta_2 - \theta_2 + \frac{3}{4}\sin 4\theta_2\right)\right] + \frac{6k}{\pi}\left(\frac{\text{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \right. \\
& \left. - \frac{\text{th}0{,}703\lambda}{0{,}703\lambda}\right)\left\{\frac{2a}{1\,222} + \left(1 + \frac{5}{12 \times 1{,}222^2}\right)(\sin 1{,}222\,\theta_1 + \sin 1{,}222\,\theta_2) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{1{,}222}\left[\left(a + \frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 1{,}222\,\theta_2 + \left(a + \frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 1{,}222\theta_1\right] + \right. \\
& \left. + \cos 1{,}222\frac{\pi}{2}\left[- 2\,\text{si}\,1{,}222\,\frac{\pi}{2} - \text{si}\,1{,}222\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \right.\right. \\
& \left.\left. + \text{si}\,1{,}222\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] + \sin 1{,}222\,\frac{\pi}{2}\left[2\,\text{ci}\,1{,}222\,\frac{\pi}{2} - \text{ci}\,1{,}222\left(\theta_2 - \right.\right. \right. \\
& \left.\left.\left. - \frac{\pi}{2}\right) - \text{ci}\,1{,}222\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right]\right\} + \frac{6k}{\pi}\left(\frac{\text{h}5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda} - \frac{\text{th}\,3\,063\lambda}{3{,}063\lambda}\right)\left\{\frac{2a}{3{,}222} + \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{5}{12 \times 3{,}222^2}\right)(\sin 3{,}222\,\theta_1 + \sin 3{,}222\,\theta_2) - \frac{1}{3{,}222}\left[\left(a + \right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. + \frac{5}{12}\theta_2\right)\cos 3{,}222\theta_2 + \left(a + \frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 3{,}222\,\theta_1\right] + \cos 1{,}222\,\frac{\pi}{2}\left[- \right.\right. \\
& \left.\left. - 2\,\text{si}\,3{,}222\,\frac{\pi}{2} - \text{si}\,3{,}222\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \text{si}\,3{,}222\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] +
\end{aligned} \tag{59}$$

$$+\sin 3{,}222\frac{\pi}{2}\left[2\,\mathrm{ci}\,3{,}222\frac{\pi}{2}-\mathrm{ci}\,3{,}222\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{ci}\,3{,}222\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\theta_1\right)\right]\Bigg\}-\frac{4{,}5k}{\pi}\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,3{,}296\lambda}{3{,}296\lambda}\right)\cdot\left\{\frac{2a}{3{,}444}+\left(1+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{5}{12\times 3{,}444^2}\right)(\sin 3{,}444\,\theta_1+\sin 3{,}444\,\theta_2)-\frac{1}{1{,}444}\left[\left(a+\frac{5}{12}\theta_2\right)\times\right.$$

$$\times\cos 3{,}444\,\theta_2+\left(a+\frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 3{,}444\theta_1\Big]+\cos 3{,}444\frac{\pi}{2}\Big[-$$

$$-2\,\mathrm{si}\,3{,}444\frac{\pi}{2}-\mathrm{si}\,3{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\,3{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\Big]+$$

$$+\sin 3{,}444\,\frac{\pi}{2}\left[2\,\mathrm{ci}\,3{,}444\frac{\pi}{2}-\mathrm{ci}\,3{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{ci}\,3{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\right]\Bigg\}-\frac{4{,}5k}{\pi}\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,5{,}352\lambda}{5{,}352\lambda}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{2a}{5{,}444}+\left(1+\frac{5}{12\times 5{,}444^2}\right)(\sin 5{,}444\theta_1+\sin 5{,}444\,\theta_2)-\right.$$

$$-\frac{1}{5{,}444}\left[\left(a+\frac{5}{12}\theta_2\right)\cos 5{,}444\theta_2+\left(a+\frac{5}{12}\theta_1\right)\cos 5{,}444\theta_1\right]+$$

$$+\cos\ 5{,}444\frac{\pi}{2}\left[-2\,\mathrm{si}\,5{,}444\frac{\pi}{2}-\mathrm{si}\,5{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\,5{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\theta_1\right)\right]+\sin 5{,}444\frac{\pi}{2}\left[2\,\mathrm{ci}\,5{,}444\frac{\pi}{2}-\mathrm{ci}\,5{,}444\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{ci}\,5{,}444\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\right],$$

iar C_{m_e} are valoarea

$$C_{m_e}=\frac{\theta_1+\theta_2}{\pi}-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}\right)\Bigg\{\theta_1+\theta_2+\pi k\left[\mathrm{Logtg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_2}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{Logtg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)\right]\Bigg\}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,1{,}732\lambda}{1{,}732\lambda}\right)\Big[(1-$$

$$-1{,}273C_2)\left(\theta_1+\frac{\sin 2\theta_1}{2}\right)+(1+1{,}273\,C_2)\left(\sin\theta_2+\frac{\sin 2\theta_2}{2}\right)\Big]+$$

$$+\frac{2}{5\pi}\left(\frac{\mathrm{th}\,5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\mathrm{th}\,3{,}873\lambda}{3{,}873\lambda}\right)\times\Big[(1+2{,}546C_2)\Big(\sin 2\theta_1-\theta_1+$$

$$+\frac{3}{4}\sin 4\theta_1\Big)+(1-2{,}546C_2)\Big(\sin 2\theta_2-\theta_2+\frac{3}{4}\sin 4\,\theta_2\Big)\Big]-$$

$$-\frac{6k}{\pi}\Big(\frac{\text{th}5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\text{th}0{,}703\lambda}{0{,}703\lambda}\Big)\Big\{\frac{2a}{1{,}222}+\Big(1+\frac{5}{12\times 1{,}222^2}\Big)\times$$

$$\times(\sin 1{,}222\theta_1+\sin 1{,}222\theta_2)-\frac{1}{1{,}222}\Big[\Big(a+\frac{5}{12}\theta_2\Big)\cos 1{,}222\theta_2+$$

$$+\Big(a+\frac{5}{12}\theta_1\Big)\cos 1{,}222\theta_1\Big]+\cos 1{,}222\,\frac{\pi}{2}\Big[-2\,\text{si}\,1{,}222\,\frac{\pi}{2}-$$

$$-\text{si}\,1{,}222\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)+\text{si}\,1{,}222\Big(\frac{\pi}{2}-\theta_1\Big)\Big]+$$

$$+\sin 1{,}222\,\frac{\pi}{2}\Big[2\,\text{ci}\,1{,}222\,\frac{\pi}{2}-\text{ci}\,1{,}222\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)-\text{ci}\,1{,}222\Big(\frac{\pi}{2}-$$

$$-\theta_1\Big)\Big]\Big\}-\frac{6k}{\pi}\Big(\frac{\text{th}5{,}916\lambda}{5{,}916}-\frac{\text{th}\,3{,}063\lambda}{3{,}063\lambda}\Big)\Big\{\frac{2a}{3{,}222}+\Big(1+$$

$$+\frac{5}{12\times 3{,}222^2}\Big)(\sin 3{,}222\theta_2+\sin 3{,}222\theta_2)-\frac{1}{3{,}222}\Big[\Big(a+$$

$$+\frac{5}{12}\theta_2\Big)\cos 3{,}222\theta_2+\Big(a+\frac{5}{12}\theta_1\Big)\cos 3{,}222\theta_1\Big]+\cos 3{,}222\,\frac{\pi}{2}\Big[-$$

$$-2\,\text{si}\,3{,}222\,\frac{\pi}{2}-\text{si}\,3{,}222\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)+\text{si}\,3{,}222\Big(\frac{\pi}{2}-\theta_1\Big)\Big]+ \qquad (60)$$

$$+\sin 3{,}222\,\frac{\pi}{2}\Big[2\,\text{ci}\,3{,}222\,\frac{\pi}{2}-\text{ci}\,22\,3{,}222\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)-\text{ci}\,3{,}222\Big(\frac{\pi}{2}-\theta_1\Big)\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{4{,}5k}{\pi}\Big(\frac{\text{th}5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\text{th}\,3{,}296\lambda}{3{,}296\lambda}\Big)\Big\{\frac{2a}{3{,}444}+\Big(1+$$

$$+\frac{5}{12\times 3{,}444^2}\Big)(\sin 3{,}444\,\theta_1+\sin 3{,}444\,\theta_2)-\frac{1}{3{,}444}\Big[\Big(a+$$

$$+\frac{5}{12}\theta_2\Big)\cos 3{,}444\,\theta_2+\Big(a+\frac{5}{12}\theta_1\Big)\cos 3{,}444\,\theta_1\Big]+\cos 3{,}444\,\frac{\pi}{2}\Big[-$$

$$-2\,\text{si}\,3{,}444\,\frac{\pi}{2}-\text{si}\,3{,}444\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)+\text{si}\,3{,}444\Big(\frac{\pi}{2}-\theta_1\Big)\Big]+$$

$$+\sin 3{,}444\,\frac{\pi}{2}\Big[2\text{ci}\,3{,}444\,\frac{\pi}{2}-\text{ci}\,3{,}444\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)-\text{ci}\,3{,}444\Big(\frac{\pi}{2}-$$

$$-\theta_1\Big)\Big]\Big\}+\frac{4.5k}{\pi}\Big(\frac{\text{th}5{,}916\lambda}{5{,}916\lambda}-\frac{\text{th}\,5{,}352\lambda}{5{,}352\lambda}\Big)\Big\{\frac{2a}{5{,}444}+\Big(1+$$

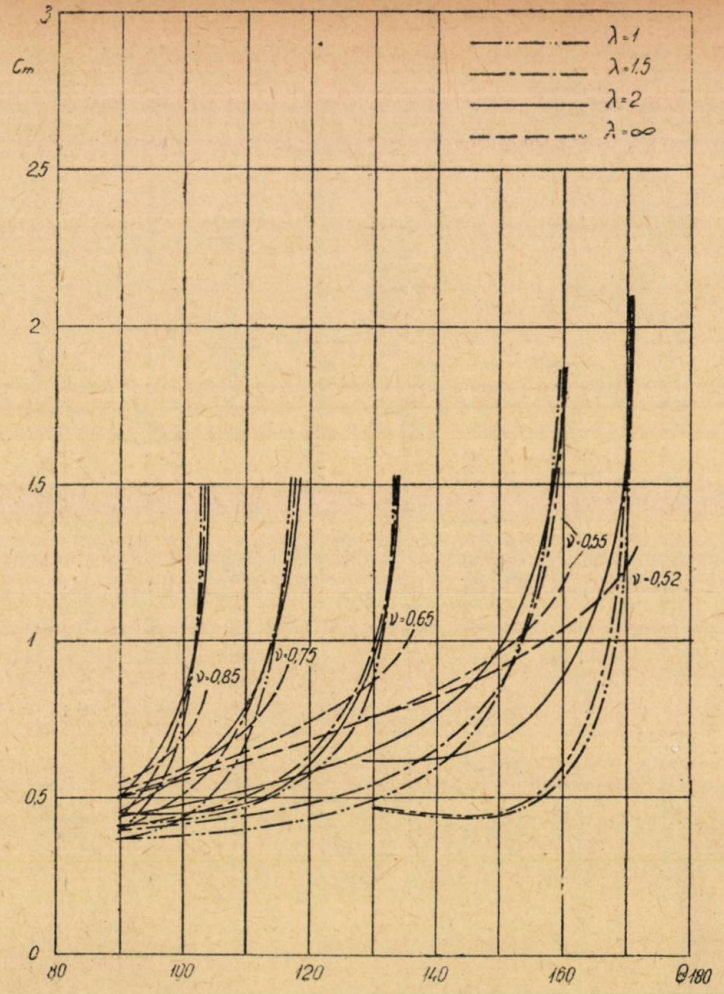

C_m
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
80
100
120
140
160
180
Θ
λ=1
λ=1,5
λ=2
λ=∞
ν=0,85
ν=0,75
ν=0,65
ν=0,55
ν=0,52

Fig. 16

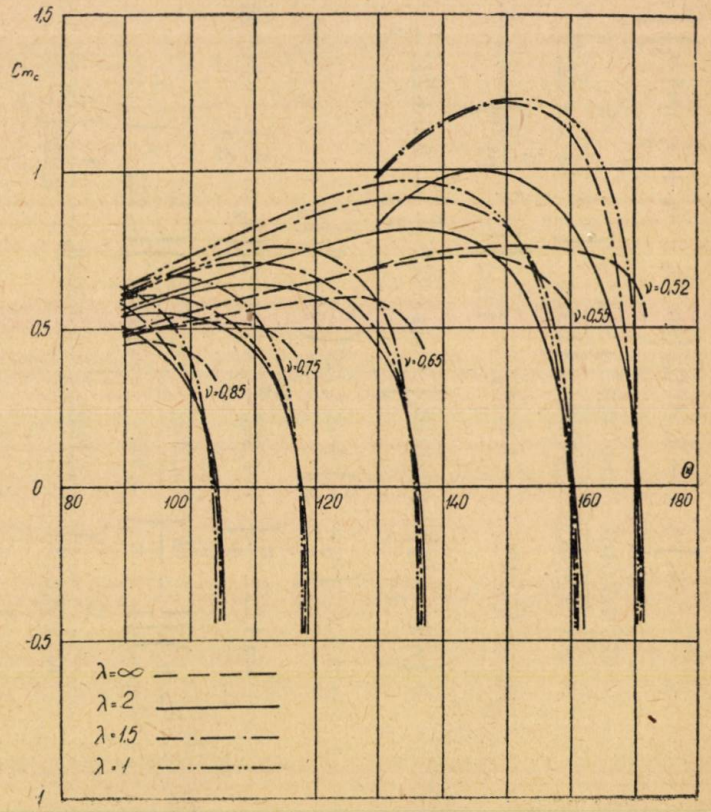

C_{m_c}
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
80
100
120
140
160
180
Θ
ν=0,85
ν=0,75
ν=0,65
ν=0,55
ν=0,52
λ=∞
λ=2
λ=1,5
λ=1

Fig. 17

$$+\frac{5}{12\times 5{,}444^2}\Big)(\sin 5{,}444\theta_1+\sin 5{,}444\theta_2)-\frac{1}{5{,}444}\Big[\Big(a+$$

$$+\frac{5}{12}\theta_2\Big)\cos 5{,}444\,\theta_2+\Big(a+\frac{5}{12}\theta_1\Big)\cos 5{,}444\,\theta_1\Big]+\cos 5{,}444\frac{\pi}{2}\Big[-$$

$$-2\,si\,5{,}444\frac{\pi}{2}-si\,5{,}444\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)+si\,5{,}444\Big(\frac{\pi}{2}-\theta_1\Big)\Big]+$$

$$+\sin 5{,}444\frac{\pi}{2}\Big[2\,ci\,5{,}444\frac{\pi}{2}-ci\,5{,}444\Big(\theta_2-\frac{\pi}{2}\Big)-ci\,5{,}444\Big(\frac{\pi}{2}-\theta_1\Big)\Big]\Big\};$$

sau cu alte cuvinte C_m și C_{m_c} depind de λ, ν și Θ

$$C_m = C_m(\lambda, \nu, \Theta);\ C_{m_c} = C_{m_c}(\lambda, \nu, \Theta), \tag{61}$$

a căror variație în funcție de unghiul de înfășurare al cuzinetului Θ, avînd λ și ν ca parametri, este arătată în figurile 16 și 17.

Valoarea lui C_{m_c} poate deveni la un moment dat negativă, deoarece M_c este egal cu (fig. 18).

$$M_c = M - Fe\sin\theta^*, \tag{62}$$

iar dacă F și θ^* sînt mai mari este posibil ca $M <$ F.e. $\sin\theta^*$ și în consecință $M_c < 0$.

Ca și în cazul lagărelor cu joc radial [4] este util să se ia în considerare încă doi coeficienți

$$\zeta^* = \frac{F\delta_2^2}{4\mu_1\Omega_1 l^4}, \tag{63}$$

pentru sarcină și

$$k_m = \frac{6M}{\pi F\delta_2}, \tag{64}$$

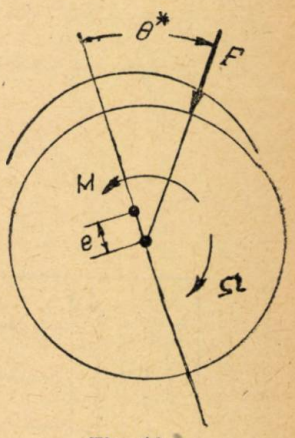


Fig. 18

pentru momentul forțelor de frecare pe fus, care prezintă avantajul că se pot calcula direct cu ajutorul parametrilor ce se dau în cazul proiectării. Acești coeficienți se pot calcula ușor cu ajutorul coeficienților ζ și C_m. Într-adevăr

$$\zeta^* = \lambda\zeta\cos^2\theta_2 \tag{65}$$

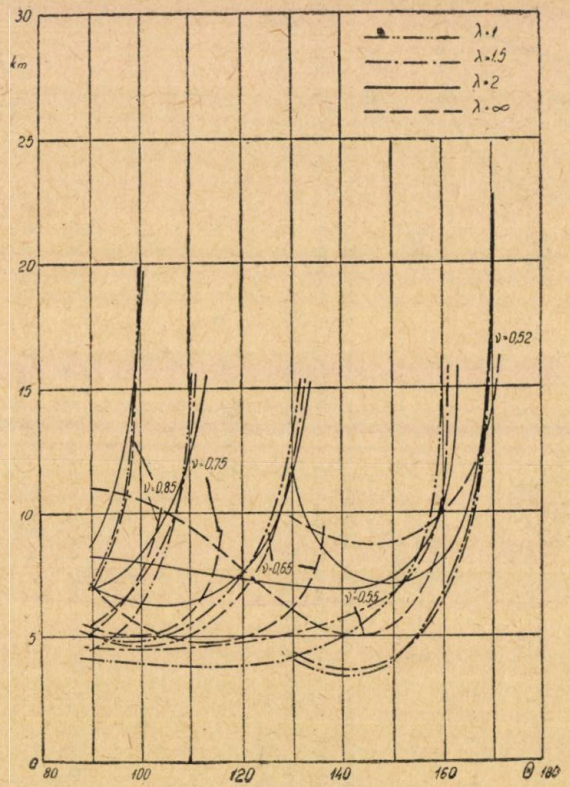
și

$$k_m = \frac{3C_m}{\zeta\cos\theta_2} = \frac{3\lambda\, C_m\cos\theta_2}{\zeta^*}, \tag{66}$$

care vor depinde de aceiași parametri ca și ζ și C_m adică

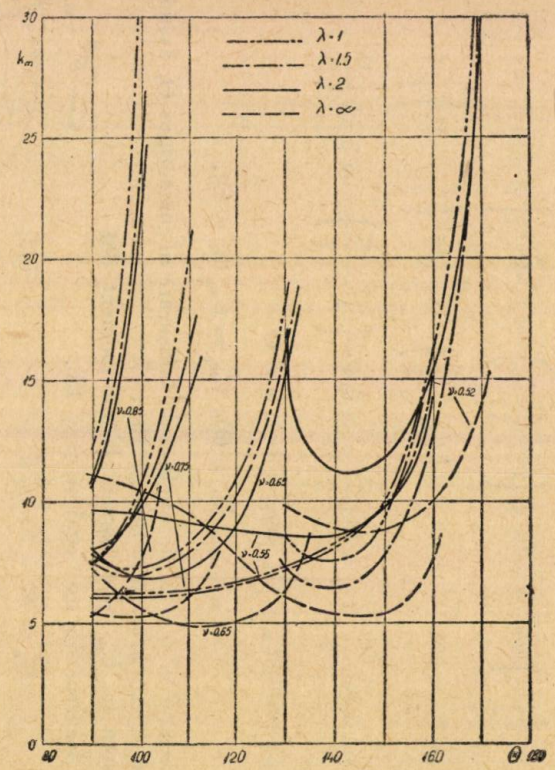
$$\zeta^* = \zeta^*(\lambda, \nu, \theta);\ k_m = k_m(\lambda, \nu, \Theta) \tag{67}$$

și a căror variație este reprezentată în diagramele din figurile 19 și 20, în care se constată că pentru $\Theta \to \frac{\pi}{2\nu}$, $\zeta^* \to 0$, iar curbele k_m prezintă un minim destul de pronun-



k_m
30
25
20
15
10
5
0
80
100
120
140
160
180
Θ
$\lambda=1$
$\lambda=1.5$
$\lambda=2$
$\lambda=\infty$
$\nu=0.52$
$\nu=0.75$
$\nu=0.85$
$\nu=0.65$
$\nu=0.55$

Fig. 19



k_m
30
25
20
15
10
5
0
80
100
120
140
160
Θ
$\lambda=1$
$\lambda=1.5$
$\lambda=2$
$\lambda=\infty$
$\nu=0.52$
$\nu=0.85$
$\nu=0.75$
$\nu=0.65$
$\nu=0.55$
$\nu=0.65$

Fig. 20

ţat, rezultat ce apare şi în cazul $\lambda = \infty$, unghiul de înfăşurare Θ corespunzător minimului fiind, însă, pentru $\lambda < 2$, în zona unde se produc presiuni negative.

În sfîrşit, debitul de ulei ce trece prin lagăr este egal cu

$$Q = \int_0^{\delta_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (u)_{\theta = -\theta_1} \, dy \, dz \tag{68}$$

Ţinînd seama de relaţia (53) se poate pune

$$Q = 2\psi \, \Omega \, b r^2 \, C_q , \tag{69}$$

în care coeficientul de debit C_q are valoarea

$$\begin{aligned} Cq = \cos\theta_1 - \left(1 - \frac{\text{th}\, 5{,}916\lambda}{5{,}916\,\lambda}\right)(\cos\theta_1 + \pi k) + \frac{4}{3}\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 1{,}732\lambda}{1{,}732\,\lambda}\right)\times \\ \times (1 - 1{,}273 C_2)\cos 2\theta_1 \cos^2\theta_1 - \frac{8}{15}\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 3{,}873\lambda}{3{,}873\,\lambda}\right)(1 + \\ + 2{,}546 C_2)\cos 4\theta_1 \cos^2\theta_1 + 2k\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 0{,}703\lambda}{0{,}703\,\lambda}\right)(\sin\, 1{,}222\,\theta_1 \sin\,\theta_1 + \\ + 1{,}222\,\cos 1{,}222\theta_1 \cos^2\theta_1) + 2k\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 3{,}063\lambda}{3{,}063\,\lambda}\right)(\sin 3{,}222\theta_1 \sin\theta_1 + \\ + 3{,}222 \cos 3{,}222\theta_1 \cos^2\theta_1) - 1{,}5k\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 3{,}296\lambda}{3{,}296\,\lambda}\right)(\sin 3{,}444\theta_1 \sin\theta + \\ + 3{,}444\,\cos 3{,}444\theta_1 \cos^2\theta_1 - 1{,}5k\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 5{,}352\lambda}{5{,}352\,\lambda}\right)(\sin 5{,}444\theta_1 \sin\theta_1 + \\ + 5{,}444 \cos 5{,}444\theta_1 \cos^2\theta_1) \end{aligned} \tag{70}$$

şi a cărui variaţie este reprezentată în figura 21.

Variaţia lui C_q pentru $\lambda = \infty$ nu este valabilă pentru ν dat, decît pentru unghiuri de înfăşurare mai mici decît o valoare limită Θ_0''. Aceasta deoarece pentru $\Theta > \Theta_0''$ se produc presiuni negative la intrare, rezultat care face ca C_q să fie mai mare decît în cazul real, cînd în zona respectivă se restabileşte presiunea exterioară p_0.

Ca şi în cazul lagărelor fără joc [4] este util să se pună debitul sub forma

$$Q = \delta_2^2 \sqrt{\frac{F\,\Omega}{\mu_1}} \, C_{q_s} , \tag{71}$$

ceea ce revine la a scrie că

$$C_{q_s} = \frac{2}{\cos^2\theta_2} \sqrt{\frac{2\lambda}{\zeta}} \, C_q , \tag{72}$$

sau în funcţie de ζ^*.

$$C_{q_s} = \frac{2\lambda}{\cos\theta_2} \sqrt{\frac{2}{\zeta^*}} \, C_q , \tag{73}$$

Variaţia coeficientului C_{q_s} se poate urmări în diagrama din figura 22.

* * *

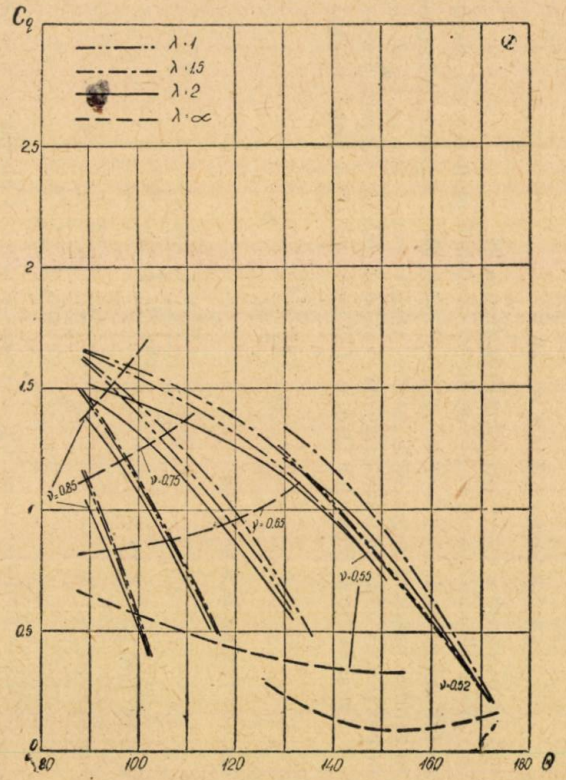

C_{Q_1}
λ·1
λ·1.5
λ·2
λ·∞
2.5
2
1.5
1
0.5
0
80
100
120
140
160
180
ϑ
ν·0.85
ν·0.75
ν·0.65
ν·0.55
ν·0.52

Fig. 21

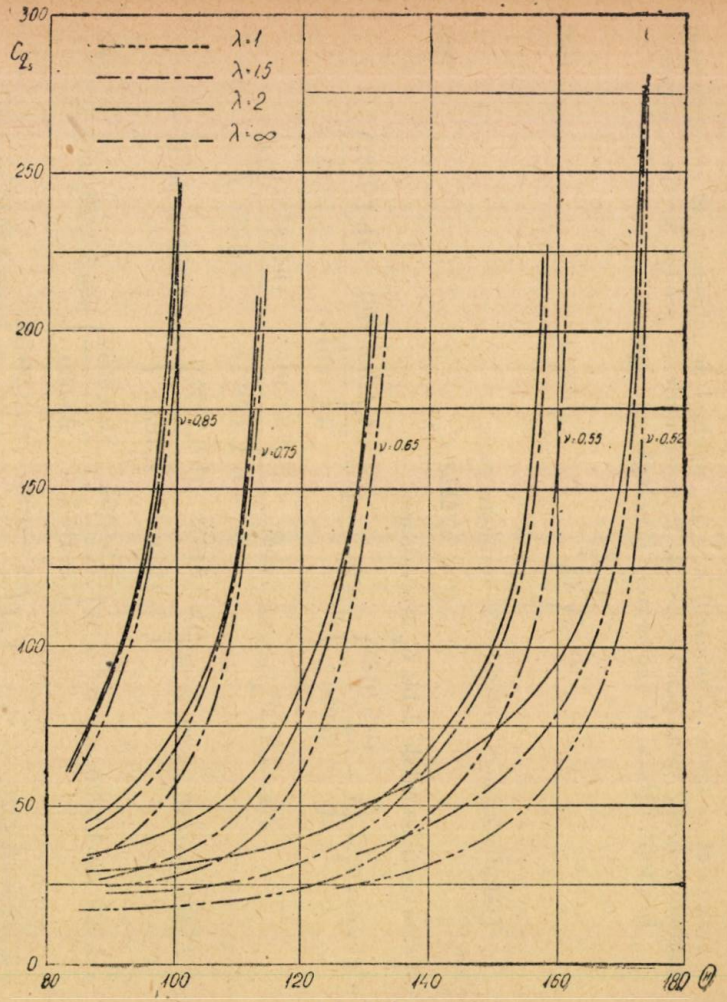

C_{Q_1}
λ·1
λ·1.5
λ·2
λ·∞
300
250
200
150
100
50
0
80
100
120
140
150
180
ϑ
ν·0.85
ν·0.75
ν·0.65
ν·0.55
ν·0.52

Fig. 22

Din considerațiile de mai sus se constată, în primul rînd, că toate caracteristicile de funcționare ale lagărului se îmbunătățesc odată cu creșterea alungirii, fiind deci recomandabil ca în proiectare să se aleagă, în măsura posibilităților, o alungire λ cît mai mare.

De asemenea, pentru ca lagărul să funcționeze, din punct de vedere hidrodinamic, în bune condiții, este necesar ca pentru o anumită alungire, unghiul de înfășurare să fie ales astfel încît să fie îndeplinită condiția (50). Cu alte cuvinte, dacă se fixează unghiul de înfășurare al cuzinetului Θ, rezultă un interval destul de strîns în care poate varia ν și invers. În linii generale se vede că pentru unghiuri de înfășurare Θ mari, ν trebue să fie mic, avînd valori apropiate de valoarea limită $\nu = 0{,}5$, rămînînd totuși mai mare decît aceasta din urmă.

O altă concluzie generală este că lagărul poartă mai mult cu cît θ_2 este mai mare și că deci este recomandabil, din acest punct de vedere, ca θ_2 să fie cît mai apropiat de $\frac{\pi}{2}$. Valoarea lui θ_2 este însă limitată de scăderea grosimii filmului de ulei la ieșire, care nu poate fi prea mic fără a avea pericol de gripaj și de frecări, care cresc și ele foarte mult atunci cînd $\theta_2 \to \frac{\pi}{2}$.

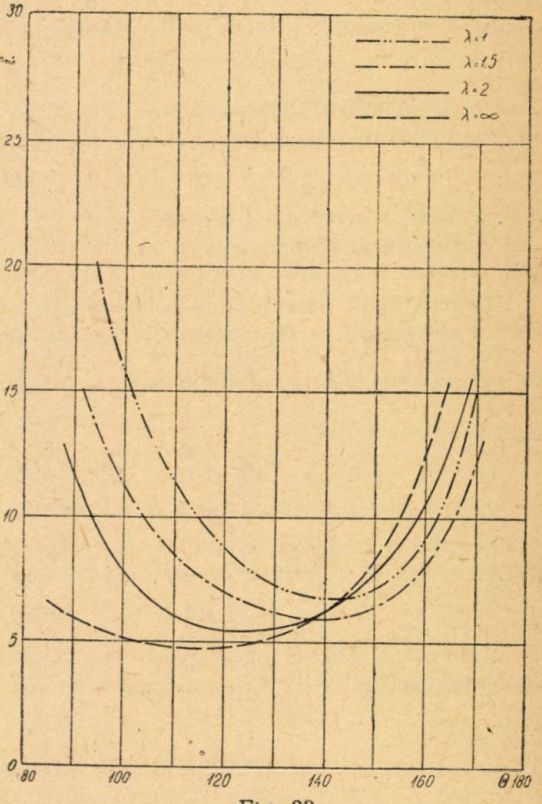


Fig. 23

Aspectul variației coeficientului k_m, din figura 20 dă de asemenea concluzii interesante din punct de vedere practic. Într-adevăr lagărul trebuie să fie construit astfel încît momentul forțelor de frecare să fie cît mai mic, evitîndu-se astfel cît mai mult pericolul aprinderii lagărului.

Trasînd curba $k_{m_{min}}$ pentru diverse valori ν și la diferite alungiri λ, se constată (fig. 23) că aceste curbe prezintă un minim destul de pronunțat. La alungiri mici, s-a luat pentru $k_{m_{min}}$ valoarea corespunzînd la $\Theta = \Theta_0$, deoarece în aceste cazuri minimul curbei k_m se găsește în zona unde se produc presiuni negative. Acest minim reprezintă valoarea căutată pentru unghiul de înfășurare al cuzinetului, deoarece chiar dacă $\Theta > \Theta_0$ momentul de frecare va fi totuși cel mai mic.

Rezultă deci că unghiul de înfășurare al cuzinetului este recomandabil să fie cuprins între limitele

$$110° < \Theta < 140° \tag{74}$$

fapt care atrage după sine (50).

$$0{,}6 < \nu < 0{,}75 \tag{75}$$

Ţinînd seama de aceste concluzii, proiectarea unui lagăr fără joc radial cu ajutorul diagramelor de mai sus nu mai prezintă nici o dificultate.

În general, în proiectare se dau următoarele date iniţiale: sarcina F pe care trebuie să o suporte lagărul, grosimea minimă δ_2, admisibilă pentru filmul de ulei, raza r a fusului, viteza unghiulară de rotaţie Ω şi viscozitatea uleiului la intrarea în lagăr μ_1.

Alegîndu-se unghiul de înfăşurare şi ţinîndu-se seama de recomandările date mai sus (74), se pot determina ν şi λ, din diagrama din figura 19 (deoarece coeficientul ζ^* se poate calcula cu ajutorul relaţiei (63)) şi din diagrama din figura 15, prin cîteva încercări (dacă lagărul este mai încărcat, este bine să se aleagă pentru ν valori ceva mai mari, în limitele relaţiei (75)). Odată cunoscute λ, ν, Θ, toate caracteristicile de funcţionare ale lagărului sînt perfect determinate.

De cele mai multe ori în practică, lagărul trebuie astfel proiectat încît să funcţioneze în ambele sensuri de rotaţie. În acest caz mai trebuie îndeplinită încă o condiţie, şi anume, ca forţa să fie plasată la jumătatea cuzinetului, adică

$$\theta^* \cong (\nu - 0{,}5)\,\Theta, \tag{76}$$

dacă asupra lagărului nu acţionează decît sarcini verticale. Dacă direcţia sarcinii face un unghi θ' cu verticala, condiţia (76) devine

$$\theta^* \cong (\nu - 0{,}5)\,\Theta + \theta', \tag{77}$$

condiţii care în general pot fi satisfăcute.

Rezultă deci că proiectarea unui asemenea lagăr se poate face destul de uşor, prin cîteva încercări.

De exemplu, presupunînd că asupra unui lagăr fără joc radial acţionează o sarcină verticală $F = 6t$, lagărul trebuind să funcţioneze în ambele sensuri de rotaţie. În ipoteza că se dau: $\delta_2 = 0{,}008$ mm, $\mu_1 = 0{,}0025\ \frac{\text{kg.s}}{\text{m}^2}$, $r = 6$ cm, $\Omega = 60$ rad/s, rezultă imediat (63)

$$\zeta^* = \frac{F\delta_2^2}{4\mu_1\Omega r^4} = \frac{6000 \times 0{,}000008^2}{4 \times 0{,}0025 \times 60 \times 0{,}06^4} = 0{,}0495 \tag{78}$$

Alegînd $\Theta = 130°$ şi $\nu = 0{,}65$, din diagrama din figura 19 rezultă $\lambda = 2$ şi din diagrama din figura 10, $\theta^* = 20°$, îndeplinindu-se astfel şi condiţia (76) care dă

$$\theta^* = (\nu - 0{,}5)\,\Theta = 19^0{,}5 \tag{79}$$

Cunoscînd λ, ν, Θ se, se poate calcula imediat momentul forţelor de frecare, din diagrama din figura 20, ca şi debitul de ulei necesar, din diagrama din figura 22.

О РАСЧЕТАХ ПОДШИПНИКОВ БЕЗ РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исходя из дифференциального уравнения движения, происходящего в пленке смазочного вещества (2), уравнения, в котором постоянные интегрирования k и C_2, определенные на основании предельных условий (4) могут быть вычислены при помощи диаграммы 2 и 3, автор вычисляет составляющие нагрузки F_n (17) и F_t (18). Вводятся затем безразмерные коэффициенты C_n и C_t, определенные соотношениями (33)

и (34), выражение которых дано соотношениями (35) и (36). Коэффициенты C_n и C_t и коэффициент ζ, определенный соотношением (37), являются функциями удлинения подшипника λ, угла охвата подшипника Θ и параметра ν (5), а изменение их показано на диаграммах 7, 8 и 9.

На диаграмме изменения коэффициента C_n (рис. 8) видно, что при некоторых значениях λ, ν и Θ в зоне выхода масляной пленки появляются отрицательные давления, вредно влияющие на правильную работу подшипника. Поэтому угол охвата Θ должен удовлетворять условию (50) или, другими словами, находиться под кривой $\Theta = \frac{\pi}{2\nu}$ и над кривой $\Theta = \Theta_0$, изображенных на рисунке 15 (Θ_0 — угол, при котором впервые появляются вдавления).

Автор приводит также выражения момента сил трения шейки вала (51) и вкладыша (52). Определяются безразмерные коэффициенты C_m (57) и C_{m_c} (58), выражение которых дано соотношениями (59) и (60), изменение которых в зависимости от тех же параметров λ, ν и Θ показано на рисунках 16 и 17.

Далее выводятся два коэффициента ζ^* (63) и k_m (64), обладающие тем преимуществом, что их можно непосредственно вычислить при помощи заданных при проектировании параметров и изменение которых можно проследить на диаграммах рисунков 19 и 20.

Равным образом вычисляется количество масла, проходящего через подшипник (68), и соответственно коэффициент дебита C_q (69), выводимого из соотношения (70), изменение которого можно проследить на диаграмме 21, или коэффициент C_{q_s} (71), изменение которого указано в диаграмме (22).

При рассмотрении полученных результатов и диаграмм констатируется, что с увеличением длины подшипника все характеристики его улучшаются, а сама картина изменения коэффициента k_m (рис. 20), при условии снижения трений до минимума (рис. 23), показывает, что является предпочтительным, чтобы угол охвата вкладыша Θ не выходил за пределы, указанные соотношением (74).

Принимая во внимание вышеуказанные выводы автора можно заключить, что подобный подшипник можно спроектировать без затруднений при помощи соотношений (63), (74) и (75) и по диаграммам 19 и 15, дающим возможность определить λ, ν и Θ при выполнении условия (76) или (77), определяющего направление действия нагрузки.

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES PALIERS SANS JEU RADIAL

(RÉSUMÉ)

En partant de l'équation différentielle du mouvement dans la pellicule de lubrifiant (2), dans laquelle les constantes d'intégration k et C_2, déterminées à partir des conditions à la limite (4), peuvent être calculées à l'aide des diagrammes 2 et 3, on calcule les composants de la charge F_n (17) et F_t (18). On introduit ensuite les coefficients adimensionnels C_n et C_t, définis par les relations (33), (34), dont

l'expression est donnée par les relations (35) et (36). Les coefficients C_n et C_t, ainsi que le coefficient ζ, défini par la relation (37), sont fonctions de l'allongement du palier λ, de l'angle d'enveloppement du palier Θ et du paramètre ν, (5). Leur variation est indiquée sur les diagrammes 7, 8, et 9.

Le diagramme de variations du coefficient C_n (fig. 8), permet de constater que, pour certaines valeurs λ, ν et Θ, des pressions négatives apparaissent dans la zone de sortie de la pellicule d'huile, ce qui empêche le palier de fonctionner dans de bonnes conditions. Aussi, l'angle d'enveloppement Θ doit-il respecter la condition (50), autrement dit, doit-il se trouver au-dessous de la courbe $\Theta=\frac{\pi}{2\nu}$ et au-dessus de la courbe $\Theta=\Theta_0$ de la figure 15 (Θ_0 étant l'angle pour lequel apparaissent, pour la première fois, des dépressions).

D'une manière analogue, on exprime le moment des forces de frottement sur le tourillon (51) et sur le coussinet (52). On définit les coefficients adimensionnels C_m (57) et C_{m_c} (58) dont l'expression est donnée par les relations (59) et (60) et dont la variation, en fonction des mêmes paramètres λ, ν, Θ, est indiquée sur les figures 16 et 17.

On introduit encore deux coefficients ζ^* (63) et k_m (64) qui offrent l'avantage de pouvoir être calculés directement à l'aide des paramètres qui sont donnés pour l'élaboration du projet et dont la variation peut être suivie sur les diagrammes des figures 19 et 20.

On calcule, également, le débit d'huile qui traverse le palier (68), respectivement le coefficient de débit C_q (69), donné par la relation (70), dont la variation peut être suivie sur le diagramme 21, ou le coefficient C_{q_s} (71), dont la variation est donnée par le diagramme 22.

De la discussion des résultats et des diagrammes obtenus on constate que toutes les caractéristiques du palier s'améliorent en raison de son allongement et qu'il ressort de l'examen des variations du coefficient k_m (fig. 20) et, à la condition que les frottements soient minimes (fig. 23), qu'il est recommandable que l'angle d'enveloppement du coussinet Θ soit compris entre les limites données par la relation (74).

En tenant compte de ces conclusions, le projet d' un tel palier peut être effectué sans difficulté à l'aide des relations (63), (74) et (75) et des diagrammes 19 et 15 en déterminant ainsi λ, ν et Θ, la condition (76), ou (77), qui définit la direction de la charge, devant également être respectée.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. II, 1951, p. 27.
2. — Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, t. V, 1953. p. 13.
3. S. Scheffers, *Differenzial und Integralrechnung*. B. I. Teubner, Berlin, 1921, p. 261—263 şi 250.
4. N. Tipei, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, t. IV, nr. 3—4, iulie-decembrie 1952, p. 291.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

GRINZI PRINCIPALE PENTRU PODURI DIN BETON PRECOMPRIMAT

DE

A. FROIMESCU şi M. WEISSENBERG

1. Luînd în studiu tema *Grinzi principale pentru poduri din beton precomprimat*, colectivul de specialitate din Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. şi-a propus să pună la îndemîna proiectanţilor şi executanţilor constructori din ţară, metodele cele mai indicate pentru proiectarea şi realizarea unor elemente din beton precomprimat de deschidere mare supuse unor solicitări importante.

Etapele studiului întreprins au fost:

a) Proiectarea şi realizarea utilajului necesar pentru obţinerea eforturilor de preîntindere, precum şi a utilajului ajutător;

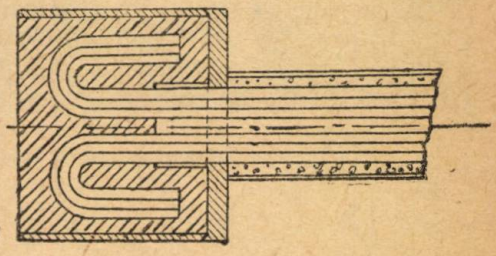


Fig. 1. — Pahar metalic de ancoraj.

b) Punerea la punct a tehnologiei şi instructajul executanţilor;

c) Perfectarea metodei de calcul;

d) Încercarea unei grinzi experimentale.

Prima etapă a fost realizată în anul 1952, celelalte trei în 1953.

2. Pe baza materialului documentar sovietic [1] şi [2], a fost proiectată şi realizată o presă pentru pretensiunea fasciculelor de armături în sistemul la care ancorajele de capăt, prin intermediul cărora se face transmiterea eforturilor de la armături la beton, sînt reprezentate de nişte pahare metalice de tipul celor din figura 1. Presa realizată este arătată în figura 2, iar schema ei de funcţionare în figura 3.

Presa este fixată de paharul metalic de ancoraj cu ajutorul unui dispozitiv inelar de prindere recuperabil, în aşa fel încît după terminarea preîntinderii, în lucrare nu mai rămîn decît şaibele şi paharul metalic, respectiv numai piese a căror prelucrare mecanică este simplă.

Au mai fost proiectate şi realizate: o vibropresă pentru umplerea cu beton a ancorajelor de capăt, un dispozitiv pentru îndreptarea firelor de armătură, chei pentru fasonarea capetelor armăturilor. A fost proiectată şi o pompă de ulei pentru realizarea presiunilor necesare.

3. Încercarea utilajelor şi punerea la punct a tehnologiei a fost făcută pe o grindă special executată la un atelier de prefabricate al unei întreprinderi din Bucureşti.

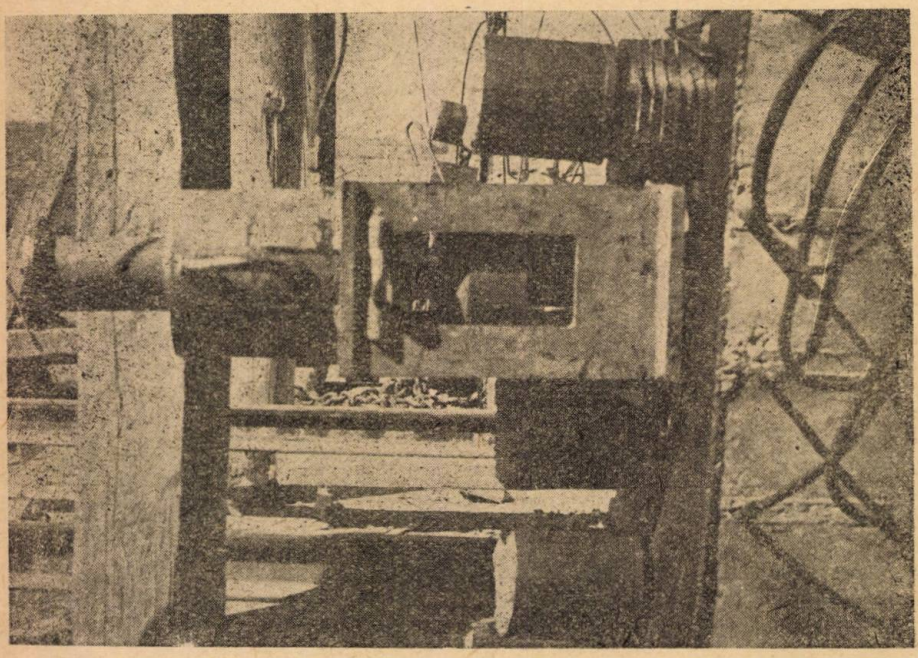


Fig. 2. — Presă realizată la Institutul de mecanică aplicată.

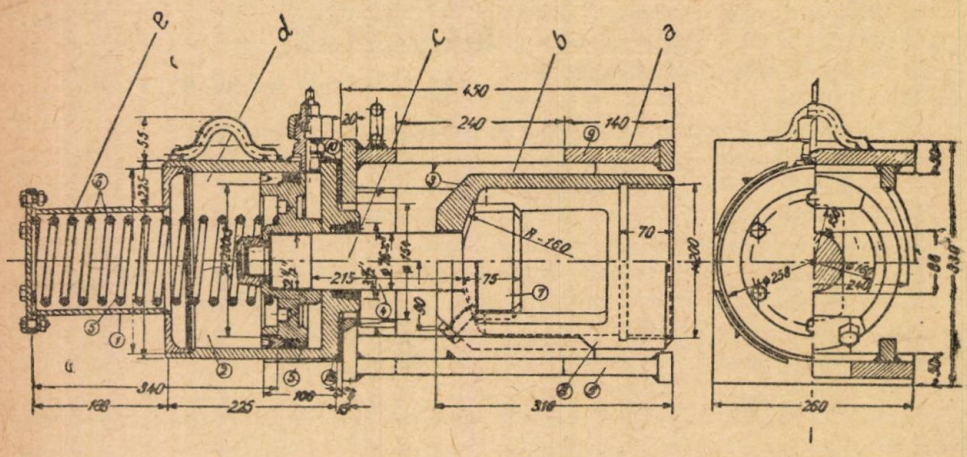


Fig. 3. — Schema de funcţionare a presei:
a) scaun de rezemare; *b)* mufă de prindere; *c)* piston; *d)* cilindru; *e)* arc pentru readucerea pistonului.

Primele fascicule de armătură au fost realizate într-un atelier al întreprinderii Sovromconstrucţie 5.

Toate celelalte operaţii pentru turnarea şi precomprimarea atît a unei grinzi experimentale cît şi a celor opt grinzi principale pentru un pod cu două deschideri de cîte 18,40 m au fost efectuate pe şantierul acestui pod, tot de către întreprinderea Sovromconstrucţie 5.

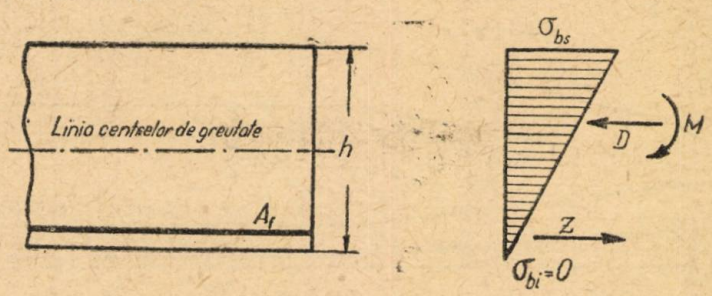


Fig. 4. — Starea de tensiune în stadiul de refisurare.

Utilajele întrebuinţate au fost puse la dispoziţie de către Institutul de mecanică aplicată.

În timpul executării lucrărilor, membri ai colectivului au îndrumat continuu pe executanţi în vederea însuşirii noii tehnologii.

4. *a)* Proiectarea grinzilor principale pentru pod a fost făcută de către fostul Institut de proiectare a construcţiilor speciale, pe baza metodei de calcul la fisurare simplificată, propusă şi în proiectul de norme tehnice redactat de E. A. Troiţki [2].

La grinda experimentală a fost completat calculul pentru stadiul limită de fisurare, conform propunerilor făcute de V. V. Mihailov [3].

Pentru a se putea trage concluzii asupra eforturilor totale existente în diferite momente în fasciculele de armături şi a se urmări în acest fel pierderile de tensiune în decursul timpului, s-au calculat şi momente de refisurare (redeschiderea unor fisuri existente din solicitări anterioare). Repartiţia eforturilor unitare în stadiul de refisurare a fost admisă cea din figura 4.

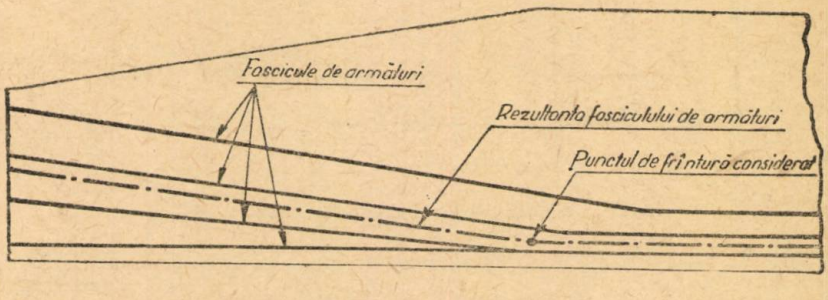


Fig. 5. — Grindă cu fascicule de armături ridicate spre reazime.

b) Calculul pierderilor de tensiune din fascicule datorită preîntinderii ulterioare a altor fascicule este, după proiectul de norme tehnice redactat de E. A. Troiţki, aproximativ şi a fost socotit ca nesatisfăcător. Din această cauză a fost stabilită, o nouă metodă de calcul a acestor pierderi de tensiune.

Metoda este stabilită pentru cazul general al unei grinzi cu moment de inerţie variabil, avînd fascicule de armături ridicate spre reazime, ca în figura 5. Se admite

că fasciculele sînt formate din porţiuni rectilinii, neglijîndu-se racordarea lor în arc de cerc; se admite de asemenea că toate fasciculele încep a fi ridicate din dreptul punctului în care începe să varieze şi momentul de inerţie al secţiunii.

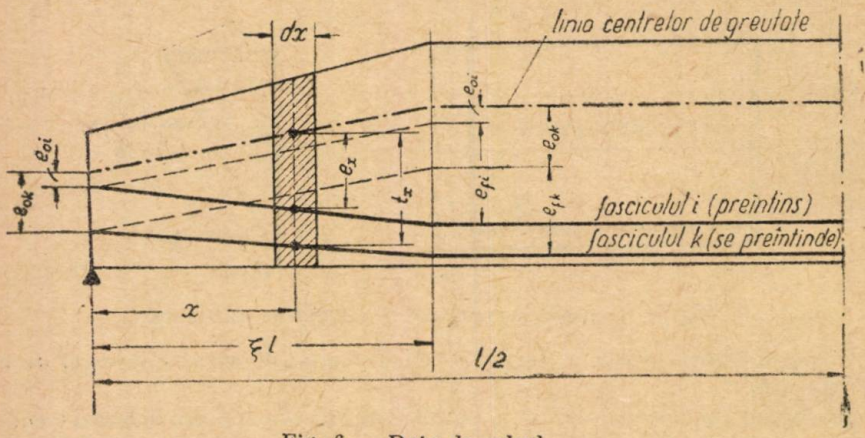


Fig. 6. — Date de calcul.

Pentru a studia efectul preîntinderii unui fascicul k asupra unui fascicul preîntins anterior i (fig. 6), se analizează deformaţiile unui element infinitezimal de lungime dx (fig. 7).

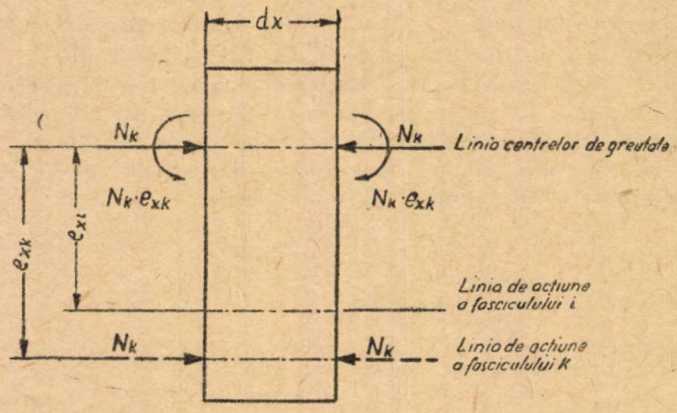


Fig. 7. — Echilibrul unui element infinitezimal.

Relaţia de continuitate ce rezultă pentru întreaga grindă este

$$\frac{\Delta N_i^k \, l}{E_a A_{fi}} = \int_0^l \frac{N_k \, dx}{E_b A_{bx}} + \int_0^l \frac{N_k \, e_{xi} \, e_{xk} \, dx}{E_b I_x}, \qquad (1)$$

unde s-a notat cu ΔN_i^k, pierderea de efort din fasciculul i sub acţiunea preîntinderii fasciculului k; E_a, modulul de elasticitate al armăturii; E_b, modulul de elasticitate al betonului; A_{fi}, secţiunea de armătură din fasciculul i, A_{bx} secţiunea de beton la distanţa x de reazim; I_x, momentul de inerţie al secţiunii de beton, la distanţa x, iar celelalte valori rezultă din figura 7.

Relaţia (1) exprimă egalitatea dintre deformaţia totală a fasciculului i între punctele de ancoraj, datorită preîntinderii fasciculului k şi scurtarea totală a fibrei de beton situată la nivelul armăturii.

Rezultă

$$\Delta\sigma_{ai}^{k} = \frac{\Delta N_i^k}{A_{fi}} = N_k \frac{E_a}{E_b\, l}\left(\int_0^l \frac{dx}{A_{bx}} + \int_0^l \frac{e_{xi}\, e_{xk}\, dx}{I_x}\right). \tag{2}$$

Pentru calculul integralelor pe porţiunile $0 - \xi l$ se înlocuiesc valorile

$$e_{xi} = e_{0i} + \frac{e_{fi}}{\xi l}\, x, \tag{3}$$

$$e_{xk} = e_{0k} + \frac{e_{fk}}{\xi l}\, x$$

$$A_{bx} = A_r + \frac{A_c - A_r}{\xi l}\, x \tag{5}$$

$$I_x = \frac{I_c - I_r}{3\xi^2 l^2}\, x^2 + \frac{2\,(I_c - I_r)}{3\,\xi l}\, x + I_r, \tag{6}$$

unde s-a notat cu A_r, secţiunea de beton pe reazim; A_c, secţiunea de beton constantă din porţiunea mijlocie a grinzii; I_r, momentul de inerţie al secţiunii de beton pe reazim; I_c, momentul de inerţie constant din porţiunea mijlocie a grinzii.

Justificarea relaţiei (6) este dată într-o lucrare anterioară [4].

Prin integrare, se obţine

$$\Delta\sigma_{ai}^{k} = N_k \frac{E_a}{E_b}\left[\frac{1+d\xi}{A_c} + \frac{e_{0i}\, e_{0k}\,(1-a\xi) + (e_{0i}\, e_{fk} + e_{0k}\, e_{fi})\,(1-b\xi) + e_{fi}\, e_{fk}\,(1-c\xi)}{I_c}\right] \tag{7}$$

în care valorile a, b, c şi d sînt de asemenea cele stabilite în lucrarea [4].

Generalizînd, se obţine pierderea de tensiune din fasciculul i sub acţiunea preîntinderii succesive a celorlalte fascicule

$$\Sigma\Delta\sigma_{ai}^{k} = \Delta\sigma_{ai} = \frac{E_a}{E_b}\left[\frac{1+d\xi}{A_c}\,\Sigma N_k + \right.$$
$$\left. + \frac{e_{0i}\,(1-a\xi)\,\Sigma N_k\, e_{0k} + (1-b\xi)\,(e_{0i}\,\Sigma N_k\, e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma N_k\, e_{0k}) + e_{fi}\,(1-c\xi)\,\Sigma N_k\, e_{fk}}{I_c}\right] \tag{8}$$

în care sumele ΣN_k, $\Sigma N_k\, e_{0k}$ şi $\Sigma N_k\, e_{fk}$ se extind la toate fasciculele puse sub tensiune după fasciculul i.

Dacă eforturile ce trebuie să rămînă în fascicule sînt aceleaşi, formula devine

$$\Delta\sigma_{ai} = N \frac{E_a}{E_b}\left[\frac{n\,(1+d\xi)}{A_c} + \right.$$
$$\left. + \frac{e_{0i}\,(1-a\xi)\,\Sigma e_{0k} + (e_{0i}\,\Sigma e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma e_{0k})\,(1-b\xi) + e_{fi}\,(1-c\xi)\,\Sigma e_{fk}}{I_c}\right] \tag{8'}$$

în care N este efortul din fiecare fascicul, iar n numărul fasciculelor ce se preîntind după fasciculul i.

Pentru grinzi cu secţiunea şi momentul de inerţie constante pe întreaga deschidere, $a = 0$, $b = 1$, $c = \frac{4}{3}$, $d = 0$.

Rezultă

$$\Delta\sigma_{ai} = \frac{E_a}{E_b}\left[\frac{\Sigma N_k}{A_c} + \frac{e_{0i}\,\Sigma N_k\, e_{0k} + (1-\xi)\,(e_{0i}\,\Sigma N_k\, e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma N_k\, e_{0k}) + e_{fi}\left(1 - \frac{4\xi}{3}\right)\Sigma N_k\, e_{fk}}{I_c}\right] \tag{9}$$

în cazul tensionării diferite a fasciculelor şi

$$\Delta\sigma_{ai} = N\frac{E_a}{E_b}\left[\frac{n}{A_c} + \frac{e_{0i}\,\Sigma e_{0k} + (e_{0i}\,\Sigma e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma e_{0k})\,(1-\xi) + e_{fi}\left(1 - \frac{4}{3}\xi\right)\Sigma e_{fk}}{I_c}\right] \tag{9'}$$

în cazul tensionării fasciculelor cu un acelaşi efort N.

Calcularea pierderilor de tensiune cu ajutorul formulelor stabilite a arătat că aplicarea formulei propusă de E. A. Troiţki duce la aproximări ce în multe cazuri nu pot fi socotite ca satisfăcătoare.

În tabloul nr. 1 sînt date valorile comparative rezultate pentru o grindă de tipul arătat în figura nr. 8, *a*, *b*, *c*, avînd şase fascicule a cîte 48 fire ø 7 şi

Tabloul nr. 1

Tabloul comparativ al pierderilor de tensiune

Fascicul	Efort de control	Spor faţă de efortul necesar %	Pierderi de tensiune					
			După metoda propusă, ţinînd seama de variaţia lui I şi A_b		După metoda propusă, fără a ţine seama de variaţia lui I şi A_b		După metoda propusă în proiectul de norme tehnice al lui E. A. Troiţki	
			kg/cm²	%	kg/cm²	% *)	kg/cm²	% *)
1	109,8	9,8	530	100	535	101	655	124
2	110,1	10,1	545	100	518	95	620	114
3	108,5	8,5	458	100	415	90	540	118
4	107,5	7,5	405	100	354	87	400	99
5	105,6	5,6	203	100	177	87	192	94
6	100,0	—	—	—	—	—	—	—

*) faţă de prima metodă.

la care trebuie să obţinem, după terminarea preîntinderii tuturor fasciculelor *), cîte 100 t efort iniţial în fiecare fascicul; $E_a = 1\,800\,000$ kg/cm², $E_b = 380\,000$ kg/cm².

*) În ordinea numerotării lor pe figura 8.

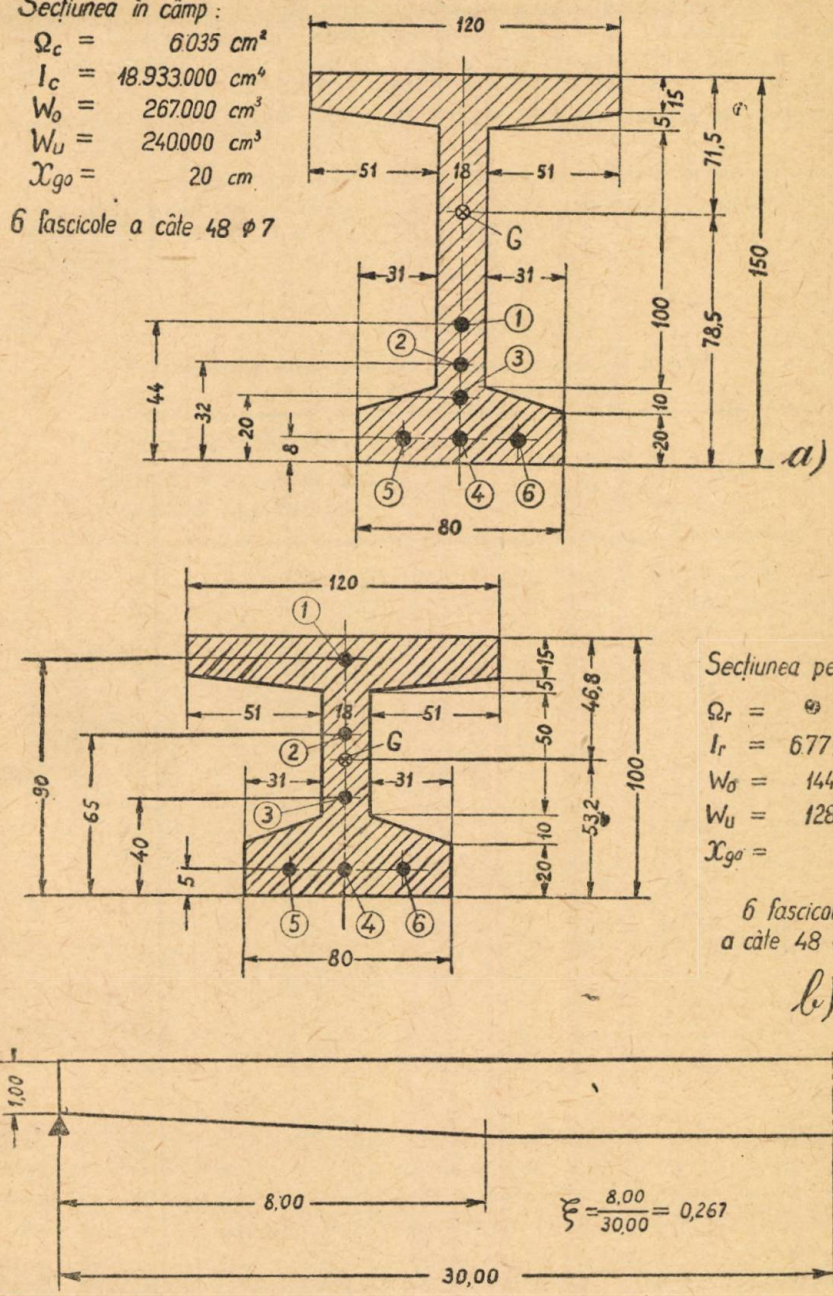


Fig. 8. — Grindă cu moment de inerție variabil și fascicole ridicate spre reazime:
a) secțiune transversală în cîmp; *b)* secțiune transversală pe reazim; *c)* vedere în lung;

5. Pe şantierul podului executat de Sovromconstrucţie 5, a fost realizată, de către aceeaşi întreprindere, pe baza îndrumărilor date de colectivul Institutului de mecanică aplicată, o grindă experimentală de dimensiunile grinzilor reale ale podului. Caracteristicile grinzii încercate sînt arătate în figurile 9, *a*, *b*, *c*, *d*.

Obiectivele principale care au stat la baza executării grinzii experimentale au fost:

— perfectarea şi verificarea tehnologiei de lucru pe şantier,

— verificarea comportării elementului în stadiu de fisurare şi de refisurare.

Tabloul nr. 2

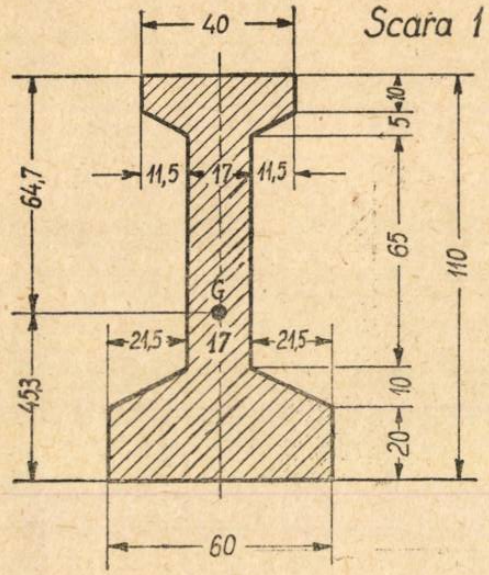
Săgeţile măsurate la încercarea grinzii de probă din beton precomprimat în ziua de 24.IX.1953

Nr. crt.	Ora	Presiunea în atmosfere	Sarcina în tone	Săgeţi măsurate în mm	
				la sfertul deschiderii	la mijlocul deschiderii
1	16^{30}	0	0	0,0	0,0
2	16^{40}	10	5	1,8	2,8
3	16^{55}	0	0	0,0	0,0
4	17^{00}	10	5	2,2	2,6
5	17^{00}	20	10	4,6	6,0
6	17^{05}	30	15	8,0	11,4
7	17^{07}	40	20	10,0	14,8
8	17^{09}	50	25	13,8	20,0
9	17^{10}	0	0	1,2	1,8
10	17^{15}	0	0	1,2	1,4
11	17^{17}	10	5	3,6	4,6
12	17^{20}	20	10	6,2	9,0
13	17^{22}	30	15	9,0	12,8
14	17^{24}	40	20	11,2	16,2
15	17^{25}	50	25	14,4	21,2
16	18^{05}	50	25	15,4	22,6
17	18^{10}	0	0	2,4	3,0
18	18^{35}	0	0	2,2	3,0

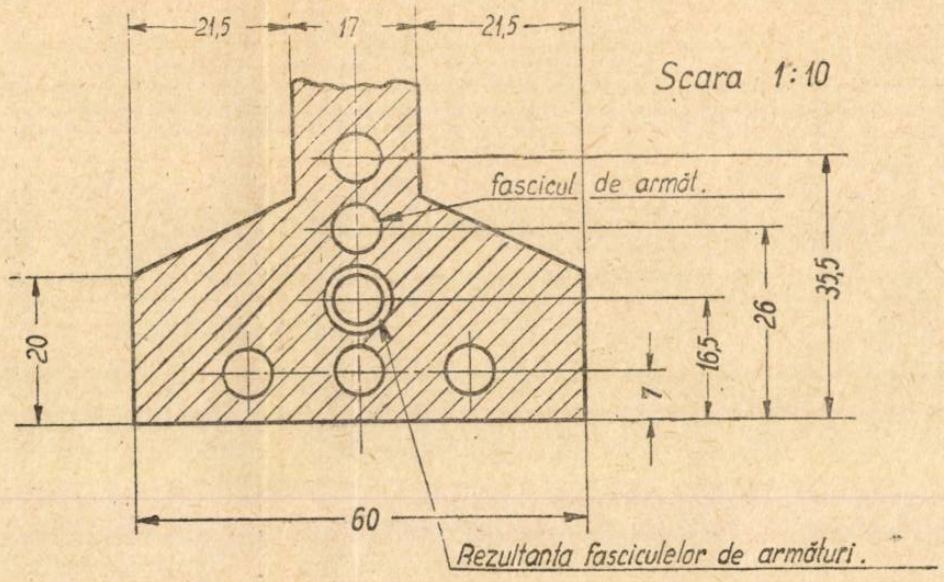
În figura 10 este arătată o fotografie de la încercarea grinzii. Încărcarea s-a făcut cu o singură forţă concentrată la mijlocul deschiderii, realizată cu ajutorul unei prese hidraulice. S-au măsurat săgeţile în zece puncte, la mijlocul grinzii, la sferturi şi în apropierea reazimelor, de o parte şi de alta a grinzii.

Rezultatele încercărilor sînt concretizate în diagramele din figurile 11—16. Durata încărcărilor rezultă din tablourile nr. 2 şi nr. 3.

6. Studiul întreprins şi în special încercările efectuate au arătat că sistemul de realizare a elementelor de beton precomprimat cu fascicule de armături, la care transmiterea efortului de la armături la beton se face prin pahare metalice de



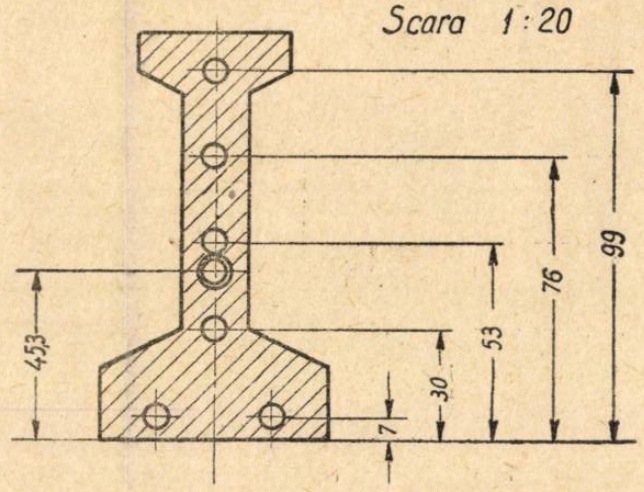
a)



b)

Poziția armăturii în dreptul reazimului

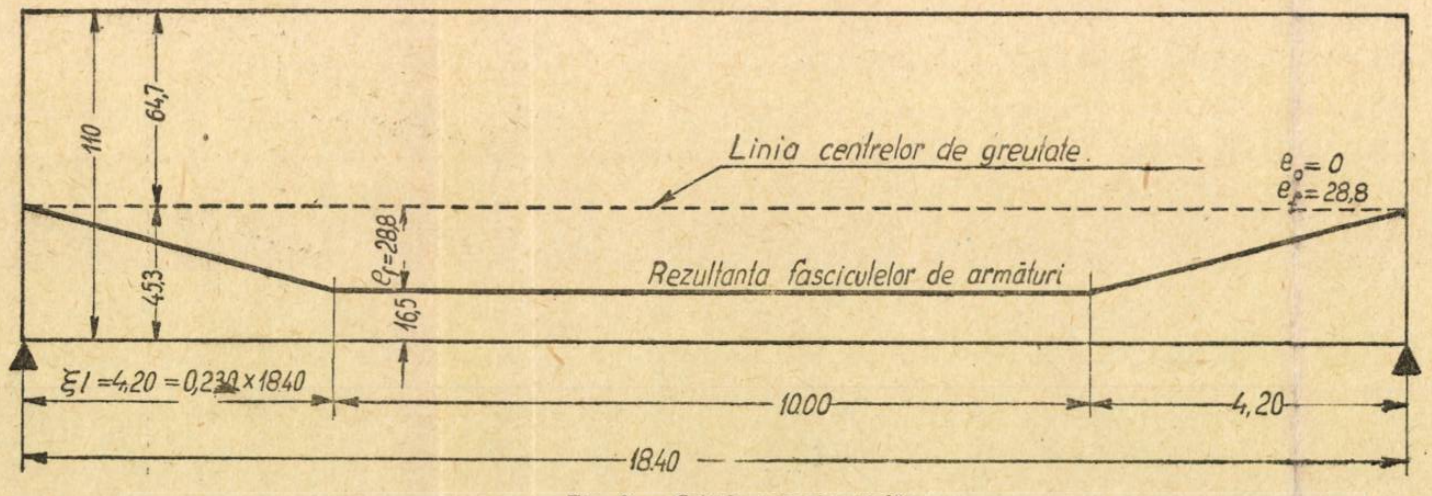
Xg. armăt. = 45,3 cm



c)

Schema desfășurării fasciculelor de armături în lungul grinzii.

Scara lung. = 1:100
Scara înălț. = 1:25



d)

Fig. 9. — Grinda experimentală:

a) secțiune transversală; *b)* poziția armăturii în cîmp; *c)* poziția armăturii pe reazim; *d)* schema desfășurării fasciculelor de armături.

ancoraj, poate fi întrebuinţat cu succes pe baza materialelor produse curent de industria din ţara noastră.

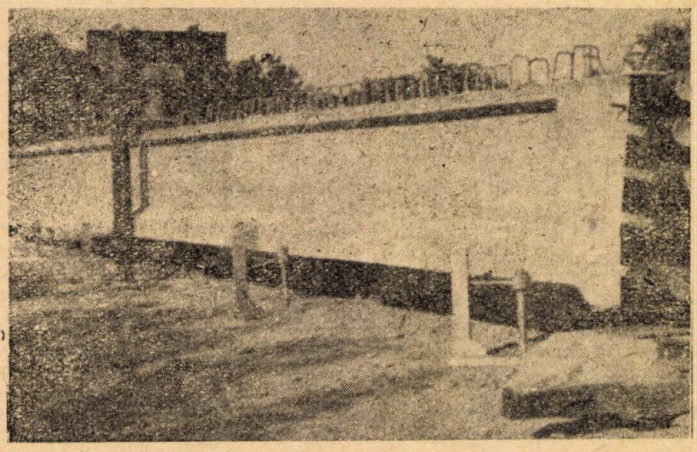


Fig. 10. — Încercarea grinzii experimentale.

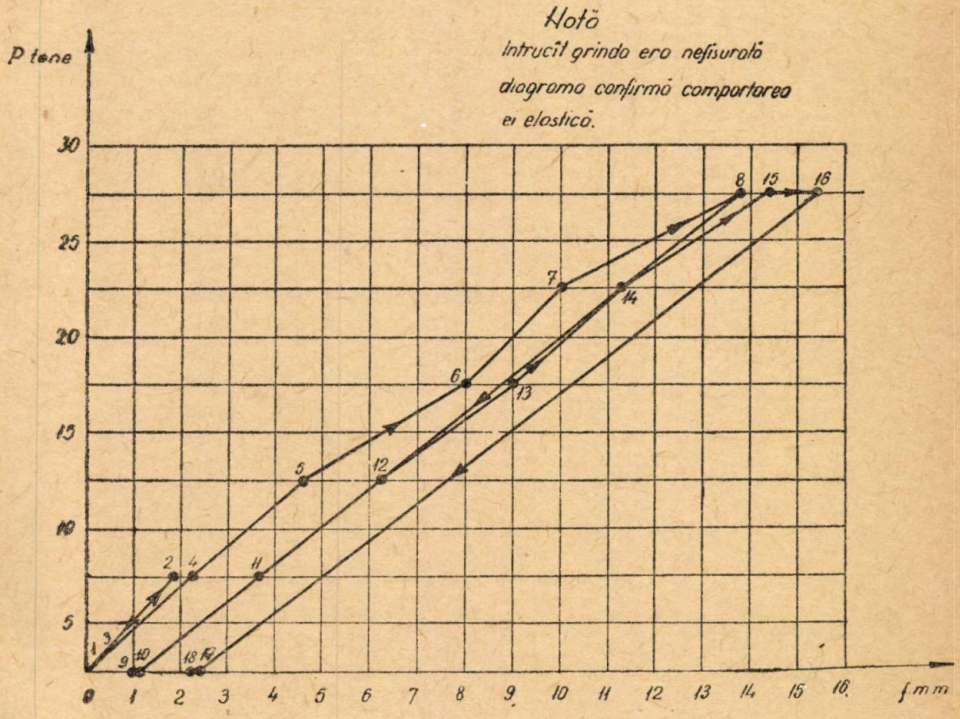


Fig. 11. — Diagrama sarcini-săgeţi, obţinută la încercarea grinzii de beton precomprimat, la sfertul deschiderii, în prima zi de încercări (24.IX.1953).

Utilajele proiectate şi realizate de colectivul Institutului de mecanică aplicată s-au dovedit a fi corespunzătoare, atît pentru realizarea grinzii experimentale, cît şi pentru tehnologia lucrărilor de şantier.

Metodele de calcul întrebuinţate s-au dovedit a fi foarte apropiate de comportarea reală a elementelor, atît în ceea ce priveşte calculele făcute pe baza propu-

Tabloul nr. 3

Săgeţile măsurate la încercarea grinzii de probă din beton precomprimat în ziua de 25.IX.1953

Nr. crt.	Ora	Presiunea în atmosfere	Sarcina în tone	Săgeţi măsurate în mm	
				la sfertul deschiderii	la mijlocul deschiderii
1	9^{00}	0	0	0,0	0,0
2	9^{10}	20	10	4,6	7,2
3	9^{15}	40	20	11,2	15,2
4	9^{20}	60	30	15,0	23,0
5	9^{50}	60	30	17,2	25,0
6	9^{55}	40	20	12,2	18,8
7	9^{57}	20	10	6,2	10,6
8	10^{00}	0	0	0,8	2,0
9	10^{30}	0	0	0,6	1,8
10	10^{35}	20	10	4,2	7,4
11	10^{40}	40	20	9,2	15,6
12	10^{45}	60	30	15,4	23,8
13	10^{50}	70	35	19,4	29,0
14	10^{55}	80	40	22,6	36,0
15	10^{56}	50	25	16,6	25,8
16	10^{58}	25	12,5	10,6	17,0
17	11^{00}	0	0	1,4	3,4
18	11^{10}	20	10	5,6	9,4
19	11^{15}	40	20	11,6	17,8
20	11^{20}	60	30	17,0	26,0
21	11^{25}	70	35	20,2	30,8
22	11^{30}	80	40	23,2	38,6
23	11^{35}	88	44	29,8	46,8
24	11^{40}	60	30	24,2	37,6
25	11^{48}	30	15	12,6	20,6
26	11^{55}	0	0	2,6	5,0
27	12^{10}	0	0	2,0	3,0
28	12^{15}	30	15	9,4	15,6
29	12^{20}	50	25	14,8	24,0
30	12^{25}	70	35	21,8	35,2
31	12^{35}	90	45	32,0	49,8
32	12^{45}	96	48	36,4	58,6
33	12^{50}	0	0	4,0	6,0
34	14^{50}	0	0	3,6	5,6

nerilor existente în literatura sovietică de specialitate, cît şi în ceea ce priveşte calculele făcute pe baza unor metode noi propuse.

Sistemul studiat este în general foarte indicat pentru realizarea elementelor din beton precomprimat de deschidere mare şi supuse unor solicitări importante.

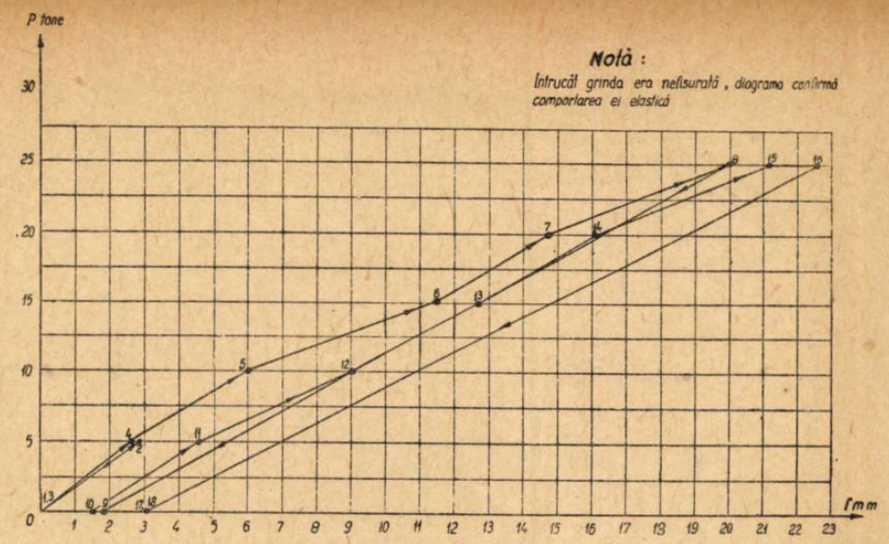


Fig. 12. — Diagrama sarcini-săgeți, obținută la încercarea grinzii de beton precomprimat, la mijlocul deschiderii, în prima zi de încercări (24.IX.1953).

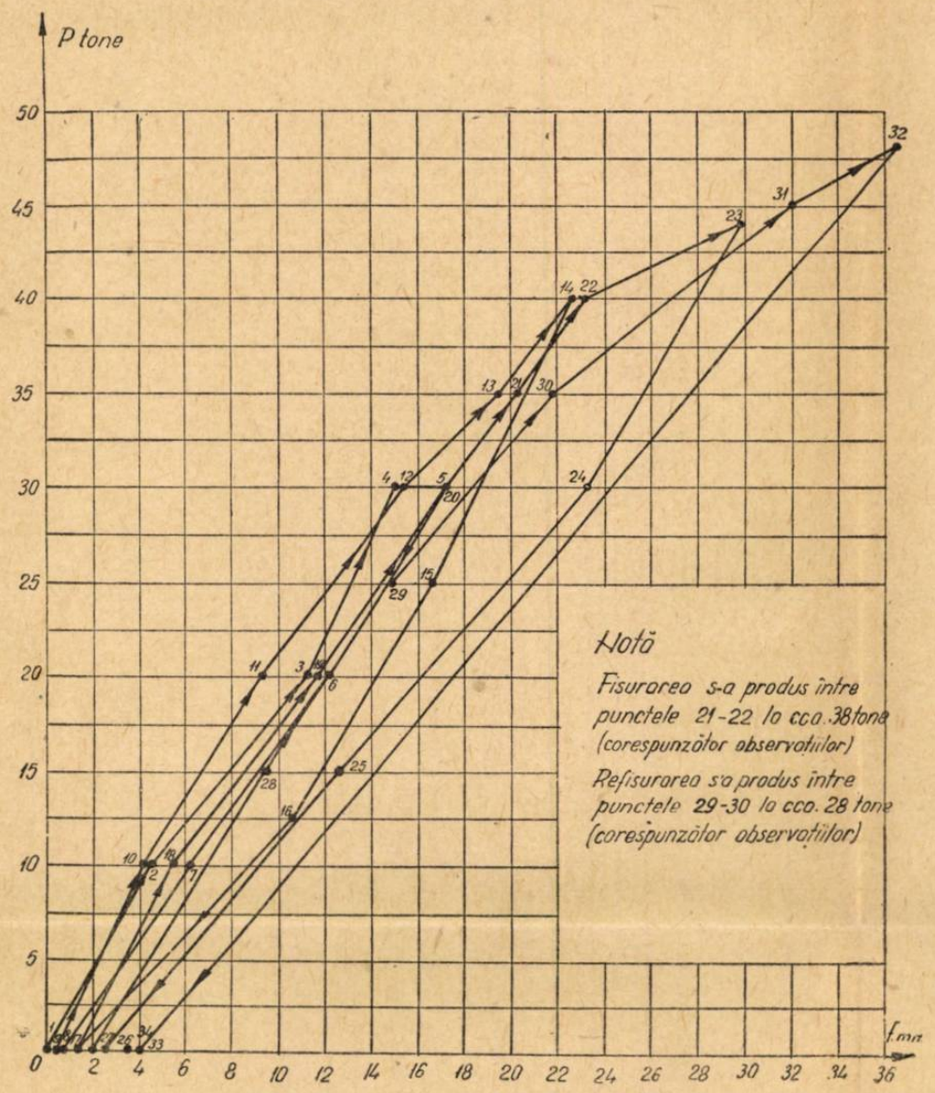

P tone
Notă
Fisurareo s-a produs între punctele 21-22 la cca. 38 tone (corespunzător observațiilor)
Refisurareo s-a produs între punctele 29-30 la cca. 28 tone (corespunzător observațiilor)
f mm

Fig. 13. — Diagrama sarcini-săgeți obținută la încercarea grinzii de probă de beton precomprimat, la sfertul deschiderii, în ziua a doua de încercări (25.IX.1953).

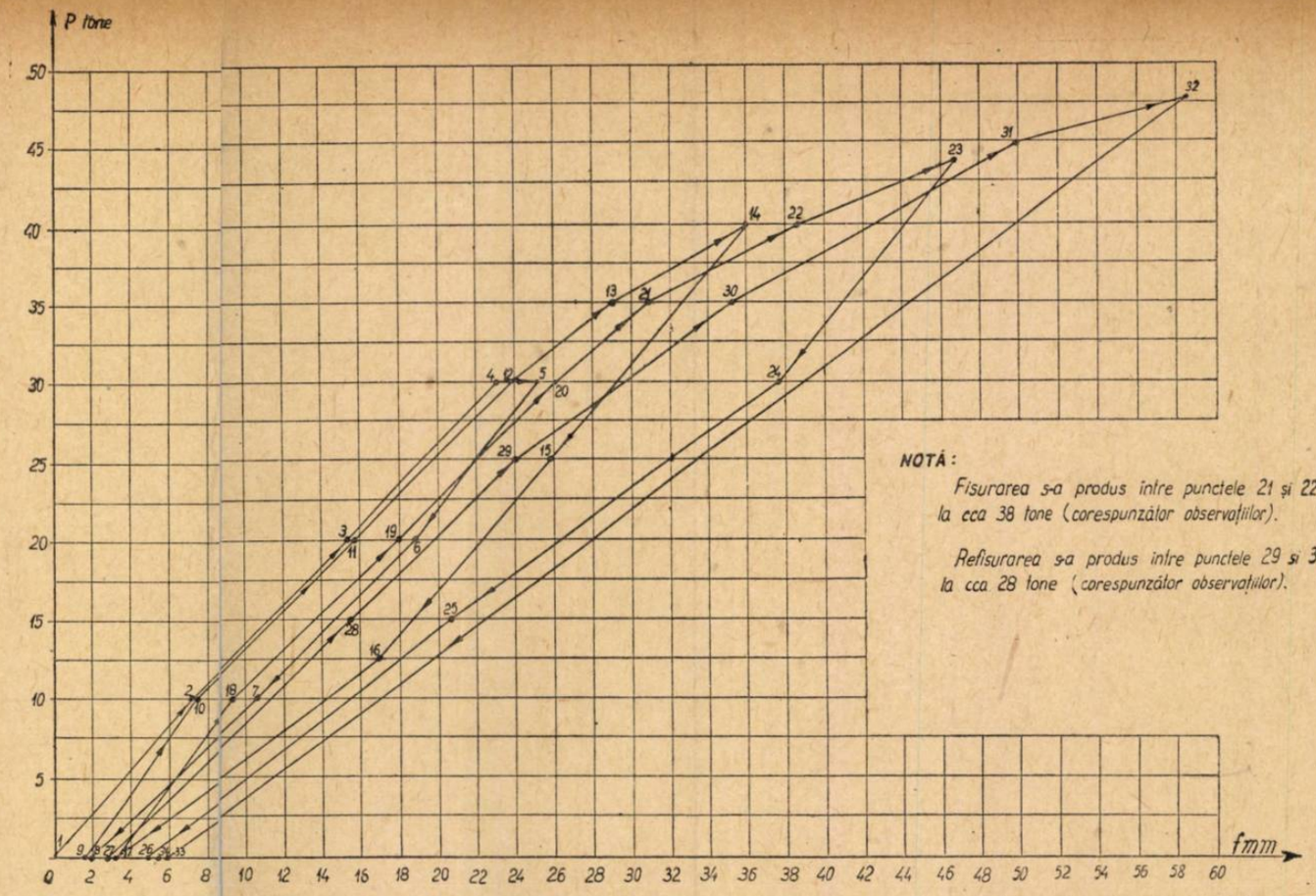

P tone
NOTĂ :
Fisurarea s-a produs între punctele 21 și 22 la cca 38 tone (corespunzător observațiilor).
Refisurarea s-a produs între punctele 29 și 30 la cca 28 tone (corespunzător observațiilor).
f mm

Fig. 14. — Diagrama sarcini-săgeți, obținută la încercarea grinzii de probă de beton precomprimat la mijlocul deschiderii în ziua a doua de încercări (25.IX.1953).

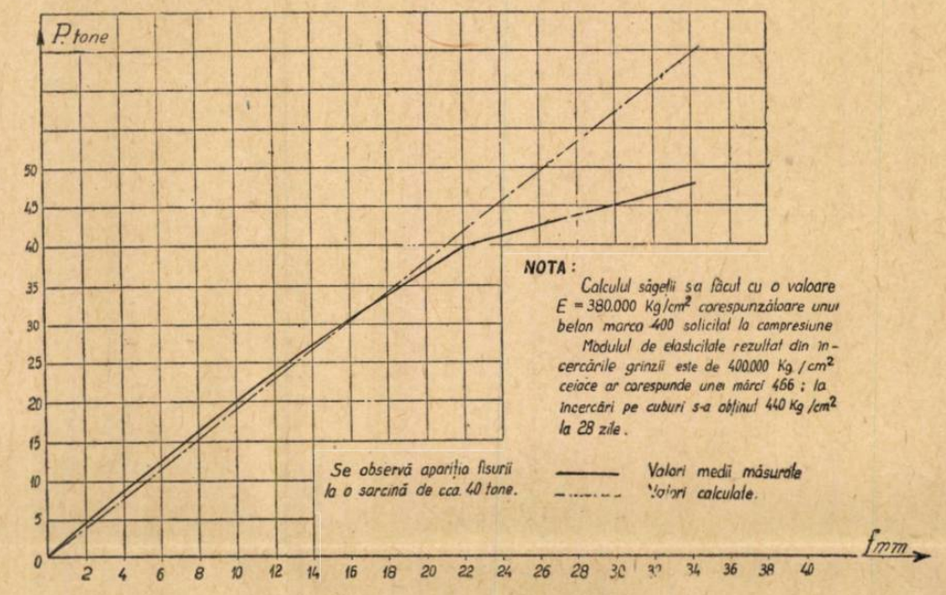

P tone
NOTA :
Calculul săgeții s-a făcut cu o valoare E = 380.000 Kg/cm² corespunzătoare unui beton marca 400 solicitat la compresiune
Modulul de elasticitate rezultat din încercările grinzii este de 400.000 Kg/cm² ceiace ar corespunde unei mărci 466 ; la încercări pe cuburi s-a obținut 440 Kg/cm² la 28 zile.
Se observă apariția fisurii la o sarcină de cca. 40 tone.
Valori medii măsurate
Valori calculate.
f mm

Fig. 15. — Comparație între valorile medii măsurate și calcul, pentru săgețile la sfertul deschiderii

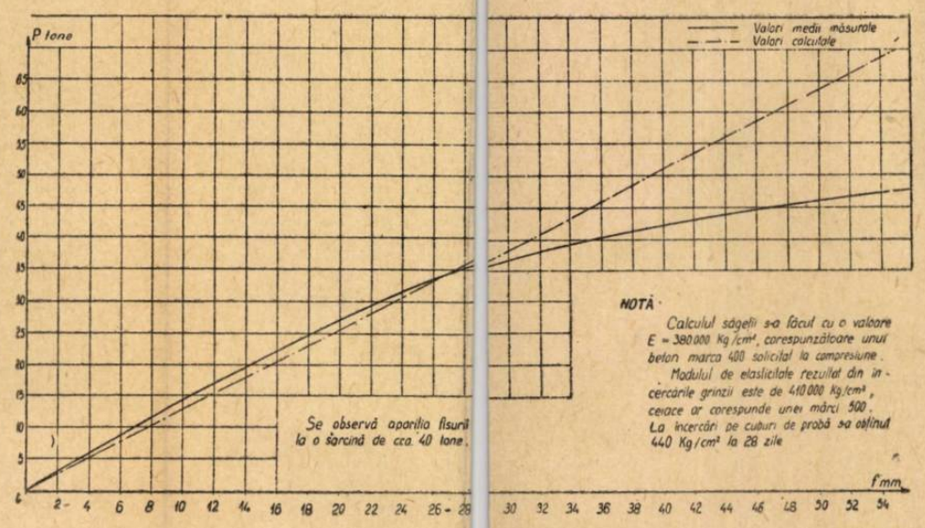

P tone
Se observă apariția fisurii la o sarcină de cca. 40 tone.
Valori medii măsurate
Valori calculate
NOTĂ :
Calculul săgeții s-a făcut cu o valoare E = 380.000 Kg/cm², corespunzătoare unui beton marca 400 solicitat la compresiune.
Modulul de elasticitate rezultat din încercările grinzii este de 410.000 Kg/cm², ceiace ar corespunde unei mărci 500.
La încercări pe cuburi de probă s-a obținut 440 Kg/cm² la 28 zile
f mm

Fig. 16. — Comparație între valorile medii măs urate și calcul, pentru săgețile la mijlocul deschi ierii.

ГЛАВНЫЕ МОСТОВЫЕ БАЛКИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении приводятся результаты предпринятого коллективом теоретического и экспериментального исследования частей из предварительно напряженного железобетона с натянутыми после отливки пучками арматуры, в которых передача усилий от арматуры бетону происходит посредством металлических цилиндрических анкерных тяжей.

Авторы дают указания, относящиеся к оборудованиям, осуществленным по проектам коллектива. Далее описывается своеобразный метод вычисления потерь напряжения в пучках, вызванных последующим предварительным напряжением других пучков; этот метод более приближается к происходящему в действительности физическому явлению, чем ныне применяемый приближенный метод.

Приводятся также разработанные результаты испытания балки на теоретическом пролете в 18,40 м длины, произведенного на стройке первого в РНР моста, построенного из предварительно напряженного железобетона.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Металлический цилиндрический тяж.

Рис. 2. — Пресс, построенный в Институте прикладной механики.

Рис. 3. — Схема работы пресса: *a* — опора; *b* — захватывающая муфта; *c* — поршень; *d* — цилиндр; *e* — пружина, приводящая поршень в исходное положение.

Рис. 4. — Состояние натяжения при вторичном растрескивании.

Рис. 5. — Балка с пучками арматуры, приподнятыми к опорам.

Рис. 6. — Данные вычисления.

Рис. 7. — Равновесие бесконечно малого элемента.

Рис. 8. — Балка с переменным моментом инерции и пучками, приподнятыми к опорам: *a* — поперечное сечение в середине пролета; *b* — поперечное сечение на опоре; *c* — вид в длину.

Рис. 9. — Испытуемая балка: *a*—поперечное сечение; *b*—положение арматуры в пролете; *c* — положение арматуры на опоре: *d*—схема развернутого пучка арматуры.

Рис. 10. — Испытание балки.

Рис. 11. — Диаграмма стрел-нагрузки при испытании балки из предварительно напряженного железобетона на четверти пролета в первый день опытов (24.IX.1953).

Рис. 12. — Диаграмма стрел-нагрузки при испытании балки из предварительно напряженного железобетона на середине пролета в первый день опытов (24.IX.1953).

Рис. 13. — Диаграмма стрел-нагрузки при испытании пробных балок из предварительно напряженного железобетона на четверти пролета во второй день опытов (25.IX.1953).

Рис. 14. — Диаграмма стрел-нагрузки при испытании пробной балки из предварительно напряженного железобетона на середине пролета во второй день опытов (25.IX.1953).

Рис. 15. — Сравнение измеренных и вычисленных средних значений стрел на четверти пролета.

Рис. 16. — Сравнение измеренных и вычисленных средних значений стрел на середине пролета.

POUTRES MAÎTRESSES POUR PONTS EN BÉTON PRÉCONTRAINT

(RÉSUMÉ)

L'ouvrage contient les résultats des études théoriques et expérimentales, entreprises par un collectif de chercheurs, au sujet des éléments en béton précontraint, à faisceaux d'armatures post-tendues où la transmission des efforts, des armatures au béton, a lieu par l'intermédiaire de cloches métalliques d'ancrage.

On y donne des indications sur l'outillage réalisé d'après les projets du collectif. On expose une méthode originale pour le calcul des pertes de tension des faisceaux, dues à la précontrainte ultérieure d'autres faisceaux, méthode qui se rapproche de la réalité du phénomène physique plus que la méthode approximative actuelle.

On expose, également les résultats des essais d'une poutre expérimentale de 18,40 m de portée théorique, essais qui ont été effectués sur le chantier du premier pont en béton précontraint de ce type, construit dans la République Populaire Roumaine.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Cloche métallique d'ancrage.

Fig. 2. — Presse réalisé à l'Institut de Mécanique Appliquée.

Fig. 3. — Schéma du fonctionnement de la presse. *a)* siège d'appui; *b)* manchon de prise; *c)* piston; *d)* cylindre; *e)* arc pour le retour du piston.

Fig. 4. — Etat de tension au stade de réfissuration.

Fig. 5. — Poutre à faisceaux d'armatures relevés vers les appuis.

Fig. 6. — Données de calcul.

Fig. 7. — Equilibre d'un élément infinitésimal.

Fig. 8. — Poutre à moment d'inertie variable et faisceaux relevés vers les appuis: *a)* section transversale dans le champ: *b)* section transversale sur l'appui; *c)* vue en longueur.

Fig. 9. — La poutre expérimentale: *a)* section transversale; *b)* position de l'armature dans le champ; *c)* position de l'armature sur l'appui; *d)* schéma du développement des faisceaux d'armature.

Fig. 10. — Essai de la poutre expérimentale.

Fig. 11. — Diagramme charge-flèches, obtenu à l'essai de la poutre en béton précontraint, au quart de la portée, le premier jour des essais (24.IX.1953).

Fig. 12. — Diagramme charge-flèche, obtenu à l'essai de la poutre en béton précontraint, au milieu de la portée, le premier jour des essais (24.IX.1953).

Fig. 13. — Diagramme charge-flèche, obtenu à l'essai de la poutre en béton précontraint, au quart de la portée, le second jour des essais (25.IX.1953).

Fig. 14. — Diagramme charge-flèche, obtenu à l'essai de la poutre en béton précontraint, au milieu de la portée, le second jour des essais (25.IX.1953).

Fig. 15. — Comparaison entre les valeurs moyennes mesurées et le calcul pour les flèches au quart de la portée.

Fig. 16. — Comparaison entre les valeurs moyennes mesurées et le calcul, pour les flèches au milieu de la portée.

BIBLIOGRAFIE

1. B. V. Iakubovski, *Utilizarea betonului precomprimat la poduri*. Ed. Ministerului Construcţiilor, Bucureşti, 1953.
2. E. A. Troiţki, *Raşciot i proektirovanie mostovîh proliotnîh stroenii iz predvaritelno napriajionovo jelezobetona s moşcinîmi armaturnîmi pucikami*. Transjeldorizdat, Moscova, 1951.
3. V. V. Mihailov, *Raşciot procinosti i trescinoustoicivosti predvaritelno napriajionîh jelezobetonîh konstrukţii*. Din culegerea de articole *Isledovania obicinîh i predvaritelno napriajionîh jelezobetonih i predvaritelno napriajionîh jelezobetonîh konstrukţii*. Stroiizdat, Moscova—Leningrad, 1949.
4. V. Nicolau, A. Froimescu şi M. Weissenberg, *Grinzi pentru planşee din beton precomprimat. Planşeu-cheson din beton precomprimat*. Ed. Ministerului Construcţiilor, Bucureşti, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

CALCULUL PIERDERII DE TENSIUNE DATORITĂ PREÎNTINDERII SUCCESIVE A FASCICULELOR DE ARMĂTURI

DE

A. FROIMESCU

Printre pierderile de tensiune ce se produc odată cu tensionarea fasciculelor de armături rezistente, la elementele de beton precomprimat, trebuie considerată ca fiind foarte importantă şi aceea care se datoreşte faptului că fasciculele nu se întind concomitent, ci succesiv.

Într-adevăr, prin tensionarea unui fascicul de armături, elementele de beton precomprimat capătă o serie de eforturi unitare în diferitele sale secţiuni. Ca urmare a acestor eforturi unitare, iau naştere deformaţii, care modificînd distanţa iniţială dintre ancorajele fasciculelor de armături întinse în prealabil, duc la o modificare a stării de tensiune a acestor fascicule. Bineînţeles, fasciculele care nu au fost încă tensionate, nu capătă nici un fel de efort, datorită faptului că ele se pot mişca liber în învelişul protector de tablă.

Aceste pierderi de tensiune au fost constatate şi experimental; se pune problema de a le evalua cît mai exact, pentru a putea da iniţial un spor de efort, în aşa fel, ca după producerea pierderilor să rămînă în armături efortul de preîntindere dorit.

Constructorii din occident nu s-au ocupat de această problemă; ei înglobează aceste pierderi în totalul de 15 % din efortul iniţial, în care intră şi pierderile datorite curgerii, contracţiei etc.

Acest mod de a privi problema este total neştiinţific.

Constructorii sovietici recomandă să se ţină seama separat de pierderea de tensiune datorită preîntinderii succesive a fasciculelor de armături. Formula de calcul recomandată de ei este următoarea

$$\Delta\sigma_{a_1} = n\,\Delta\sigma_{bm},$$

în care $\Delta\sigma_{a_1}$ este pierderea de tensiune din fascicul, $n = \frac{E_a}{E_b}$ este coeficientul de echivalenţă, $\Delta\sigma_{bm}$ este efortul unitar în beton datorită precomprimării sub acţiunea tuturor fasciculelor întinse ulterior fasciculului considerat, la nivelul centrului de greutate al armăturii, în secţiunea de la sfertul deschiderii, considerîndu-se că nu s-au produs încă pierderi din contracţie şi din curgere lentă.

Acest mod de a calcula pierderile de tensiune amintite, deşi uneori dă valori destul de apropiate de cele reale, nu este satisfăcător, deoarece nu ţine seama de felul real în care lucrează elementul de beton precomprimat. Obţinerea pierderii de tensiune din armătură prin multiplicarea tensiunii din beton cu raportul modulelor de elasticitate ar fi just dacă armătura ar fi aderentă. Acest lucru nu este adevărat, chiar dacă se presupune că fasciculele sînt blocate ulterior prin injectarea de mortar sub presiune, deoarece în orice caz această injectare şi restabilire a aderenţei se produce numai după preîntinderea tuturor fasciculelor.

În acest mod de calcul se consideră pentru calculul pierderii de tensiune din armătură, secţiunea de la sfertul grinzii de beton precomprimat, ca avînd un efort unitar mediu pe întreaga grindă. Ce se întîmplă însă dacă grinda are înălţime sau lăţime variabilă şi sfertul grinzii nu mai reprezintă nici măcar aproximativ secţiunea de efort unitar mediu din dreptul rezultantei fasciculelor de armături? Mai mult, în felul acesta nu se poate ţine seamă de poziţia reală a armăturii preîntinse, care din motive bine cunoscute se ridică spre reazemele grinzii.

Este clar că nici această metodă nu este satisfăcătoare.

În cele ce urmează, am căutat să rezolv exact problema, ţinînd seama şi de variaţia momentului de inerţie şi a secţiunii în lungul grinzii, precum şi de poziţia reală a fasciculelor de armături. Formulele mai complicate au fost prelucrate în aşa fel, încît cu ajutorul datelor din tabloul nr. 1, calculele practice să nu prezinte nici o dificultate.

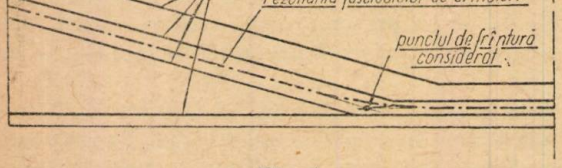


Fig. 1

Aşa cum se va vedea, premizele metodei de calcul se bazează pe condiţiile reale de lucru ale structurii. Ca ipoteze simplificatoare pentru uşurarea calculelor se presupune că punctul de frîntură, de la care se ridică spre reazeme rezultanta fasciculului de armături, coincide cu punctul de unde începe variaţia momentului de inerţie şi a secţiunii grinzii; acest lucru poate fi cu uşurinţă realizat la proiectare, cu atît mai mult cu cît duce la o raţională şi economică folosire a materialelor.

De asemenea, se presupune că fasciculele de armături sînt rectilinii, cu un punct de frîntură ce are poziţia considerată mai sus. În ultimul timp, s-a renunţat la trasee parabolice de armături, mai greu de realizat la execuţie, iar racordarea în arc de cerc a celor două părţi rectilinii de care nu se ţine seama în cele ce urmează, nu are mare importanţă în calcule.

Se mai presupune că toate fasciculele au acelaşi punct de frîntură, lucru care se întîmplă în majoritatea cazurilor. Atunci cînd acest lucru nu corespunde cazului considerat, se poate lua pentru fiecare fascicul, ca punct de frîntură, punctul în care se intersectează tangentele la rezultanta fasciculelor de armături duse la capătul şi mijlocul grinzii (fig. 1).

Ţinînd seamă de aceste ipoteze simplificatoare, să trecem la calculul pierderii de tensiune care ne preocupă.

Să presupunem grinda din figura 2, supusă acţiunii a două fascicule de armături, urmînd ca ulterior să se generalizeze problema. Fasciculul i fiind preîntins, vom calcula pierderea din efortul iniţial cu care a fost preîntins acest fascicul, pierdere produsă de preîntinderea fasciculului k cu efortul Nk.

Sub acţiunea preîntinderii fasciculului k, grinda de beton precomprimat suferă deformaţii; prin modificarea poziţiei relative a ancorajelor de capăt ale fasciculului i preîntins mai înainte, starea de tensiune a acestuia suferă modificări.

Pentru calculul acestei modificări a stării de tensiune a fasciculului i, să izolăm, aşa cum se arată în figura 2, un element infinitezimal dx.

Se ştie că efectul armăturii preîntinse se caracterizează printr-o forţă de compresiune egală cu efortul de preîntindere şi care solicită fiecare secţiune a grinzii în punctul în care armătura preîntinsă o intersectează, direcţiunea forţei fiind paralelă cu cea a armăturii.

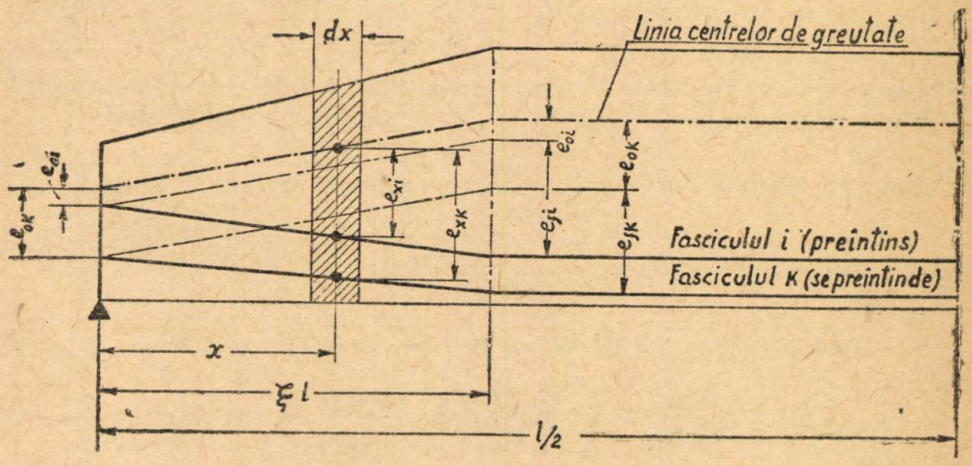


Fig. 2

În toate cazurile considerate, secţiunea este simetrică faţă de o axă verticală, iar fasciculele de armături sînt şi ele aşezate simetric faţă de această axă; în cele ce urmează, se va ţine seamă de acest lucru.

Înclinarea fasciculelor de armături ridicate spre capetele grinzii nu depăşeşte aproape niciodată 1:10; cum cosinusul maxim respectiv este 0,996, se poate neglija, practic fără eroare, înclinarea forţei, considerînd-o normală pe secţiunea verticală.

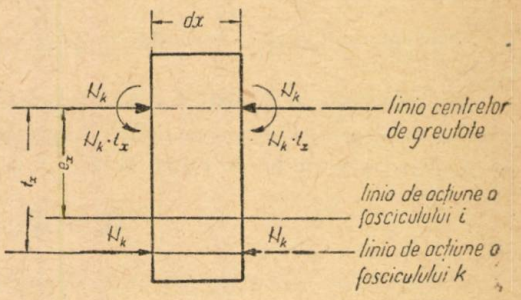


Fig. 3

• Cu aceste consideraţii suplimentare, să revenim la elementul infinitezimal dx pe care l-am izolat; eforturile care îl solicită se văd în figura 3. Sub acţiunea acestora, elementul infinitezimal capătă următoarele deformaţii elementare:

deformaţie axială

$$\Delta l_b^{N_k} = \frac{-N_k\, dx}{E_b\ \Omega_x}$$

rotire

$$\Delta^{N_k}\theta = \frac{N_k\, t_x\, dx}{E_b \cdot I_x}.$$

Relaţia de continuitate pentru obţinerea pierderii de tensiune ΔN_i a fasciculului i se obţine punînd condiţia ca în punctele de ancorare ale fasciculului i să nu existe deplasări relative între beton şi armătură. Cu alte cuvinte, se scrie că deformaţia axială totală a armăturii între punctele de ancoraj (datorită pierderii de tensiune considerată ca un efort de compresiune, deoarece micşorează efortul iniţial de întindere) trebuie să fie egală cu scurtarea totală a fibrei de beton situată la nivelul armăturii.

Scurtarea totală a armăturii sub acţiunea unui efort ΔN_i este

$$\Delta l_a^{\Delta N_i} = \frac{-\Delta N_i \cdot l}{E_a \Omega_{a_i}}.$$

Scurtarea totală a fibrei de beton situată la nivelul fasciculului i se obţine integrînd scurtările elementare ale elementului infinitezimal. Aceste scurtări sînt:

din forţa normală $\Delta l_b^{N_k} = \dfrac{-N_k\, dx}{E_b \Omega_x}$ (acelaşi ca în centrul de greutate)

din moment $\Delta l_b^{N_k} = -\Delta\theta \cdot e_x = -\dfrac{N_k t_x e_x}{E_b I_x} dx.$

Cu aceste elemente, relaţia de continuitate, amintită mai înainte, se scrie

$$\frac{\Delta N_i\, l}{E_a \Omega_{a_i}} = \int_0^l \frac{N_k\, dx}{E_b \Omega_x} + \int_0^l \frac{N_k t_x e_x\, dx}{E_b I_x},$$

de unde

$$\frac{\Delta N_i}{\Omega_{a_i}} = \Delta\sigma_{a_i} = N_k \frac{E_a}{E_b} \cdot \frac{1}{l}\left(\int_0^l \frac{dx}{\Omega_x} + \int_0^l \frac{t_x e_x\, dx}{E_x}\right).$$

Pentru explicitarea formulei trebuie exprimate valorile variabile e_x, t_x, Ω_x şi I_x.

Referindu-ne la figurile 4 şi 5, se poate spune că y variază cu puterea întîia a a lui x deoarece vuta creşte liniar. Expresia lui Ω_x va varia deci liniar în funcţie de x, prin urmare se va putea scrie

$$\Omega_x = A + Bx.$$

Dacă se ţine seama de notaţiile din figură, se poate scrie

$$\Omega_x = \Omega_r + \frac{\Omega_c - \Omega_r}{\xi l} x.$$

Expresia lui y_g^x va fi alcătuită dintr-o fracţie care va avea la numărător momentul static al suprafeţelor ce constituie secţiunea, luat în raport cu faţa de jos a secţiunii, iar la numitor secţiunea totală. Momentul static al suprafeţelor este o funcţie de gradul doi în y deci tot de gradul doi şi în x.

$$y_g^x = \frac{Cx^2 + Dx}{A + Bx} = Ex + F + \frac{G}{A + Bx}.$$

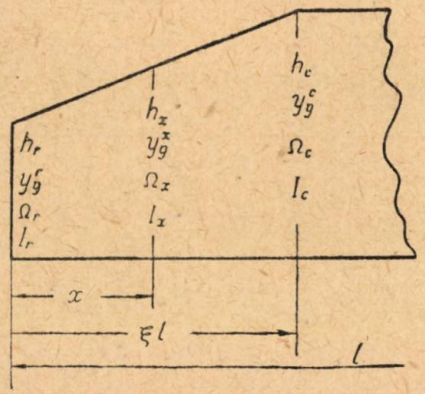


Fig. 4

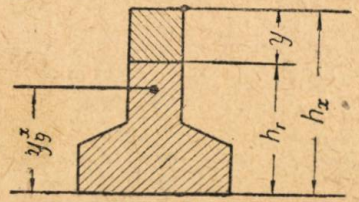


Fig. 5

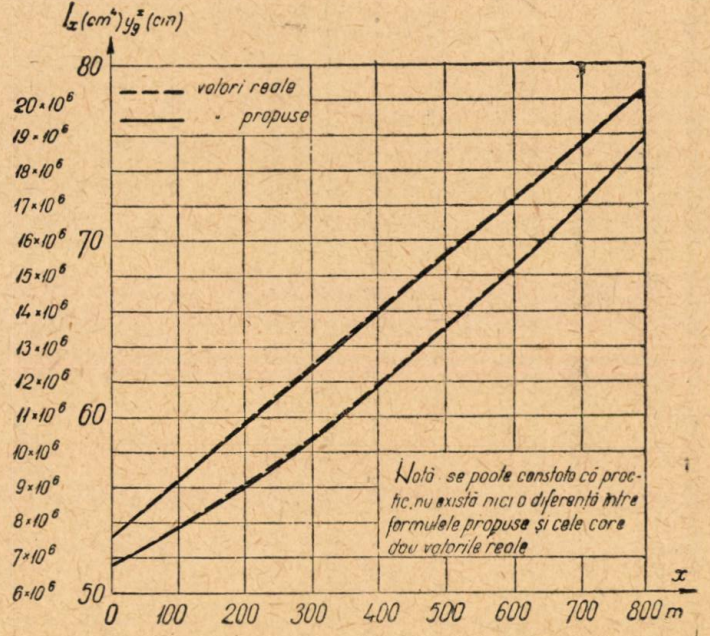


Fig. 6

În cele ce urmează, pentru a face posibile operațiile de integrare, se va neglija ultimul termen al expresiei lui y_g^x, care face ca valoarea acesteia să varieze curbiliniu; se va considera deci o variație liniară pentru y_g^x și anume

$$y_g^x = y_g^r + \frac{y_g^c - y_g^r}{\xi l} x.$$

În abaca I din figura 6 care însoțește exemplul de calcul, se arată variația reală a lui y_g^x și cea propusă; din figură se vede că aproximația este pe deplin admisibilă.

Considerînd că y_g^x variază liniar cu x, expresia lui I_x îl va conține pe y la puterea a treia

$$I_x = Hy^3 + Iy^2 + Ly + M.$$

Termenul Hy^3 reprezintă momentul de inerție al porțiunii de înălțime variabilă y luat față de centrul său de greutate. Din statică se știe că aceste valori sînt întotdeauna mici și că se pot neglija în raport cu valorile obținute prin multiplicarea

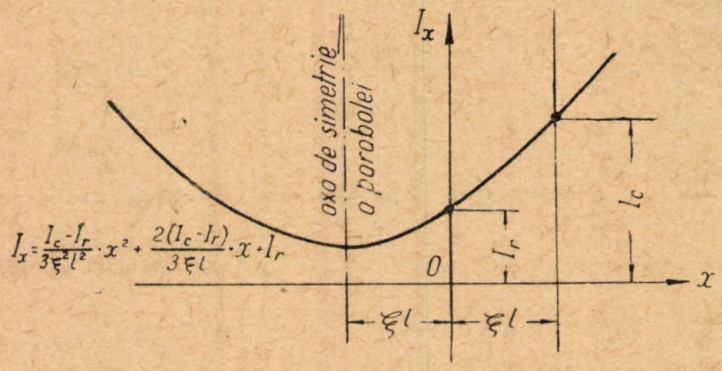


Fig. 7

secțiunii cu patratul distanței dintre centrul de greutate al secțiunii respective și centrul de greutate al secțiunii totale. Neglijînd acest termen, expresia momentului de inerție rămîne de gradul doi, făcînd astfel posibilă efectuarea integralelor.

S-a ales ca expresie a variației momentului de inerție funcția

$$I_x = \frac{I_c - I_r}{3\,\xi^2 l^2} x^2 + \frac{2\,(I_c - I_r)}{3\,\xi\, l} x + I_r.$$

Această funcție îndeplinește condiția ca pentru $x = 0$, $I_x = I_r$ și pentru $x = \xi l$, $I_x = I_c$.

Pentru determinarea expresiei lui I_x a mai trebuit să fie fixată o constantă; s-a observat pe un număr suficient de mare de exemple că o parabolă de gradul doi reprezintă cît mai exact posibil valoarea reală a lui I_x, dacă se consideră că distanța pe axa absciselor de la vîrful parabolei pînă la $x = 0$ este egală cu ξl adică cu diferența absciselor dintre punctele de ordonate I_c și I_r, așa cum se arată în figura 7; expresia aleasă pentru I_x îndeplinește și această condiție.

În abaca I, care însoțește exemplul de calcul, s-au trecut și valorile reale ale lui I_x precum și cele obținute cu formula propusă. Se vede clar buna concordanță care justifică alegerea expresiei pentru I_x.

Cu ajutorul expresiilor Ω_x şi I_x de mai sus, se poate trece acum la explicitarea formulei.

Calculul valorii $\int_0^l \frac{dx}{\Omega_x}$.

Cum pentru $\xi l < x < \frac{l}{2}$, $\Omega_x = \Omega_c = \text{const.}$ se va efectua integrarea pe porţiuni. Se obţine

$$\int_0^l \frac{dx}{\Omega_x} = 2\int_0^{\xi l} \frac{dx}{\Omega_r + \frac{\Omega_c - \Omega_r}{\xi l}\, x} + 2\int_{\xi l}^{l/2} \frac{dx}{\Omega_x}$$

Efectuînd integralele, se obţine

$$\int_0^l \frac{dx}{\Omega_x} = \frac{l}{\Omega_c}(1 + d\,\xi),$$

în care

$$d = 2\left(\frac{l_n \frac{\Omega_c}{\Omega_r}}{1 - \frac{\Omega_r}{\Omega_c}} - 1\right).$$

Pentru $\frac{\Omega_r}{\Omega_c} = 1$, înlăturîndu-se nedeterminarea, se obţine $d = 0$.

Valoarea lui d pentru diferite valori $\frac{\Omega_r}{\Omega_c}$ se găseşte calculată în tabloul nr. 1 şi se reproduce în abaca II.

Calculul valorii $\int_0^l \frac{e_x\, t_x\, dx}{I_x}$.

Această integrală, analog ca mai sus, o descompunem în două integrale care se efectuează separat. Pentru porţiunea cu înălţime variabilă (fig. 2) se obţine

$$e_x = e_{oi} + \frac{e_{fi}}{\xi l}\, x \quad \text{şi} \quad t_x = e_{ok} + \frac{e_{fk}}{\xi l}\, x.$$

Înlocuind, se obţine

$$\int_0^l \frac{e_x\, t_x\, dx}{I_x} = 2\int_0^{\xi l} \frac{\left[e_{oi}\, e_{ok} + (e_{oi}\, e_{fk} + e_{ok}\, e_{fi})\frac{x}{\xi l} + e_{fi}\, e_{fk}\, \frac{x^2}{\xi^2 l^2}\right] dx}{\frac{I_c - I_r}{3\,\xi^2 l^2}\, x^2 + \frac{2(I_c - I_r)}{3\,\xi l}\, x + I_r} +$$

$$+ 2\int_{\xi l}^{\frac{l}{2}} \frac{(e_{oi} + e_{fi})(e_{ok} + e_{fk})\, dx}{I_0}.$$

Efectuînd integralele, se obţine

$$\int_0^l \frac{e_x\, t_x\, dx}{I_x} = \frac{l}{I_c}\left[e_{oi}\, e_{ok}(1 - a\,\xi) + (e_{oi}\, e_{fk} + e_{ok}\, e_{fi})(1 - b\,\xi) + e_{fi} \cdot e_{fk}(1 - c\xi)\right]$$

în care, pentru $\frac{I_r}{I_c} \leqslant 0{,}250$

$$a = 2 - 3\,\frac{\ln \dfrac{1+2\frac{I_r}{I_c} + \sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}{1+2\frac{I_r}{I_c} - \sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}}{\sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}$$

$$b = 2 - 3\,\frac{\ln \frac{I_c}{I_r}}{1-\frac{I_r}{I_c}} + 3\,\frac{\ln \dfrac{1+2\frac{I_r}{I_c} + \sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}{1+2\frac{I_r}{I_c} - \sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}}{\sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}$$

$$c = 2 - \frac{6\left(1-\ln\frac{I_c}{I_r}\right)}{1-\frac{I_r}{I_c}} - 3\,\frac{\left(2-5\frac{I_r}{I_c}\right)}{1-\frac{I_r}{I_c}} \times \frac{\ln \dfrac{1+2\frac{I_r}{I_c} + \sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}{1+2\frac{I_r}{I_c} - \sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}}{\sqrt{\left(1-4\frac{I_r}{I_c}\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}},$$

iar pentru $0{,}250 \leqslant \frac{I_r}{I_c} < 1{,}000$

$$a = 2 - 6\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\,2\sqrt{\dfrac{1-\frac{I_r}{I_c}}{4\frac{I_r}{I_c}-1}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1-\frac{I_r}{I_c}}{4\frac{I_r}{I_c}-1}}}{\sqrt{\left(4\frac{I_r}{I_c}-1\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}$$

$$b = 2 - 3\,\frac{\ln \frac{I_c}{I_r}}{1-\frac{I_r}{I_c}} + 6\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\,2\sqrt{\dfrac{1-\frac{I_r}{I_c}}{4\frac{I_r}{I_c}-1}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1-\frac{I_r}{I_c}}{4\frac{I_r}{I_c}-1}}}{\sqrt{\left(4\frac{I_r}{I_c}-1\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}$$

$$c = 2 - \frac{6\left(1-\ln\frac{I_c}{I_r}\right)}{1-\frac{I_r}{I_c}} - 6\,\frac{\left(2-5\frac{I_r}{I_c}\right)}{1-\frac{I_r}{I_c}} \times \frac{\operatorname{arc\,tg}\,2\sqrt{\frac{1-\frac{I_r}{I_c}}{4\frac{I_r}{I_c}-1}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\frac{I_r}{I_c}}{4\frac{I_r}{I_c}-1}}}{\sqrt{\left(4\frac{I_r}{I_c}-1\right)\left(1-\frac{I_r}{I_c}\right)}}$$

pentru $\frac{I_r}{I_c} = 1$ înlăturînd nedeterminările, se obţine

$$a = 0,\quad b = 1 \quad \text{şi} \quad c = \frac{4}{3}.$$

La fel ca şi pentru d, valorile a, b şi c au fost calculate şi se găsesc în tabloul nr. 1; de asemenea, ele sînt reproduse în abaca II, din figura 8.

Tabloul nr. 1

Valorile a, b, c şi d

$\frac{I_r}{I_c}$ sau $\frac{\Omega_r}{\Omega_c}$	a	b	c	d
0,001	—16,334	— 0,410	0,870	11,829
0,020	— 7,765	— 0,211	0,897	5,984
0,040	— 5,971	— 0,089	0,923	4,706
0,060	— 4,989	0,004	0,946	3,986
0,080	— 4,316	0,080	0,967	3,491
0,100	— 3,819	0,144	0,985	3,117
0,125	— 3,343	0,213	1,007	2,753
0,150	— 2,969	0,273	1,026	2,464
0,175	— 2,664	0,326	1,044	2,225
0,200	— 2,408	0,373	1,060	2,024
0,225	— 2,190	0,416	1,076	1,849
0,250	— 2,000	0,455	1,090	1,697
0,300	— 1,684	0,524	1,117	1,440
0,350	— 1,429	0,584	1,141	1,230
0,400	— 1,218	0,636	1,163	1,054
0,450	— 1,038	0,683	1,183	0,904
0,500	— 0,884	0,725	1,201	0,773
0,600	— 0,629	0,798	1,235	0,554
0,700	— 0,426	0,859	1,263	0,378
0,800	— 0,260	0,912	1,289	0,231
0,900	— 0,120	0,959	1,312	0,107
1,000	— 0,000	1,000	1,333	0,000

Înlocuind expresiile integralelor astfel explicitate, în formula care dă pierderea de tensiune, simplificînd cu l se obţine

$$\Delta\sigma_{ai}^{k} = N_k \frac{E_a}{E_b}\left[\frac{1+d\xi}{\Omega_c} + \frac{e_{oi}\,e_{ok}(1-a\xi) + (e_{oi}\,e_{fk}+e_{ok}\,e_{fi})(1-b\xi) + e_{fi}\,e_{fk}(1-c\xi)}{I_c}\right].$$

Pierderea de tensiune $\Delta\sigma_{ai}^{k}$ a fasciculului i calculată mai sus se datoreşte numai preîntinderii fasciculului k cu efortul N_k. Generalizînd, se poate obţine imediat

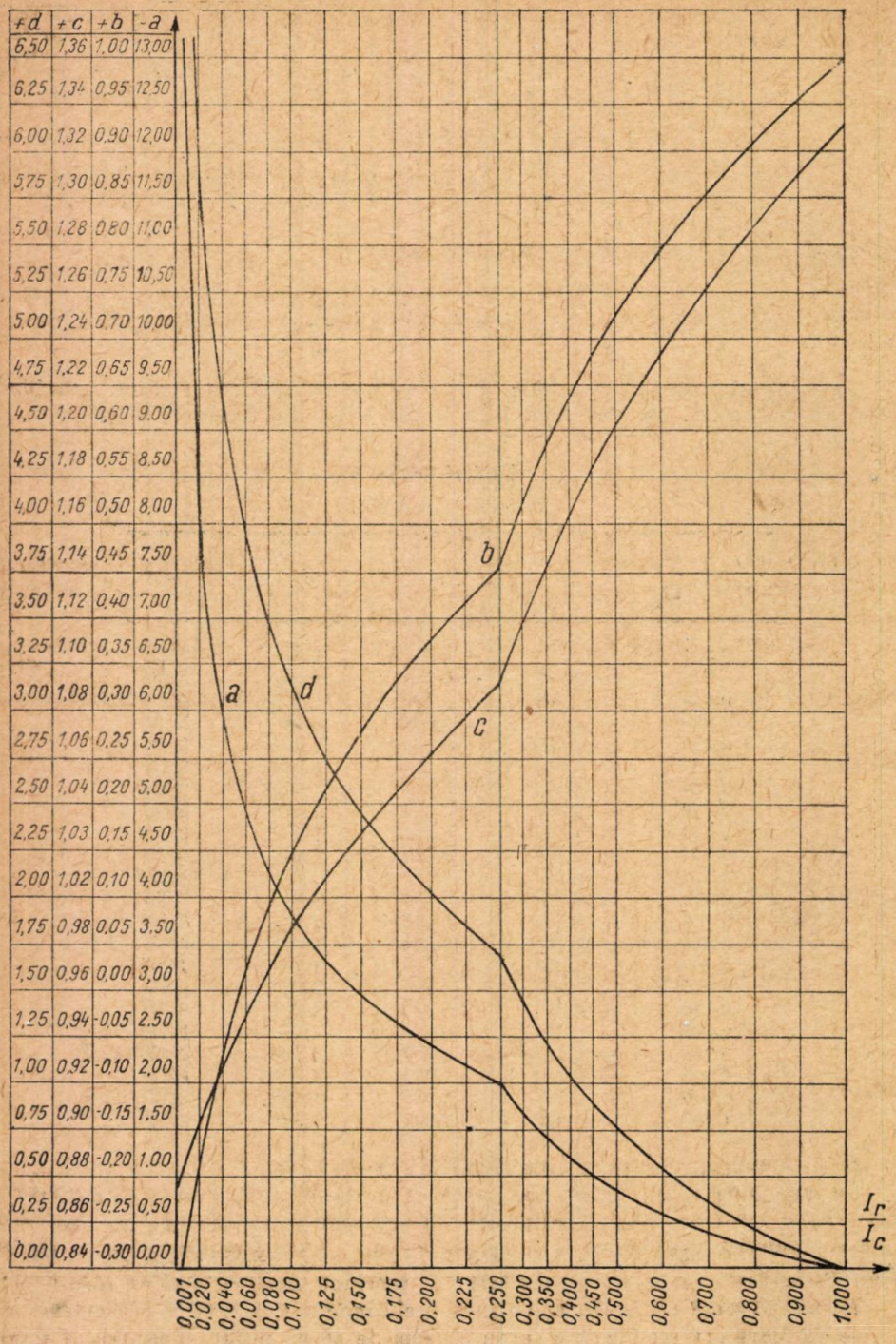

+d +c +b -a
6,50 1,36 1,00 13,00
6,25 1,34 0,95 12,50
6,00 1,32 0,90 12,00
5,75 1,30 0,85 11,50
5,50 1,28 0,80 11,00
5,25 1,26 0,75 10,50
5,00 1,24 0,70 10,00
4,75 1,22 0,65 9,50
4,50 1,20 0,60 9,00
4,25 1,18 0,55 8,50
4,00 1,16 0,50 8,00
3,75 1,14 0,45 7,50
3,50 1,12 0,40 7,00
3,25 1,10 0,35 6,50
3,00 1,08 0,30 6,00
2,75 1,06 0,25 5,50
2,50 1,04 0,20 5,00
2,25 1,03 0,15 4,50
2,00 1,02 0,10 4,00
1,75 0,98 0,05 3,50
1,50 0,96 0,00 3,00
1,25 0,94 -0,05 2,50
1,00 0,92 -0,10 2,00
0,75 0,90 -0,15 1,50
0,50 0,88 -0,20 1,00
0,25 0,86 -0,25 0,50
0,00 0,84 -0,30 0,00
a
d
b
c
0,001 0,020 0,040 0,060 0,080 0,100 0,125 0,150 0,175 0,200 0,225 0,250 0,300 0,350 0,400 0,450 0,500 0,600 0,700 0,800 0,900 1,000
$\frac{I_r}{I_c}$

Fig. 8

pierderea de tensiune a fasciculului i sub acţiunea preîntinderii succesive a tuturor celorlalte fascicule

$$\Sigma\Delta\sigma_{ai}^{k} = \Delta\sigma_{ai} = \frac{E_a}{E_b}\left[\frac{1+d\xi}{\Omega_c}\Sigma N_k + \right.$$

$$\left. + \frac{e_{oi}(1-a\xi)\,\Sigma N_k\, e_{ok} + (1-b\xi)\,(e_{oi}\,\Sigma N_k\, e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma N_k\, e_{ok}) + e_{fi}(1-c\xi)\,\Sigma N_k\, e_{fk}}{I_c}\right]$$

în care sumele ΣN_k; $\Sigma N_k\, e_{ok}$ şi $\Sigma N_k\, e_{fk}$ se întind la toate fasciculele care se găseau netensionate în momentul în care fasciculul i era întins. N_k fiind efortul care va rămînea în fasciculul respectiv după tensiunea tuturor armăturilor grinzii precomprimate.

Dacă eforturile finale din toate fasciculele sînt aceleaşi, ceea ce se întîmplă aproape întotdeauna, formula de mai sus capătă următoarea formă simplificată.

$$\Delta\sigma_{ai} = N\frac{E_a}{E_b}\left[\frac{n(1+d\xi)}{\Omega_c} + \frac{e_{oi}(1-a\xi)\Sigma e_{ok} + (e_{oi}\,\Sigma e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma e_{ok})\,(1-b\xi) + e_{fi}(1-c\xi)\Sigma e_{fk}}{I_c}\right],$$

în care N este efortul egal din toate fasciculele, n este numărul de fascicule ce rebuie preîntinse după tensionarea fasciculului i, iar sumele Σe_{ok} şi Σe_{fk} se întind a toate fasciculele ce se preîntind după fasciculul i.

În cazul unei grinzi de secţiune şi moment de inerţie constant, formulele se simplifică. În acest caz $a = 0$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ şi $d = 0$ şi înlocuind aceste valori în formulele finale se obţine:

În cazul tensionării diferite a fasciculelor

$$\Delta\sigma_{ai} = \frac{E_a}{E_b}\left[\frac{\Sigma N_k}{\Omega_c} + \frac{e_{oi}\,\Sigma N_k\, e_{ok} + (1-\xi)\,(e_{oi}\,\Sigma N_k\, e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma N_k\, e_{ok}) + e_{fi}\left(1-\frac{4\xi}{3}\right)\Sigma N_k e_{fk}}{I_c}\right].$$

În cazul tensionării fasciculelor cu un acelaşi efort N

$$\Delta\sigma_{ai} = N\frac{E_a}{E_b}\left[\frac{n}{\Omega_c} + \frac{e_{oi}\,\Sigma e_{ok} + (e_{oi}\,\Sigma e_{fk} + e_{fi}\,\Sigma e_{ok})\,(1-\xi) + e_{fi}\left(1-\frac{4\xi}{3}\right)\Sigma\, e_{fk}}{I_c}\right],$$

notaţiile rămînînd aceleaşi ca şi în formulele precedente.

Se mai pune o problemă: s-a arătat în prealabil cum fasciculul i suferă o pierdere de tensiune datorită preîntinderii fasciculului k cu efortul N_k. Dacă însă după tensionarea fasciculului k se mai preîntind şi alte fascicule, efortul N_k va fi şi el modificat, şi ca atare pierderea de tensiune $\Delta\sigma_{ai}^{k}$ va fi şi ea modificată.

Aceste pierderi de tensiune datorită preîntinderii succesive a fasciculelor se calculează tocmai cu scopul de a le da ca spor de efort iniţial, în aşa fel, ca odată ce preîntinderea tuturor fasciculelor a fost terminată, după consumarea tuturor

acestor pierderi, în fiecare fascicul să rămînă efortul dorit. Ca urmare a acestui lucru, este suficient să calculăm pierderile de tensiune ale fasciculelor tensionate în prealabil, nu la efortul real la care preîntindem celelalte fascicule, ci la efortul care va rămîne în ele după terminarea preîntinderii tuturor fasciculelor.

Mai concret, să presupunem o grindă cu cinci fascicule preîntinse: 1, 2, 3, 4 şi 5. Fasciculul 1 va suferi pierderi Δc^2_{a1}, Δc^3_{a1}, Δc^4_{a1}, şi Δc^5_{a1}. El va trebui deci preîntins nu la efortul N_1 pe care dorim să-l aibă la sfîrşitul preîntinderii, ci la un efort mai mare $N_1 + \Delta N_1$, în care $\Delta N_1 = \Omega_{a1} \cdot \Sigma \Delta c^k_{a1}$.

În mod analog, fasciculul 2 îl vom preîntinde la efortul mărit $N_2 + \Omega_{a2} \Sigma \Delta \sigma^k_{a2}$ şi aşa mai departe.

Conform celor spuse mai înainte, calculul pierderilor $\Delta\sigma_1$, şi ale celorlalte fascicule nu le vom face la eforturile reale de pretensionare $N_2 + \Omega_{a2} \Sigma \Delta^k \sigma_{a2}$, $N_3 + \Omega_{a3} \Sigma \Delta \sigma^k_{a3}$, $N_4 + \Omega_{a4} \Sigma \Delta c^k_{a4}$ şi $N_5 + \Omega_{a5} \Sigma \Delta \sigma^k_{a5}$, ci numai la eforturile N_2, N_3, N_4, şi N_5, adică tocmai la acelea care vor rămîne în fascicule în faza finală. Suplimentele de eforturi se pierd în timpul preîntinderii succesive a fasciculelor şi este natural deci ca să nu ţinem seama de influenţa unor eforturi care pînă la urmă dispar.

Exemplul care urmează arată cum se conduc calculele în mod practic; de asemenea el arată importanţa pierderii de efort iniţial şi ca atare necesitatea ca în calcule, acest lucru să se ia în consideraţie.

Exemplul de calcul. Fie de calculat pierderea de tensiune datorită preîntinderii succesive a fasciculelor de armături la grinda principală de rezistenţă a acoperişului unei hale de 30,00 m deschidere; (distanţa între axele a două grinzi fiind de 10,00 m).

În figurile 9, 10 şi 11 se văd secţiunile din cîmp, de pe reazem precum şi lungimea pe care se produce variaţia secţiunii. În figuri sînt trecute şi toate caracteristicile secţiunilor. Pentru economie de spaţiu, aceste calcule nu se mai redau.

Din calcule, ţinînd seama şi de poziţia aleasă pentru fascicule, au rezultat, ca fiind necesare, şase fascicule, care să aibă fiecare în momentul terminării precomprimării grinzii cîte un efort de 100 t. Se cere să se calculeze efortul de control necesar în fiecare fascicul pentru a îndeplini condiţia de mai sus, ţinînd seama că nu se întinde decît o dată un fascicul, ordinea preîntinderii lor fiind arătată de numărul de ordine trecut în figura 9*).

Fasciculele de armături erau realizate avînd fiecare cîte 48 ⌀ 7, avînd o secţiune efectivă $\Omega_a = 18{,}50$ cm².

Trebuie calculate mai întîi valorile e_0 şi e_f pentru fiecare fascicul în parte. În figurile 12 şi 13 se arată cum s-au obţinut aceste valori pentru fasciculele 1 şi 3. Pentru celelalte fascicule nu s-au mai desenat figurile, ci s-au trecut direct rezultatele în tabloul nr. 2.

Trebuie remarcat, numai, că valorile e_0 şi eventual e_f sînt pozitive în cazul cînd punctele respective ale fasciculului sînt dedesubtul liniei centrelor de greutate; dacă sînt deasupra, ele se iau cu semn negativ.

---

*) De obicei, este bine să nu se preîntindă fasciculele nesimetric. Este vorba deci în cazul de faţă de fasciculele 5 şi 6. Neexistînd însă decît o singură presă şi fiind în prealabil întinse celelalte patru fascicule, eforturile unitare momentane nu erau dăunătoare; de fapt, s-a prevăzut întinderea fasciculului 5 la 50 t, apoi a fasciculului 6 pînă la 100 t şi apoi completarea întinderii fasciculului 5 pînă la efortul final. În calculul de faţă însă, pentru simplificare, se va considera că preîntinderea fiecărui fascicul se face dintr-odată.

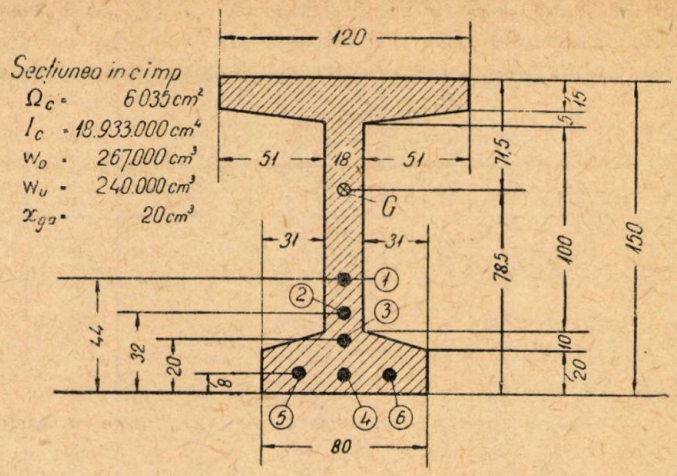


Fig 9

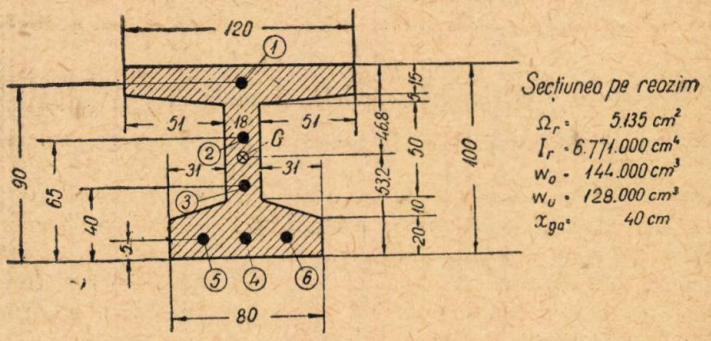


Fig. 10

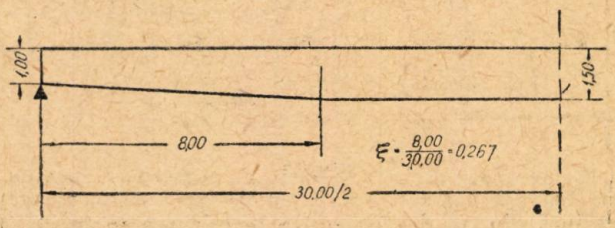


Fig. 11

În tablou s-au trecut şi sumele parţiale ale valorilor e_o, respectiv e_f, pentru a avea direct valorile necesare ce trebuie introduse în formule. Tocmai din această cauză ele au fost intabulate în ordinea inversă a operaţiilor de preîntindere.

Tabloul nr. 2

Tabloul recapitulativ al valorilor e_o şi e_f

e_{06}	e_{05}	e_{04}	e_{03}	e_{02}	e_{01}	e_{f6}	e_{f5}	e_{f4}	e_{f3}	e_{f2}	e_{f1}
38,2	38,2	38,2	13,2	−11,8	−36,8	32,3	32,3	32,3	45,3	58,3	71,3
38,2	76,4	114,6	127,8	116,0	79,2	32,3	64,6	96,9	142,2	200,5	271,8

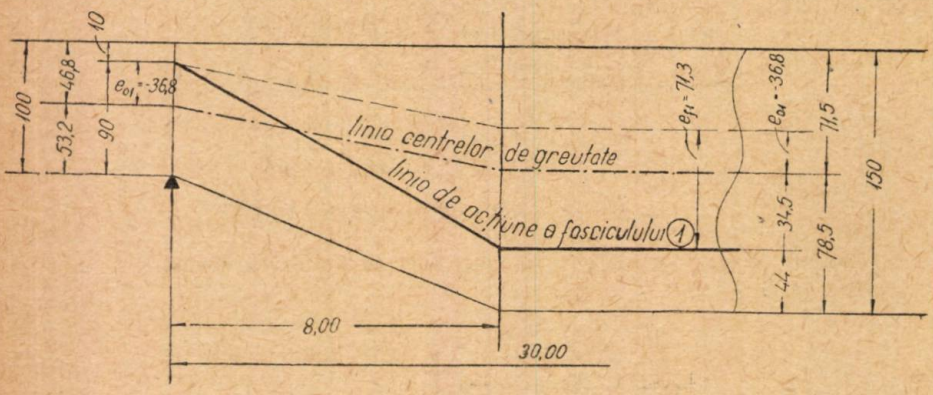


Fig. 12

Efortul fiind acelaşi în toate fasciculele, formula de aplicat este

$$\Delta\sigma_{ai} = N\frac{E_a}{E_b}\left[\frac{n(1+d\xi)}{\Omega_c} + \frac{e_{oi}(1-a\xi)\Sigma e_{ok} + (e_{oi}\Sigma e_{fk} + e_{fi}\Sigma e_{ok})(1-b\xi) + e_{fi}(1-c\xi)\Sigma e_{fk}}{I_c}\right]$$

şi

$$N_i' = N_i + \Omega_{ai}\,\Delta\sigma_{ai},$$

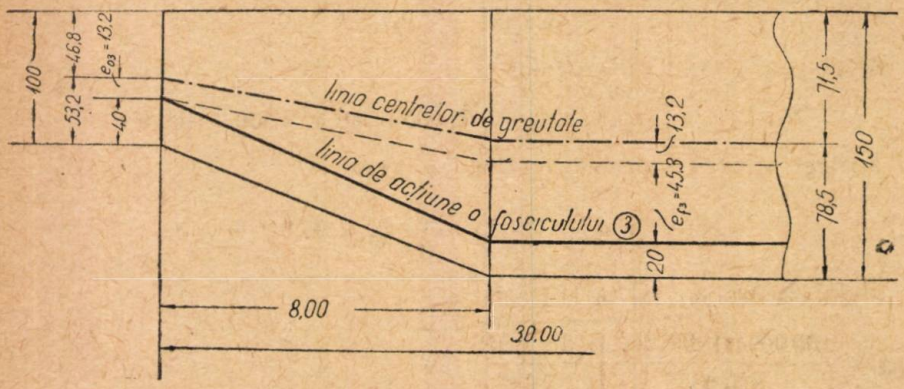


Fig. 13

în care N_i' reprezintă efortul de control la terminarea preîntinderii fasciculului i, iar N_i efortul ce dorim să rămînă în fasciculul i la terminarea preîntinderii tuturor fasciculelor, în cazul de faţă 100 t. Celelalte notaţii au fost lămurite mai înainte.

S-a prevăzut un beton marca 400 cu $E_b = 380\,000$. Modulul de elasticitate considerat pentru armătură este $E_a = 1\,800\,000$.

Pentru $\frac{I_r}{I_c} = \frac{6\,771\,000}{18\,933\,000} = 0{,}360$ rezultă din tabloul nr. 1.

$a = 1{,}3867$; $b = +\,0{,}5942$ și $c = +\,1{,}1673$.

Pentru $\frac{\Omega_r}{\Omega_c} = \frac{5135}{6035} = 0{,}850$ rezultă $d = 0{,}1693$

Cu $\xi = \frac{8{,}00}{30{,}00} = 0{,}267$ rezultă imediat

$1 - a\xi = 1 + 1{,}3867 \times 0{,}267 = 1{,}370$

$1 - b\xi = 1 - 0{,}5942 \times 0{,}267 = 0{,}841$

$1 - c\xi = 1 - 1{,}673 \times 0{,}267 = 0{,}689$

$1 + d\xi = 1 + 0{,}1693 \times 0{,}267 = 1{,}045$.

Cu aceste valori calculate se poate trece la aplicarea formulelor. Pentru fasciculul 1 se obține

$$i = 1;\ \sum_{2}^{6} e_{ok} = 116{,}0;\quad \sum_{2}^{6} e_{fk} = 200{,}5;\quad n = 5.$$

Pierderea de tensiune în fasciculul 1.

$$\Delta\sigma_{ai} = 100\,000 \times \frac{1.800.000}{380\,000}\left[\frac{5 \times 1{,}045}{6\,035} + \right.$$

$$\left. + \frac{-36{,}8 \times 1{,}370 \times 116{,}0 + (-36{,}8 \times 200{,}5 + 71{,}3 \times 116{,}0) \times 0{,}841 + 71{,}3 \times 0{,}689 \times 2005}{18\,933\,000}\right]$$

$$\Delta\sigma_{ai} = 530 \text{ kg/cm}^2$$

Efortul de control în fasciculul 1

$$N_1' = N_1 + \Omega_{ai} \times \Delta\sigma_{ai} = 100\,000 + 18{,}50 \times 530 = 109{,}8 \text{ t}.$$

Analog ca mai sus pentru fasciculul 3, avem

$$i = 3;\ \sum_{4}^{6} e_{ok} = 114{,}6;\quad \sum_{4}^{6} e_{fk} = 96{,}9;\quad n = 3.$$

Pierderea de tensiune în fasciculul 3

$$\Delta\sigma_{a3} = \frac{100\,000 \times 1\,800\,000}{380\,000}\left[\frac{3 \times 1{,}045}{6\,035} + \right.$$

$$\left. + \frac{13{,}2 \times 1{,}370 \times 114{,}6 + (13{,}2 \times 96{,}9 + 32{,}3 \times 114{,}6) \times 0{,}841 + 32{,}3 \times 0{,}689 \times 96{,}9}{18\,933\,000,}\right],$$

$$\Delta\sigma_{a3} = 458 \text{ kg/cm}^2.$$

Efortul de control în fasciculul 3

$$N_3' = N_3 + \Omega_{a3} \cdot \Delta\sigma_{a3} = 100\,000 + 18{,}50 \times 4{,}58 = 108{,}5 \text{ t.}$$

În mod cu totul analog s-au calculat pierderile de tensiune precum şi eforturile de control şi pentru toate celelalte fascicule. Rezultatele sînt date în tabloul nr. 3, unde pentru comparaţie s-au trecut şi valorile obţinute cu aceeaşi metodă, neglijînd însă variaţia momentului de inerţie, precum şi valorile obţinute cu metoda propusă de constructorii sovietici.

Tabloul nr. 3

Tabloul comparativ al pierderilor de tensiune

Fascicul	Efort de control t	Spor faţă de efortul necesar %	Pierderi de tensiune în fascicule					
			Metoda propusă cu variaţia lui I şi Ω		Metoda propusă cu I şi Ω constant		Metoda sovietică	
			kg/cm²	%	kg/ m²	%	kg/cm²	%
1	109,8	9,8	530	100	535	101	655	124
2	110,1	10,1	545	100	518	95	620	114
3	108,5	8,5	458	100	415	90	540	118
4	107,5	7,5	405	100	354	87	400	99
5	105,6	5,6	203	100	177	87	192	94
6	100,0	—	—	—	—	—	—	—

Analizînd valorile din tabloul nr. 3, rezultă clar importanţa considerării în calcule a pierderii de tensiune datorită preîntinderii succesive a fasciculelor de armături, care cere uneori sporuri de efort iniţial mai mari ca 10 %; rezultă de asemenea necesitatea de a calcula exact aceste valori, metoda sovietică dînd aproximări prea mari. De asemenea rezultă şi necesitatea de a ţine seama, dacă este cazul, de variaţia secţiunii şi a momentului de inerţie în lungul grinzilor.

РАСЧЕТ ПОТЕРИ НАПРЯЖЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ НАТЯЖЕНИЕМ ПУЧКА АРМАТУРЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для расчета потерь напряжения, вызванного предварительным последовательным натяжением пучка арматуры, в настоящее время существует неудовлетворительный приближенный метод. В настоящем сообщении указывается способ разрешения этого вопроса с учетом действительного положения пучков арматур и изменения момента инерции вдоль балки. Приведенный пример расчета показывает необходимость произведения расчета согласно предлагаемому методу, так как при применении существующего метода получаются слишком большие расхождения с действительностью.

CALCUL DE LA PERTE DE TENSION DUE AUX PRÉCONTRAINTES SUCCESSIVES DES FAISCEAUX D'ARMATURE

(RÉSUMÉ)

Pour le calcul des pertes de tension, dues à la précontrainte successive des faisceaux d'armature, il existe actuellement une méthode approximative, non satisfaisante. On propose la résolution de ce problème, en tenant compte de la position réelle des faisceaux d'armature ainsi que de la variation du moment d'inertie le long de la poutre. Un exemple de calcul met en évidence la nécessité d'effectuer le calcul d'après la méthode proposée, la méthode actuelle donnant lieu à de trop grands écarts de la réalité.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Nicolau, A. Froimescu şi M. Weissenberg, *Grinzi pentru planşee din beton precomprimat.* Ed. Ministerului Construcţiilor, Bucureşti, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3–4, 1954

HIDROTEHNICĂ

STUDII ASUPRA DISIPATORILOR DE ENERGIE AŞEZAŢI ÎN SERIE

DE

D. DUMITRESCU, ŞT. ZAREA şi R. TOTH

GENERALITĂŢI

Problema disipatorilor de energie constă în determinarea tipului, dimensiunilor şi poziţiei acestora, astfel ca pentru cazul particular al unui baraj, ţinînd seama de condiţiile locale, să se asigure în aval, pentru toate debitele evacuate, o eroziune a cărei adîncime maximă să nu depăşească o limită impusă.

În cazul în care disipatorul de energie al unui baraj deversor nu este eficace pentru toate debitele deversate, este necesar să se construiască, în serie cu acesta, un al doilea disipator de energie, astfel încît, adîncimea maximă a eroziunii din aval de baraj să fie limitată la o valoare impusă de siguranţa construcţiei.

Pentru a studia problema disipatorilor de energie aşezaţi în serie, atunci cînd unul dintre aceştia este deja construit, s-au făcut încercări pe modele la scară redusă. Experienţele au fost făcute pe macheta unui baraj deversor existent şi la care era necesar să se construiască un disipator de energie adiţional.

Barajul deversor, pe macheta căruia s-au efectuat experienţele, are o înălţime de 7,20 m şi o deschidere de 22 m. O pilă, de 4 m lăţime, împarte barajul în două panouri, de cîte 9 m deschidere. Fiecare panou deversor este prevăzut şi cu o golire de fund de secţiune dreptunghiulară $9 \times 2{,}5$ m^2. Deci, descărcarea apei se poate face prin deversorul frontal şi prin golirile de fund.

Pentru debite mai mari de 200 m^3/s, disipatorul de energie al acestui baraj devine ineficace. Prin experienţele efectuate pe modelul barajului s-a căutat să se determine tipul optim de disipator de energie adiţional care, pentru orice debit evacuat pînă la 415 m^3/s, să limiteze adîncimea maximă a eroziunii la 2,50 m, iar poziţia acestui maxim să fie la o distanţă mai mare de 15 m de capătul aval al disipatorului de energie existent.

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

Determinarea scării geometrice a modelului. Condiţia de similitudine completă este

$$\left(\frac{l_N}{l_M}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\nu_N}{\nu_M} \; ^*)$$

Deoarece lichidul (apa), cu care se face încercarea pe model este acelaşi cu cel din scurgerea de pe prototip, rezultă că pentru a avea similitudine completă, modelul trebuie să fie identic cu prototipul.

Alegînd pentru scara geometrică o valoare cuprinsă între 20...30, avînd în vedere că macheta trebuie să fie montată într-un canal vitrat de 1,00 m lăţime, din relaţia precedentă rezultă că pentru experimentare ar fi necesar să se aleagă un lichid cu un coeficient de viscozitate de cîteva zeci de ori mai mic decît al apei. Dificultăţile de experimentare ce rezultă în acest caz, fac inutilizabilă această soluţie; apa rămîne ca lichid de experimentare.

În cazul scurgerii turbulente a lichidelor grele, cu suprafaţa liberă, cînd numărul Reynolds este mai mare decît 10 000, forţele de viscozitate sînt neglijabile faţă de forţele de greutate.

În consecinţă, impunînd condiţia ca numărul Re $\geqslant$ 10 000 şi alegînd drept criteriu de similitudine criteriul Reech-Froude, se realizează şi o similitudine Reynolds aproximativă.

Punem condiţia ca numărul Froude să fie acelaşi pe model şi pe prototip; observînd că $g_N = g_M = g$, rezultă

$$\frac{V_M^2}{l_M} = \frac{V_N^2}{l_N}.$$

De asemenea scriind că numărul Reynolds $\geqslant$ 10 000

$$\frac{V_M \, l_M}{\nu_M} \geqslant 10\,000$$

şi alegînd pentru viscozitatea cinematică a apei o valoare corespunzătoare unei temperaturi de aproximativ 20° C, $\nu = 10^{-6}$ m²/s, rezultă inegalitatea

$$\left(\frac{l_N}{l_M}\right)^3 \leqslant (100 \, V_N \cdot l_N)^2.$$

Alegînd ca lungime caracteristică raza hidraulică, în secţiunea golirilor de fund, $l_N = R_N = 1$ m şi notînd scara geometrică cu λ, relaţia precedentă devine

$$\lambda \leqslant 21{,}5 \sqrt[3]{V_N^2}.$$

Viteza în natură pentru un debit mediu de 250 m³/s, considerat ca fiind evacuat numai prin golirile de fund, este

$$V = \frac{Q}{2A} = \frac{250}{2 \times 9 \times 2{,}5} = 5{,}55 \text{ m/s}.$$

*) Cu indicele N s-au notat mărimile corespunzătoare prototipului, iar cu M cele corespunzătoare modelului.

Astfel rezultă condiţia la care trebuie să satisfacă scara geometrică a modelului

$$\lambda \leqslant 21{,}5 \sqrt[3]{5{,}55^2} = 78{,}20.$$

Respectînd această condiţie, pentru a obţine rezultate mai precise şi deoarece lăţimea canalului vitrat a permis-o, s-a ales scara geometrică $\lambda = 25$.

Modelarea albiei din aval de baraj s-a făcut cu pietriş de 8...15 mm diametru, după metoda prof. F. I. Pikalov [1].

Descrierea machetei. Panourile deversoare şi pila centrală au fost executate din lemn de brad bine uscat (fig. 1 şi 2).

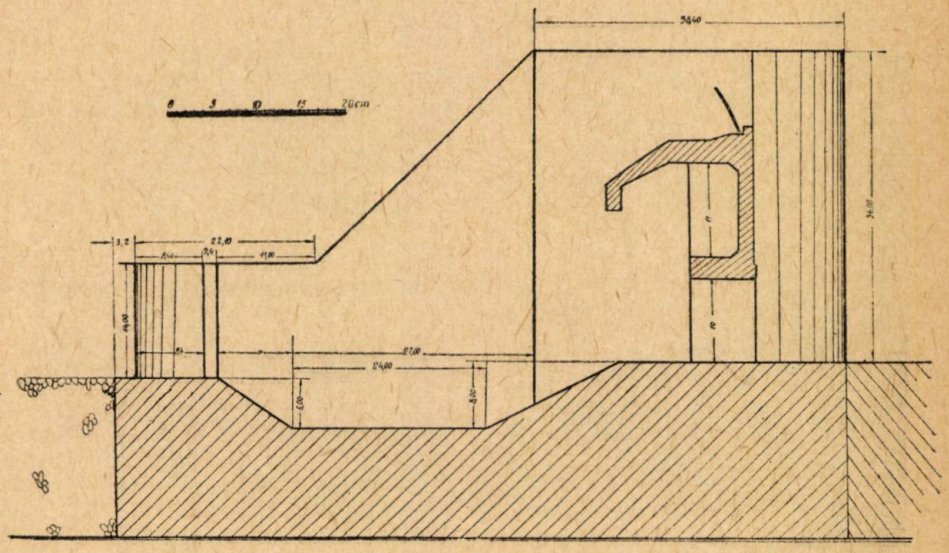


Fig. 1. — Machetă. Secţiune longitudinală.

Culeele s-au executat din plexiglas, pentru a permite observarea şi fotografierea din profil a scurgerii peste radier (fig. 2). Stăvilarele şi clapetele au fost confecţionate din tablă, iar radierul s-a construit din beton (fig. 2). Toată macheta a fost acoperită cu un strat de vopsea marină (fig. 2).

Precizia de execuţie a machetei a fost $\pm 0{,}2$ mm.

Macheta, executată la scara 1:25, a fost montată în canalul vitrat. Deoarece lăţimea canalului nu a permis modelarea formei malurilor albiei din amonte şi din aval de baraj pe o lungime mai mare de 1/6 din lungimea radierului, în locul albiei evazate din natură, în laborator s-a realizat o albie prismatică.

Instalaţia de încercare şi aparatele de măsură. Pentru efectuarea experienţelor s-a utilizat instalaţia laboratorului hidrotehnic al Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. Instalaţia constă dintr-un canal vitrat de dimensiuni $1000 \times 1085 \times 6820$ mm^3, avînd în amonte un bazin de liniştire şi fiind continuat cu un canal de lemn, din care apa trece în canalul de întoarcere, din beton.

Funcţionarea în circuit închis este asigurată de o pompă centrifugă cu următoarele caracteristici: $Q = 0{,}240$ m^3/s; $H = 30$ m, $n = 1\,450$ rot/min.

Pentru măsurarea debitelor s-a folosit debitmetrul cu diafragmă montat pe conducta de refulare a pompei, a cărui precizie de înregistrare este de $\pm 1\%$.

În timpul experienţelor a fost necesar să se măsoare separat debitul evacuat prin golirile de fund şi cel deversat. S-a montat, în acest scop, în interiorul canalului vitrat, un jghiab prin care debitul deversat era condus într-un alt rezervor.

Măsurîndu-se durata experienţei şi volumele de apă colectate în acest timp, în fiecare din cele două rezervoare, s-au determinat cele două debite.

Pentru măsurarea vitezelor s-au folosit tuburi Pitot cu diametrul exterior 4 mm.

Măsurarea nivelelor apei în amonte şi în aval s-a făcut cu ace de măsură, care permit aprecierea zecimii de mm.

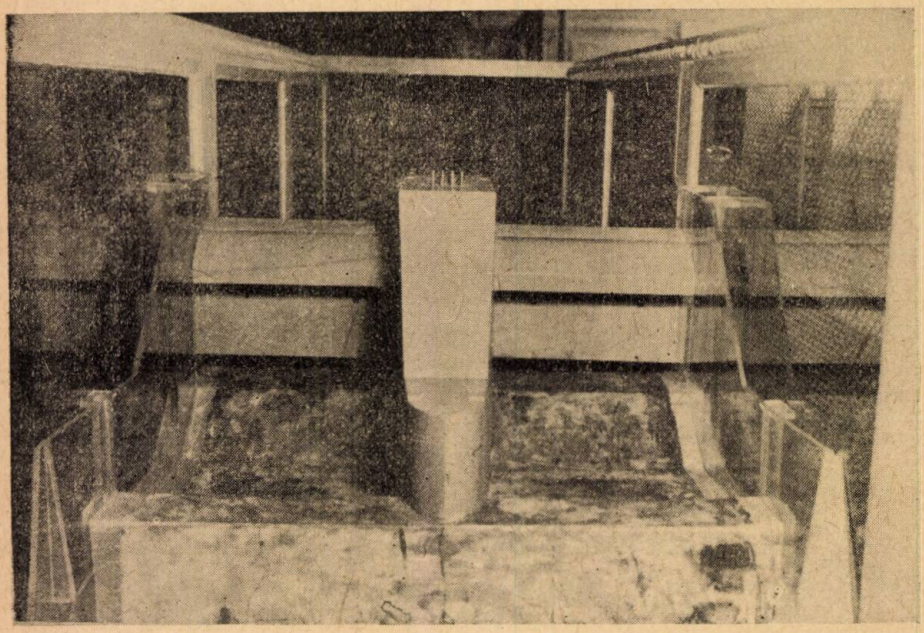


Fig. 2. — Machetă. Vedere din aval.

Pentru a înlesni întocmirea schiţelor şi diagramelor după fotografiile executate, pe geamul canalului vitrat şi deasupra suprafeţei erodate s-a aplicat un caroiaj, a cărui latură corespunde, la scara modelului, cu 1 m în natură (fig. 3).

ÎNCERCĂRILE EFECTUATE

Experienţele efectuate pentru studierea problemei distipatorilor de energie aşezaţi în serie, pot fi împărţite în trei categorii:

1. Încercări de orientare.
2. Încercări pentru determinarea soluţiei optime din punct de vedere hidraulic.
3. Încercări pentru determinarea soluţiei optime din punct de vedere economic.

Cu rezultatele experienţelor efectuate s-a alcătuit un tablou sinoptic, care este dat la sfîrşitul prezentei lucrări şi la care se referă trimiterile din descrierea diverselor tipuri de disipatori de energie experimentaţi.

Pentru a putea compara rezultatele obținute din încercările diverselor tipuri de disipatori de energie, s-a introdus noțiunea de coeficient de eficacitate sau randament al disipatorului de energie, definit astfel:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\text{adîncimea maximă a eroziunii cu disipator de energie}}{\text{adîncimea maximă a eroziunii fără disipator de energie}}.$$

În literatura sovietică [2] se folosește, pentru caracterizarea și compararea disipatorilor de energie, coeficientul:

$$\beta = \frac{\text{adîncimea maximă a eroziunii cu disipator de energie}}{\text{adîncimea maximă a eroziunii fără disipator de energie}}$$

denumit de asemenea coeficient de eficacitate al disipatorului de energie.

Propunem ca β să fie denumit coeficient de erodare al albiei, iar ε să fie denumit randament al disipatorului de energie.

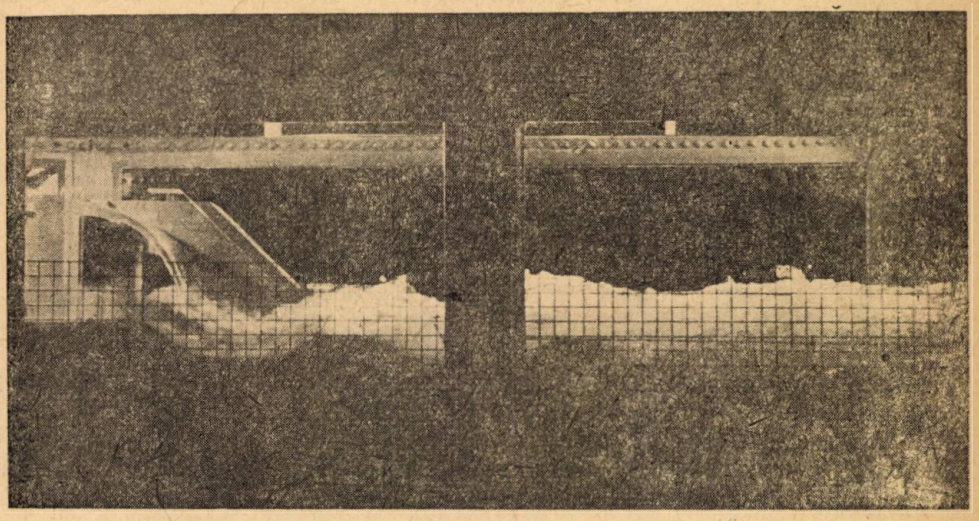


Fig. 3. — Machetă. Vedere din profil în timpul unei experiențe.

Se observă că

$$\varepsilon = 1 - \beta$$

Pentru fiecare din tipurile de disipatori de energie studiați, valorile randamentului ε sînt trecute în tabloul sinoptic care este dat la sfîrșitul lucrării.

Incercări de orientare

Încercările de orientare (experiențele nr. 1 și 2) au fost efectuate fără nici o construcție adițională în aval de radierul barajului și au condus la următoarele rezultate:

1. Disipatorul de energie existent devine ineficace pentru debite mai mari de 200 m^3/s.

2. Regimul de scurgere în aval de disipatorul de energie existent este rapid, ceea ce determină o erodare accentuată a albiei.

3. Eroziunea maximă, pentru debitul $Q = 365$ m^3/s, se produce chiar la piciorul aval al radierului barajului și depășește 7,50 m adîncime.

4. Lama de apă evacuată, aerîndu-se, se desprinde de pe creasta disipatorului de energie, apoi deprimîndu-se aderă din nou de aceasta. Fenomenul este periodic şi determină astfel o eroziune puternică, chiar la piciorul aval al radierului [3].

5. S-a putut observa mecanismul producerii eroziunii. Astfel, s-a observat existenţa a două vîrtejuri cu ax orizontal, cu sensuri de rotaţie contrare, unul de suprafaţă şi altul de fund [3].

Vîrtejul de suprafaţă care, pentru debite mai mari de 390 m³/s dispare şi reapare periodic, produce o distrugere a energiei curentului de apă.

Vîrtejul de fund se formează în zona adîncimii maxime a eroziunii şi are o poziţie variabilă, în funcţie de debit şi de starea aerată sau deprimată a lamei deversante la ieşirea de pe creasta disipatorului de energie. Acest vîrtej antrenează pietrişul de pe fund în sens contrar sensului scurgerii curentului de apă şi-l transportă pînă la muchia radierului, de unde acesta este cărat de şuvoi (fig. 4).

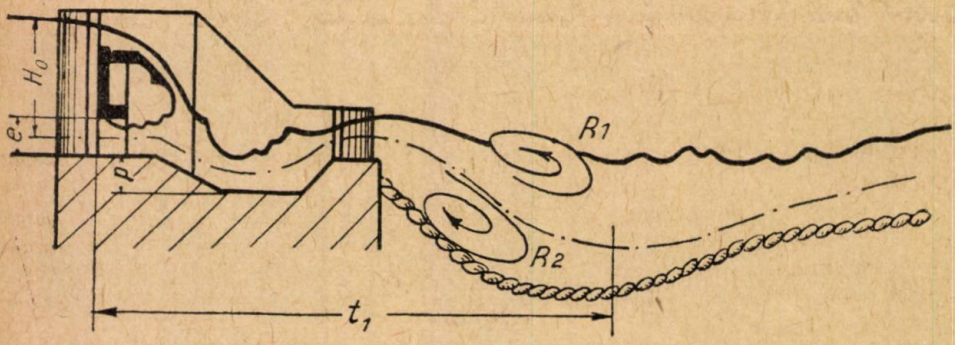


Fig. 4. — Schiţa machetei cu cele două vîrtejuri ce se formează în aval de baraj.

Cu cît debitul este mai mare şi lama de apă mai deprimată, vîrtejul de fund este mai apropiat de radier şi produce o eroziune mai adîncă, ceea ce periclitează siguranţa construcţiei.

6. Deoarece în aval de disipatorul de energie existent, regimul de scurgere rămîne rapid, iar adîncimea maximă a eroziunii depăşeşte 7,50 m pentru debite mai mari de 200 m³/s, se impune construirea unui disipator de energie adiţional.

Încercări pentru determinarea soluţiei optime din punct de vedere hidraulic

Pentru reducerea vitezei de fund, la 100 m în aval de baraj, la propunerea prof. C. Mateescu, s-a executat un contrabaraj cu creasta la 1 m deasupra fundului albiei, creîndu-se astfel o cameră de amortizare, care contribuie la transformarea regimului de scurgere rapid, într-un regim de scurgere lent, cu viteze mari la suprafaţă [2].

Lăţimea tuturor disipatorilor de energie experimentaţi a fost egală cu lăţimea albiei.

După tipul construcţiei adiţionale experimentate, deosebim:

α) Disipator de energie adiţional fără contrabaraj în aval.

β) Disipator de energie adiţional cu contrabaraj în aval.

Pentru ambele cazuri s-au experimentat următoarele tipuri de disipatori de energie:

Disipator de energie constînd din mai multe praguri în serie (experienţele nr. 3, 4, 5 pentru categoria α şi experienţele nr. 10, 11 şi 17 pentru categria β).

Cu disipatorul de energie de la experienţele nr. 3, 4 şi 5, executate fără contrabaraj în aval, s-au efectuat încercări care au constat în variaţia numărului de praguri utilizate şi a poziţiei crestelor acestora faţă de fundul albiei.

Eroziunea rezultată, în aval de ultimul prag, depăşeşte limita admisibilă. În cazul experienţei nr. 3 de asemenea şi eroziunea din amonte de primul prag depăşeşte limita admisibilă.

Eroziunea din amonte de pragurile utilizate este mare, deoarece între două praguri consecutive, acţiunea vîrtejului de fund este favorizată, cînd distanţa între aceste praguri este realativ mică în raport cu lungimea necesară a saltelei de apă, care rezultă din calcul, după metodele cunoscute, pentru aceiaşi parametri ai scurgerii [4].

În experienţele nr. 10, 11 şi 17, cu contrabaraj în aval, apare mai evidentă dependenţa dintre acţiunea vîrtejului de fund între două praguri consecutive şi distanţa dintre acestea. De exemplu, în experienţa nr. 11 se vede că cu cît distanţa dintre praguri creşte, în raport cu lungimea necesară a saltelei de apă, cu atît acţiunea vîrtejului de fund se micşorează, iar adîncimea maximă a eroziunii scade.

În tabloul cu rezultate, anexat prezentei lucrări, pe diagramele care arată variaţia adîncimii maxime a eroziunii, pentru această grupă de disipatori de energie, s-au trasat punctat şi curbele care arată variaţia adîncimii maxime a eroziunii din amonte de praguri.

Disipator de energie cu pantă şi contrapantă (experienţele nr. 14 şi 24 pentru categoria α şi experienţele nr. 13, 25, 26, 27 şi 28 pentru categoria β). Din compararea rezultatelor experienţelor efectuate cu acest tip de disipator de energie rezultă că, odată cu creşterea pantei albiei din aval de baraj creşte şi adîncimea maximă a eroziuni.

Disipatorul de energie de la experienţa nr. 28 reprezintă o soluţie favorabilă din punct de vedere hidraulic, deoarece are un randament $\varepsilon = 0{,}90$.

În cazul suprimării contrabarajului, distrugătorul de energie cu pantă şi contrapante multiple asigură o distrugere mai bună a energiei decît tipul de disipator de energie descris anterior.

Disipator de energie de tip trapezoidal (experienţele nr. 31 pentru categoria α şi experienţele nr. 29 şi 30 pentru categoria β).

Disipatorul de energie încercat în experienţa nr. 31 permite eliminarea contrabarajului, deoarece este aşezat faţă de baraj la distanţa la care ar fi trebuit aşezat iniţial primul disipator de energie [5], după cum rezultă din următoarea formulă (fig. 4);

$$l_1 = e + 2\sqrt{H_0 (p + 0{,}32\, e)}.$$

Punînd în serie două disipatoare de energie de acelaşi tip, nu se asigură o transformare a regimului de scurgere, dacă suma lungimilor acestora este mai mică decît lungimea necesară rezultată din calcul, pentru un singur disipator de energie, corespunzător aceloraşi parametri ai scurgerii.

Acest tip de disipator de energie care asigură o eroziune maximă (0,75 m) cu mult sub limita admisibilă (2,50 m) şi care are randamentul $\varepsilon = 0{,}90$, ar fi o soluţie optimă din punct de vedere hidraulic, dacă tot patul din amonte de pragul trapezoidal ar fi betonat. În cazul cînd fundul albiei, din această porţiune, nu este betonat, eroziunea din amonte de acesta depăşeşte limita admisibilă, după cum se vede din experienţa nr. 31.

Menţinînd contrabarajul şi amplasînd disipatorul de energie adiţional, de tip trapezoidal, mai aproape de cel existent, se poate reduce eroziunea din amonte la

o valoare mai mică de 2,50 m şi se poate limita de asemenea eroziunea din aval, după cum rezultă din experienţa nr. 29.

În cadrul categoriei α s-au mai experimentat şi următoarele tipuri de disipatori de energie, care pentru rezultatele vădit nesatisfăcătoare n-au mai fost încercate în cadrul categoriei β:

Disipator de energie constînd dintr-o risbermă aşezată în continuarea radierului (experienţele nr. 6, 7, 8). Deoarece adîncimea maximă a eroziunii în exeprienţa nr. 6 depăşeşte 7,50 m, acest tip de disipator de energie aşezat în lungul şi la nivelul pantei albiei nu contribuie la transformarea regimului de scurgere rapid într-un regim de scurgere lent. În experienţele nr. 7 şi 8 s-a încercat acelaşi tip de disipator de energie ca la experienţa nr. 6, aşezîndu-se însă sub nivelul fundului albiei, iar la capătul aval al risbermei s-au prevăzut nişte dinţi Rehbock. Adîncimea maximă a eroziunii rezultate, în acest caz, este jumătate din eroziunea rezultată la experienţa nr. 6.

Panta zero a risbermelor a determinat ineficacitatea acestora ca disipatori de energie, deoarece panta zero nu contribuie la transformarea regimului de scurgere.

Disipator de energie cu pantă şi contrapantă cu o risbermă în aval (experienţa nr. 15). În comparaţie cu acelaşi tip de disipator de energie fără risbermă în aval, eroziunea nu este micşorată, deoarece contrapanta distrugătorului de energie (1:5) este prea mare, ceea ce măreşte eroziunea, favorizînd acţiunea vîrtejului de fund, în loc s-o atenueze. Panta zero a risbermei din aval acţionează de asemenea în sensul măririi eroziunii.

Disipatori de energie cu pantă şi contrapantă aşezaţi în serie (experienţele nr. 16 şi 19). Deşi suma lungimilor acestor disipatori de energie aşezaţi în serie depăşeşte lungimea rezultată din calcul, ca fiind necesară pentru un singur disipator de energie, pentru aceiaşi parametri ai scurgerii, eroziunea produsă în aval depăşeşte limitele admisibile, deoarece contrapantele acestora au valori prea mari (1:5 pentru primul şi 1:4 pentru al doilea).

Comparînd rezultatele obţinute din experienţele efectuate cu tipurile de disipatoare de energie enumerate, se constată că eroziunea minimă este dată de cele de la experienţele nr. 28 şi 31.

Disipatorul de energie de la experienţa nr. 31 permite şi eliminarea contrabarajului, dacă se betonează patul din amonte de pragul trapezoidal, deoarece schimbînd repartiţia vitezelor în secţiunea trasversală, transformă regimul de scurgere cu viteze de fund mari într-un regim de scurgere cu viteze mari la suprafaţă.

În acest caz $\frac{V_{\text{suprafaţă}}}{V_{\text{fund}}} = 1{,}3 \ldots 1{,}5$.

Deşi disipatorii de energie dela experienţele nr. 29 şi 31 limitează eroziunea maximă la 0,75 m, volumul mare de săpături, cantitatea mare de beton, ce sînt necesare precum şi necesitatea pereerii malurilor rîului în aval, în cazul experienţei nr. 28, scumpesc mult soluţiile problemei, ceea ce conduce la necesitatea determinării unei soluţii optime şi din punct de vedere economic.

Încercări pentru determinarea soluţiei optime şi din punct de vedere economic

Experienţele nr. 29, 30 şi 31 au condus la concluzia că pentru a determina soluţia optimă şi din punct de vedere economic trebuie ales un disipator de energie de tip trapezoidal, urmînd a se varia dimensiunile şi poziţia acestuia, pentru ca eroziunea maximă să nu depăşească limitele impuse, iar cheltuielile de construcţie să fie cît mai reduse.

Astfel s-a menținut contrabarajul, dar s-a amplasat disipatorul de energie la o distanță cu 40 % mai mică decît distanța la care era așezat acesta în experiența nr. 31, eliminîndu-se totodată eroziunea din amonte de pragul trapezoidal, iar în aval limitînd-o la o valoare sub cea admisibilă.

Adîncimea maximă a eroziunii rezultate fiind mai mică decît limita admisibilă, volumul mic de săpături precum și cantitatea redusă de beton necesară, impun acest tip de disipator de energie ca soluție optimă și din punct de vedere economic.

Studiul eroziunii în aval pentru diferite moduri de evacuare a apei

Pentru disipatorul de energie adițional reprezentînd soluția optimă din punct de vedere economic s-a făcut studiul eroziunii în aval, pentru următoarele moduri de evacuare a apei:

a) Ambele stăvilare complet deschise, clapetele coborîte, nivelul de reținere normal. $Q = 312$ m³/s. (Experiența nr. 33; fig. 5 și 6).

b) Ambele stăvilare ridicate la $\left(\frac{2h}{3}\right)^{*)}$, clapetele coborîte, deversare de creastă. $Q = 375$ m³/s. (Experiența nr. 34; fig. 7 și 8).

c) Un stăvilar complet ridicat, celălalt ridicat la $\left(\frac{2h}{3}\right)$, ambele clapete coborîte, deversare de creastă. $Q = 390$ m³/s. (Experiența nr. 35; fig. 9 și 10).

d) Ambele stăvilare ridicate la $\left(\frac{h}{3}\right)$ clapetele coborîte, deversare de creastă. $Q = 217$ m³/s. (Experiența nr. 36; fig. 11 și 12).

e) Un stăvilar complet ridicat și clapeta respectivă ridicată. $Q = 260$ m³/s. (Experiența nr. 37; fig. 13 și 14).

f) Ambele stăvilare închise, clapetele coborîte, deversare de creastă. $Q = 82{,}8$ m³/s. (Experiența nr. 38; fig. 15 și 16).

g) Un stăvilar complet ridicat, celălalt ridicat la $\left(\frac{h}{3}\right)$ clapetele coborîte, deversare de creastă. $Q = 304$ m³/s. (Experiența nr. 39; fig. 17 și 18).

h) Ambele stăvilare complet ridicate, clapetele coborîte, nivelul de reținere maxim. $Q = 415$ m³/s. (Experiența nr. 40; fig. 19 și 20).

Pentru fiecare din aceste moduri de evacuare a debitului s-au executat fotografii din profil la 5′, 15′, 30′ și 60′ după începerea experienței. De asemenea s-au executat și fotografii ale curbelor de nivel. Cu datele scoase din aceste fotografii, s-au trasat curbele de variație a maximului eroziunii în funcție de timp, care sînt trecute în tabloul cu rezultate.

Din studiul eroziunii în aval de disipatorul de energie adițional rezultă:

1. Pentru debitul $Q = 415$ m³/s, dacă evacuarea se face simultan prin golirile de fund și prin deversare de creastă, eroziunea nu depășește valoarea admisibilă.

2. După cum era de așteptat, eroziunea produsă în cazul deschiderii nesimetrice a stăvilarelor depășește în unele cazuri cu 40% eroziunea rezultată la evacuarea aceluiași debit, dar cu stăvilarele deschise simetric.

Evacuarea apei cu stăvilarele deschise nesimetric se recomandă numai pentru spălarea depunerilor sau evacuarea corpurilor plutitoare.

---

*) h este înălțimea orificiului dreptunghiular al golirii de fund.

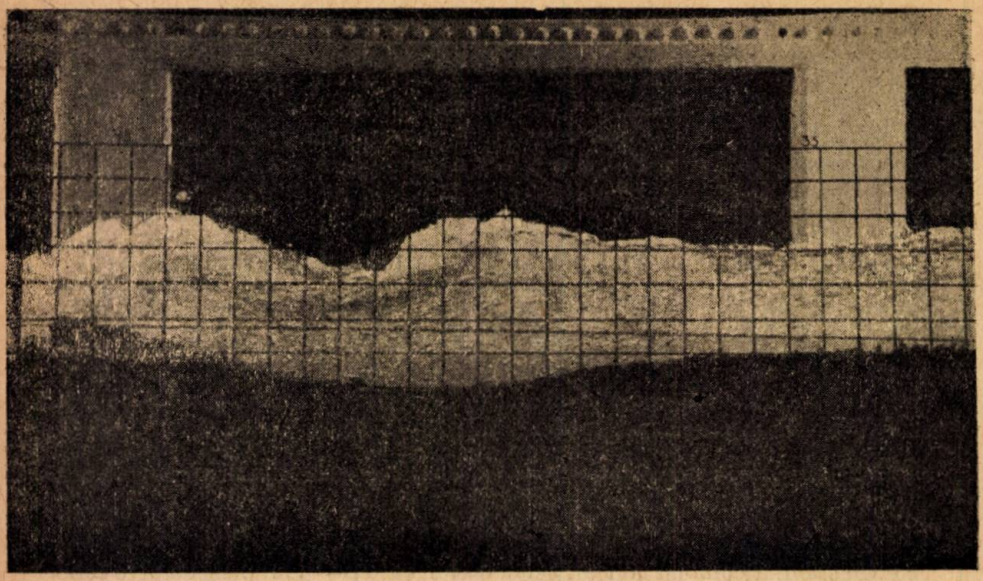


Fig. 5. — Profilul eroziunii la sfîrșitul experienței, $Q = 312$ m³/s.

Fig. 6. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 312$ m³/s.

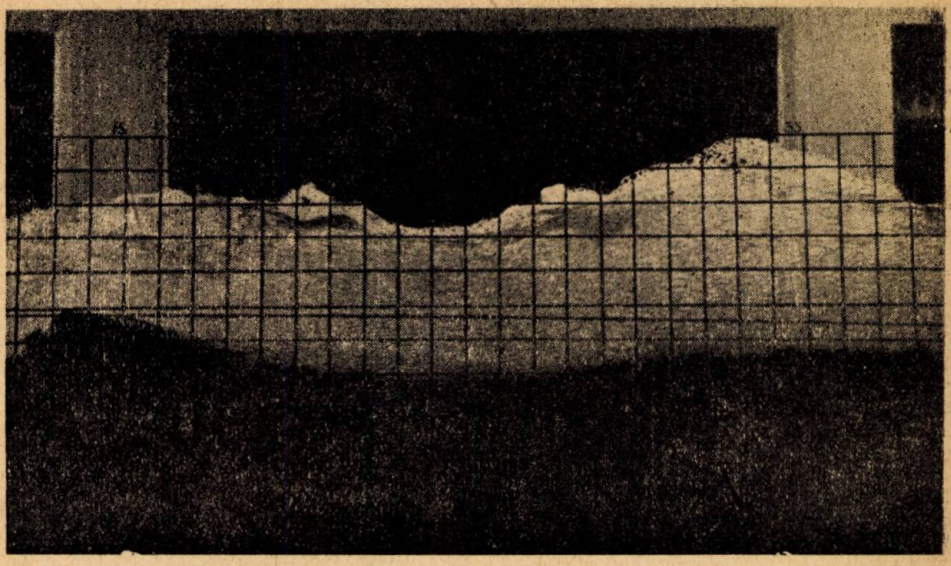


Fig. 7. — Profilul eroziunii la sfîrșitul experienței, $Q = 375$ m³/s.

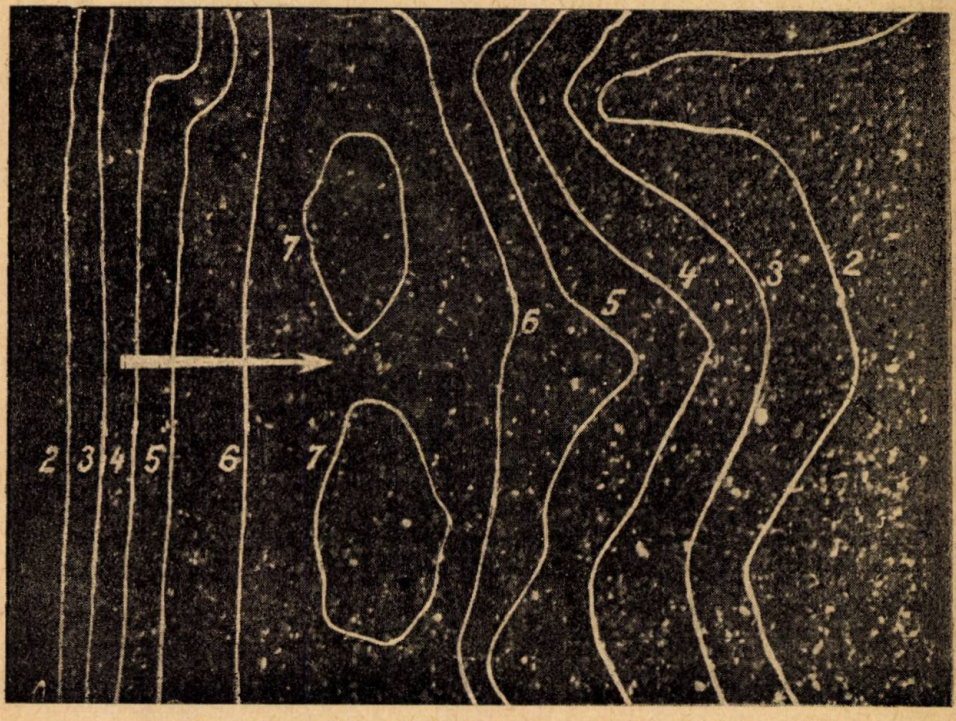


Fig. 8. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 375$ m³/s.

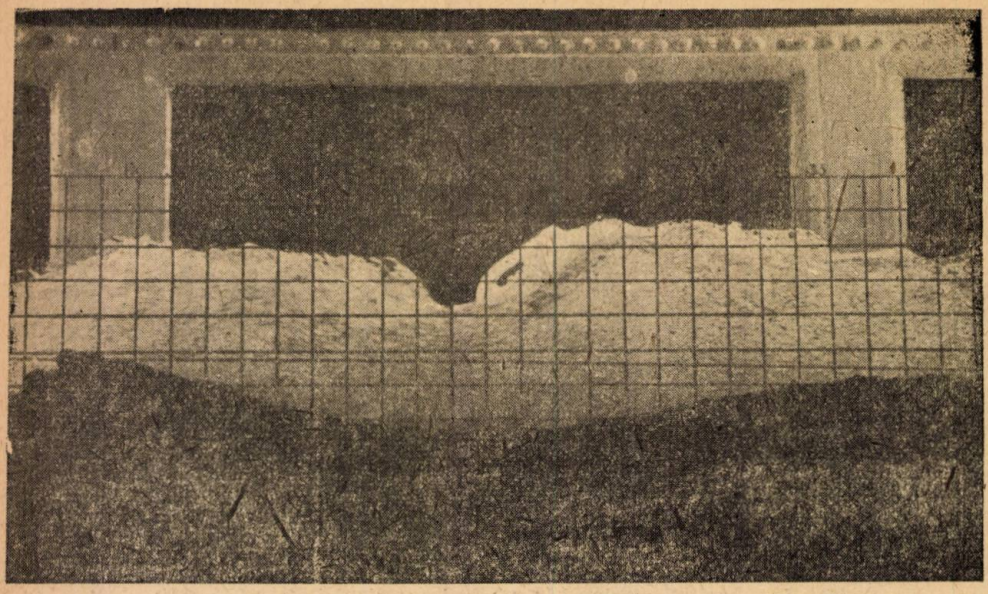


Fig. 9. — Profilul eroziunii la sfîrșitul experienței, $Q = 390$ m³/s.

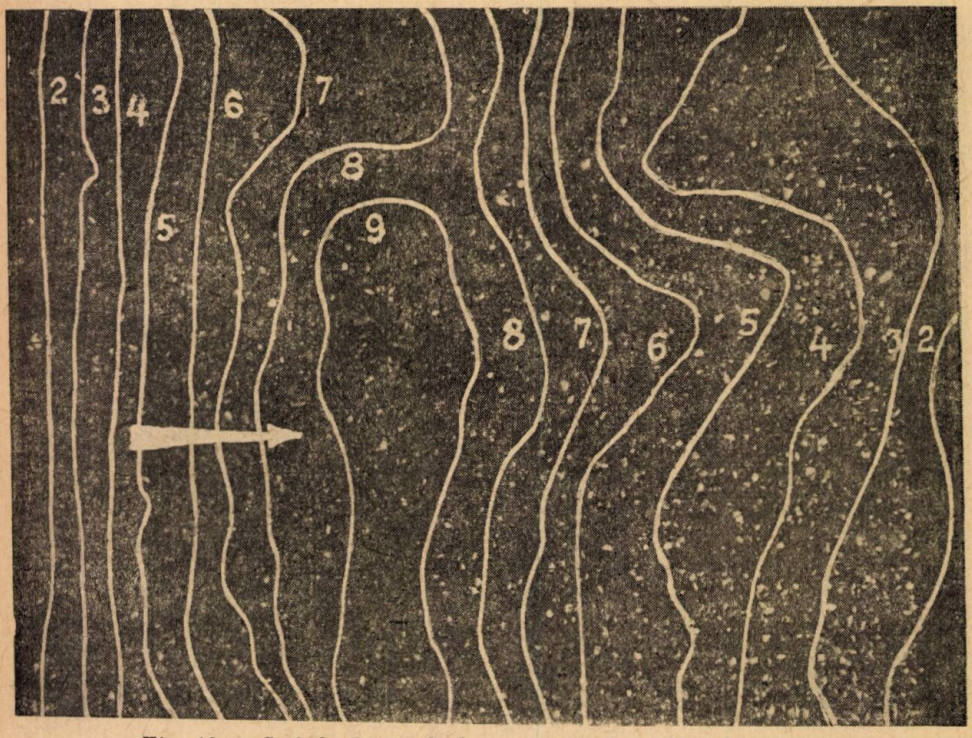


Fig. 10. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 390$ m³/s.

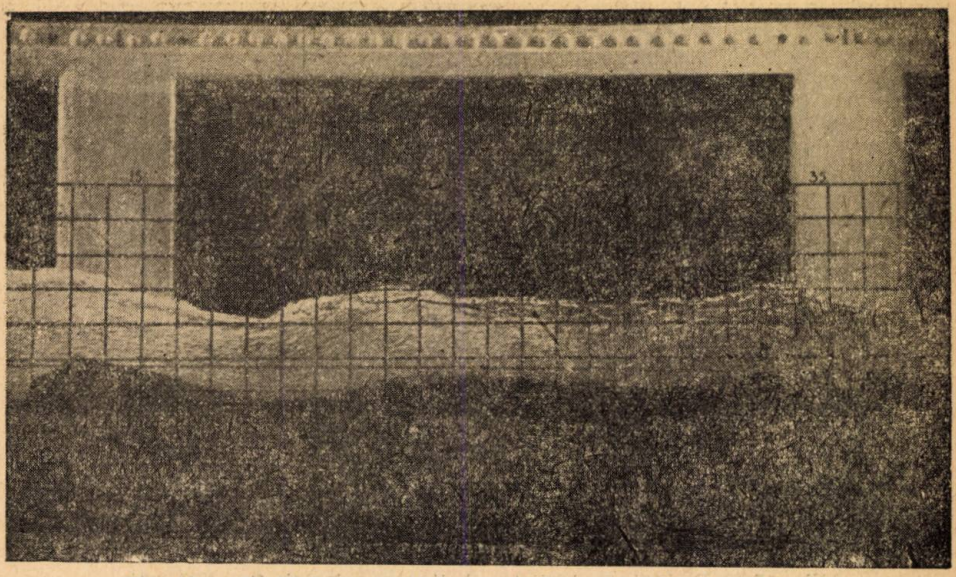


Fig. 11. — Profilul eroziunii la sfîrşitul experienţei, $Q = 217$ m³/s.

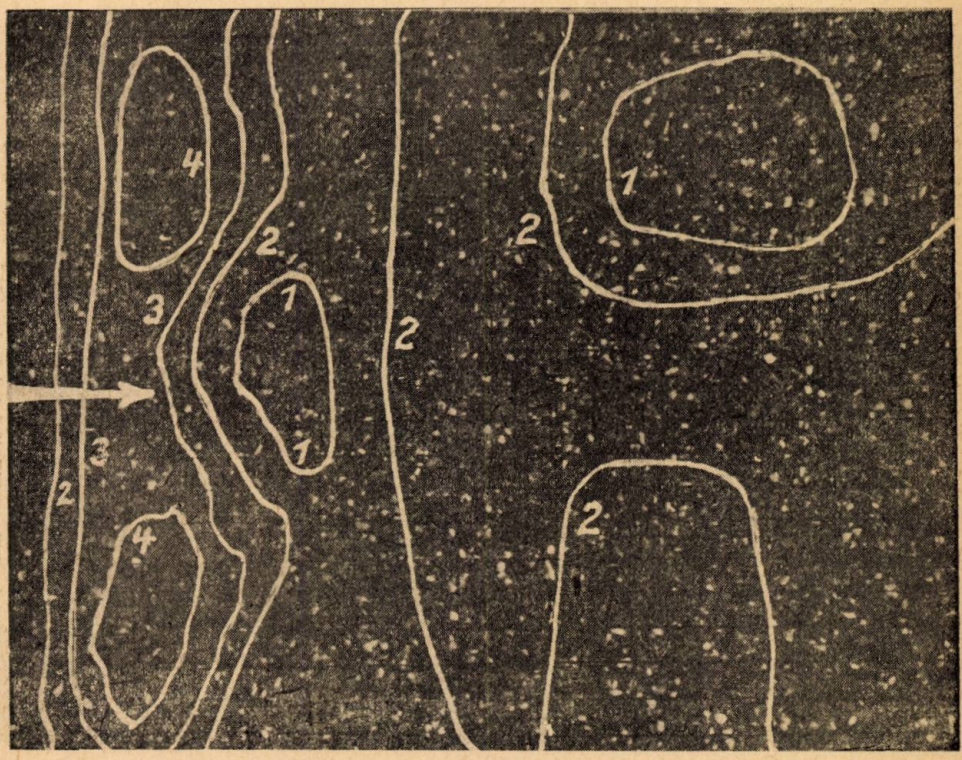


Fig. 12. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 217$ m³/s.

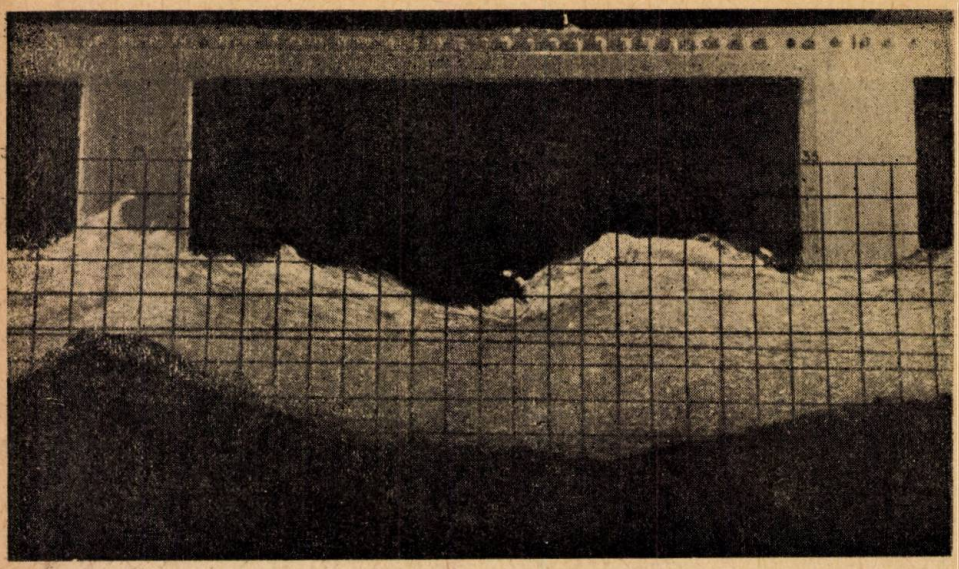


Fig. 13. — Profilul eroziunii la sfîrșitul experienței, $Q = 260$ m³/s.

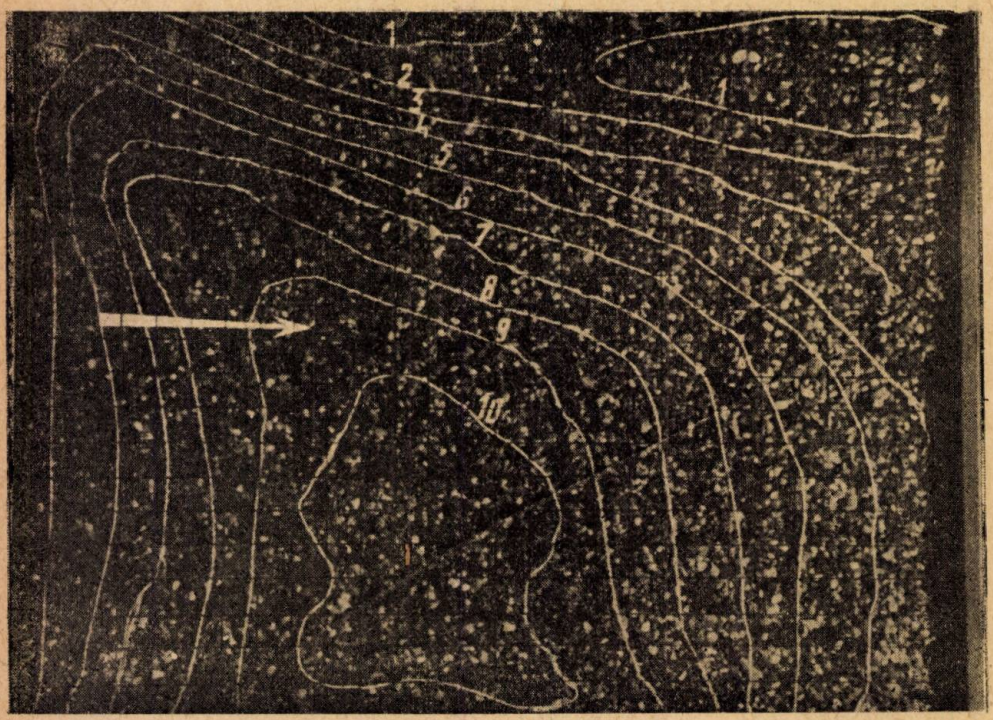


Fig. 14. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 260$ m³/s.

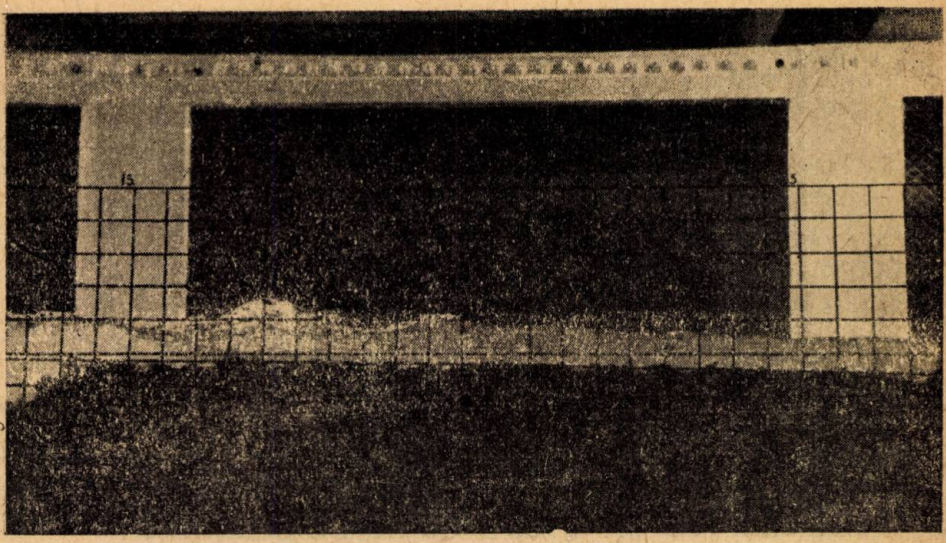


Fig. 15. — Profilul eroziunii la sfîrşitul experienţei, $Q = 82{,}8$ m³/s.

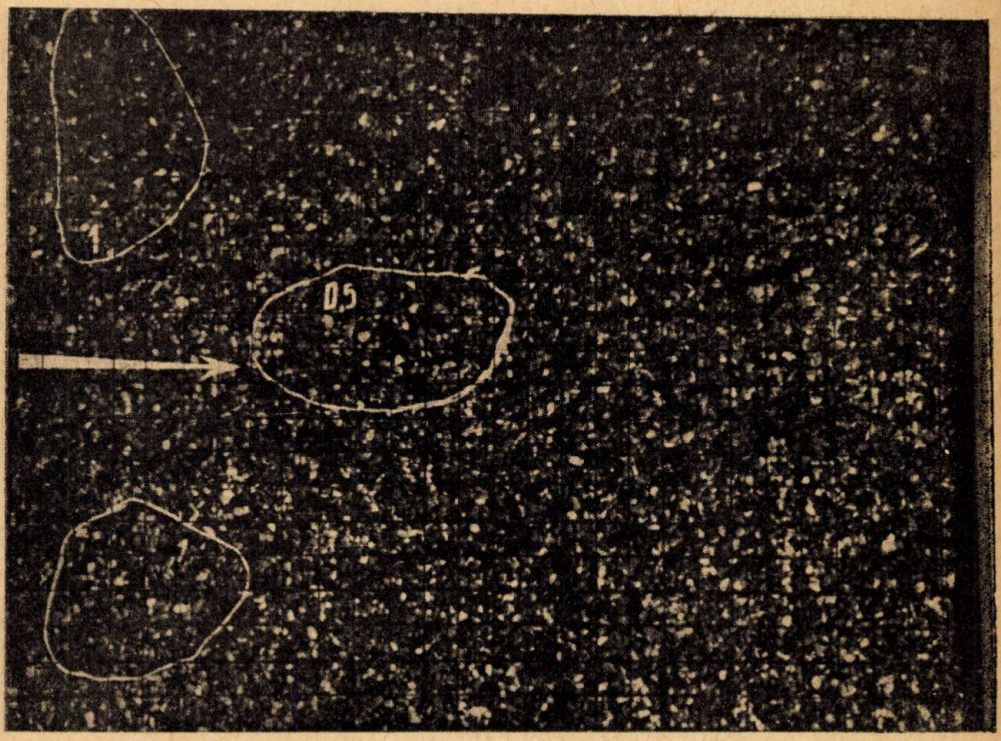


Fig. 16. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 82{,}8$ m³/s.

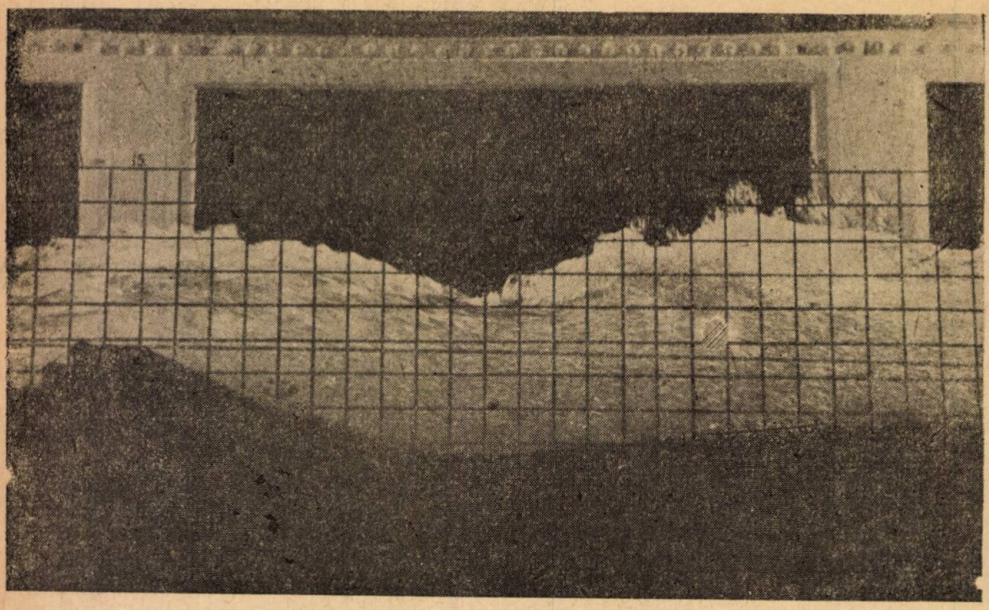


Fig. 17. — Profilul eroziunii la sfîrşitul experienţei, $Q = 304$ m³/s.

Fig. 18. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 304$ m³/s.

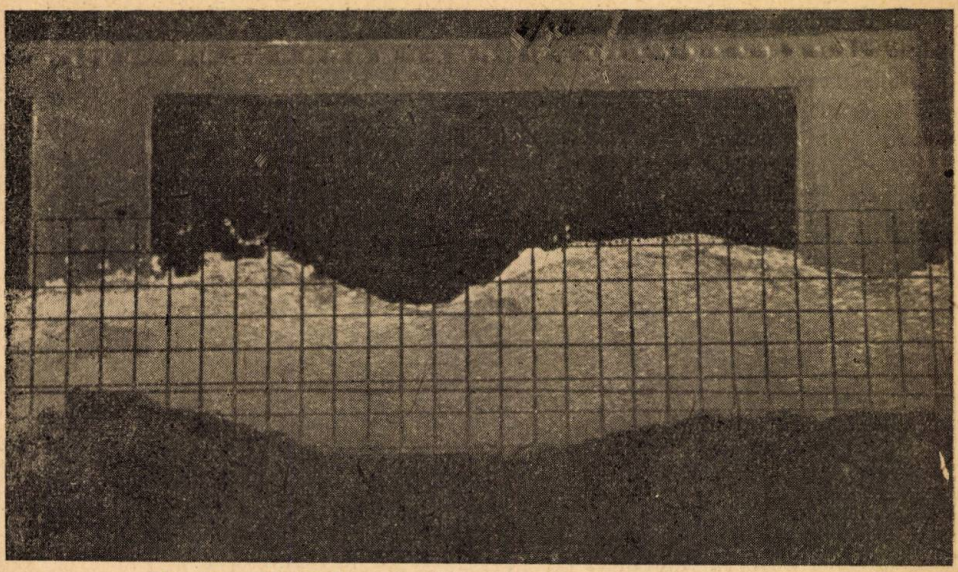


Fig. 19. — Profilul eroziunii la sfîrşitul experienţei, $Q = 415$ m³/s.

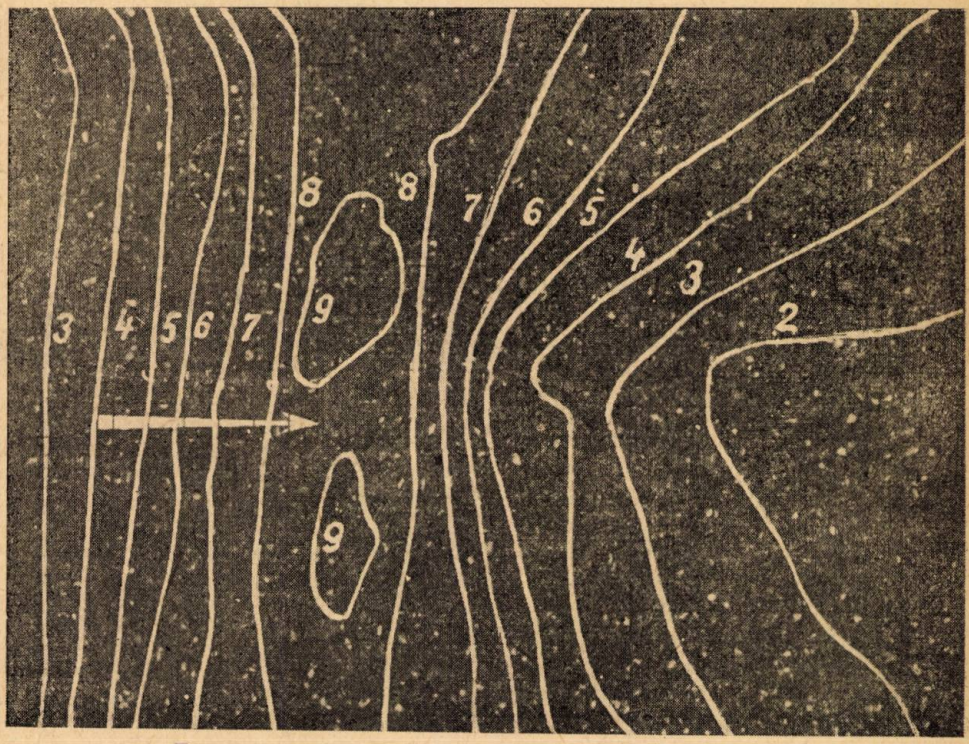


Fig. 20. — Curbele de nivel ale eroziunii, $Q = 415$ m³/s.

3. Rezultatele obţinute din aceste experienţe duc la concluzia că tipul de disipator de energie trapezoidal reprezentînd soluţia optimă şi din punct de vedere economic satisface complet condiţiilor problemei puse.

4. Adîncimea maximă a eroziunii rezultată în natură pentru debitele corespunzătoare celor cu care s-au făcut experienţele pe model va fi mai mică decît eroziunea reprezentată la scară după măsurătorile din laborator, deoarece în natură albia este evazată şi pietrişul este legat, în laborator însă albia a fost prismatică şi pietrişul nelegat.

CONCLUZII

Din încercările efectuate pentru a determina o soluţie optimă atît din punct de vedere hidraulic cît şi economic în problema disipatorilor de energie aşezaţi în serie, în avalul unui baraj, putem trage următoarele concluzii:

1. Tipul optim de disipator de energie adiţional este cel trapezoidal (după cum au arătat experienţele noastre şi ale altor cercetători [2], [6], [7].

2. În cazul cînd se utilizează un disipator de energie cu pantă şi contrapantă, acestea trebuie să aibă valorile corespunzătoare parametrilor curentului, pentru a realiza transformarea regimului de scurgere rapid într-unul lent.

3. La amplasarea în serie a doi disipatori de energie se obţine o soluţie hidraulică, optimă, dacă:

a) ambii disipatori de energie sînt de acelaşi tip.

b) suma lungimilor acestor disipatori de energie este egală cu lungimea necesară, rezultată din calcul pentru un singur disipator de energie corespunzător aceloraşi parametri ai curentului respectiv (pentru disipatorii de energie adiţionali cu pantă şi contrapantă, acestea din urmă trebuie să aibă valorile corespunzătoare curentului al cărui regim de scurgere a fost parţial transformat de primul distrugător de energie).

4. Construirea unui contrabaraj, în avalul barajului, pentru a reduce lungimea radierului disipatorului de energie, este recomandată în special în cazurile în care sînt pereate taluzurile de protecţie. Astfel se creează o cameră de amortizare ce reduce relativ mult vitezele de fund şi micşorează în consecinţă erodarea albiei.

5. Pentru barajele cu dispozitive de evacuare a apei, analoge cu cele ale barajului studiat, se recomandă descărcarea apelor simultan prin golirile de fund, care vor fi deschise simetric, şi prin deversare de creastă, micşorîndu-se astfel eroziunea.

REZULTATELE ÎNCERCĂRILOR

Q = debitul cu care s-a efectuat încercarea pe model

J = panta terenului în aval de baraj

δ = adîncimea maximă a eroziunii în aval de distrugătorul de energie adiţional

L = distanţa de la radier pînă la adîncimea maximă a eroziunii

t = durata experienţei

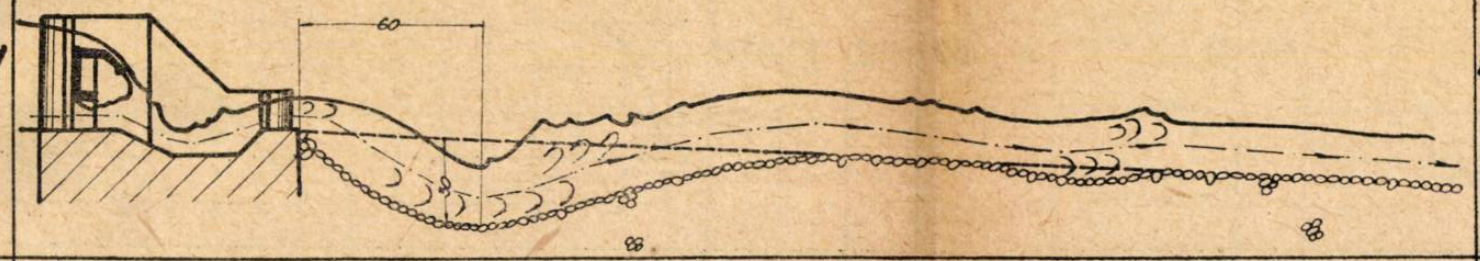
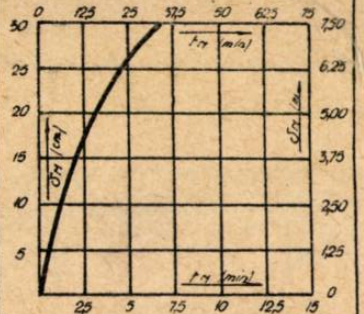
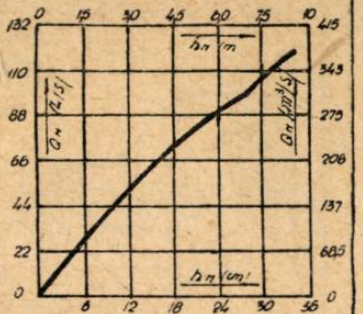
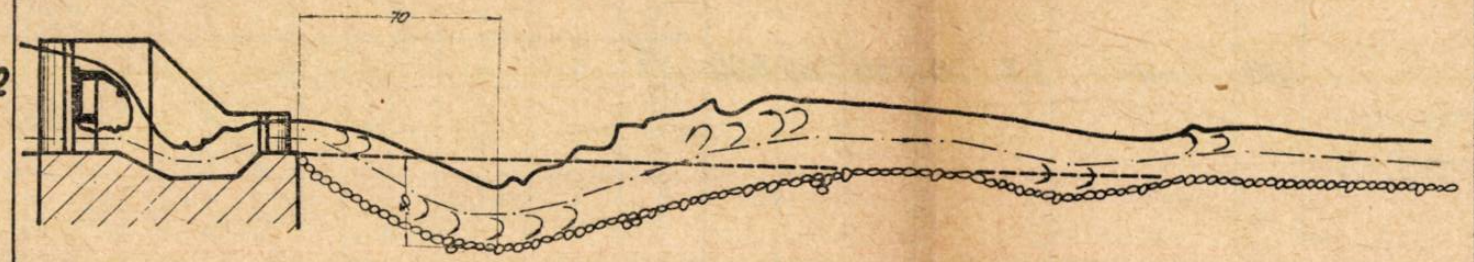
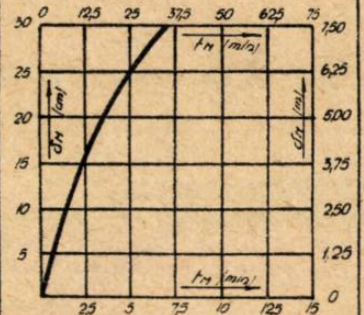
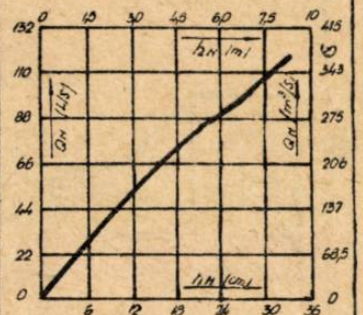
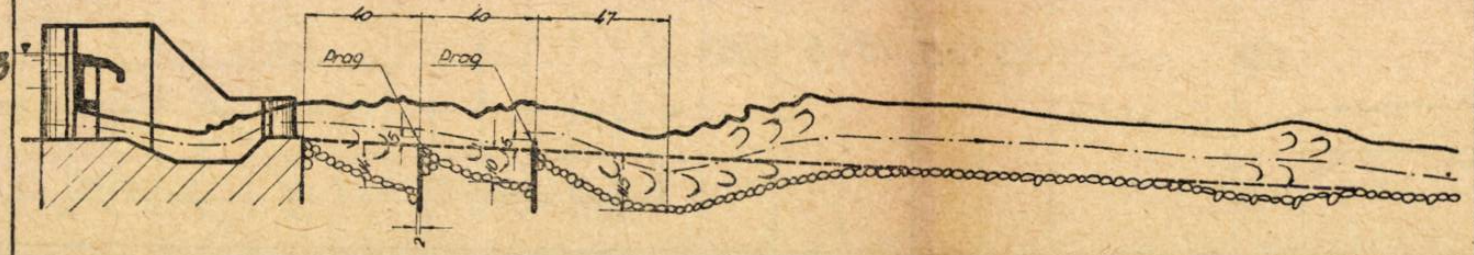
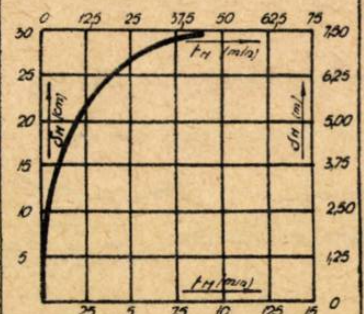
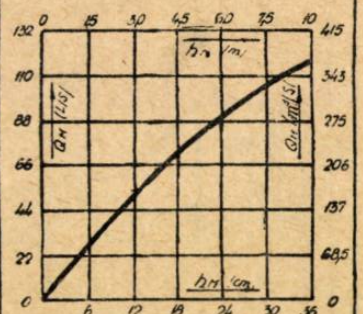
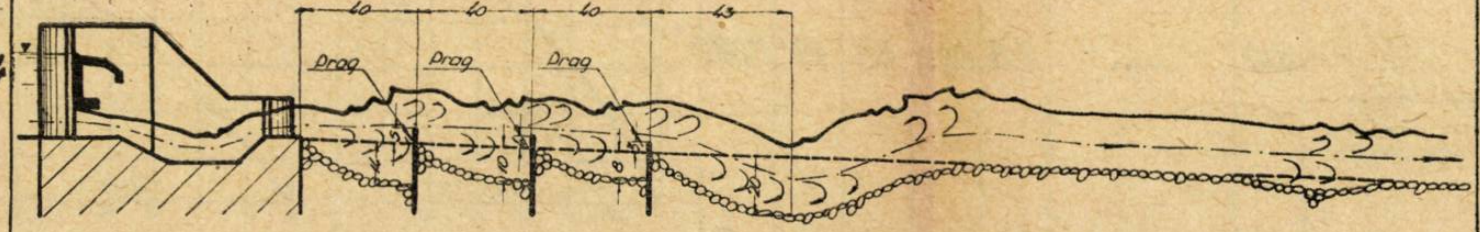
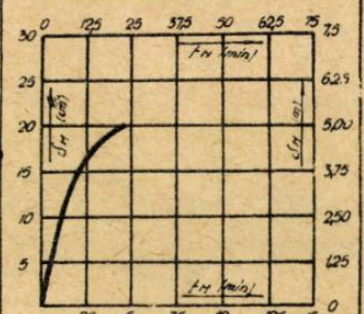
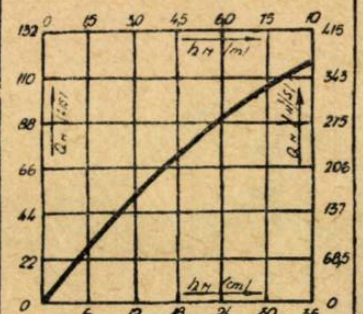
ε = randamentul distrugătorului de energie experimentat

$\delta = f(t)$ = variaţia maximului eroziunii în funcţie de timp. Sînt date valorile pentru model δ_M. t_M şi pentru natură δ_N şi t_N.

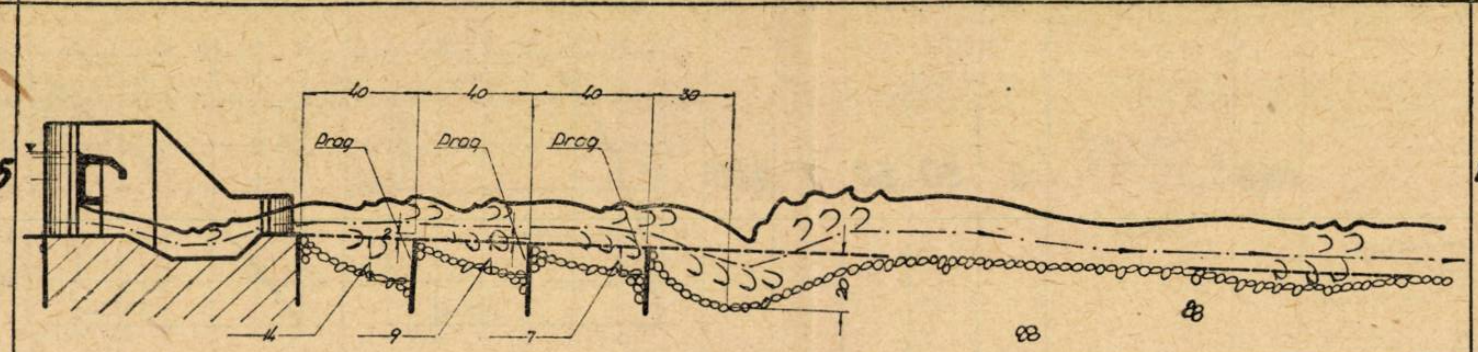
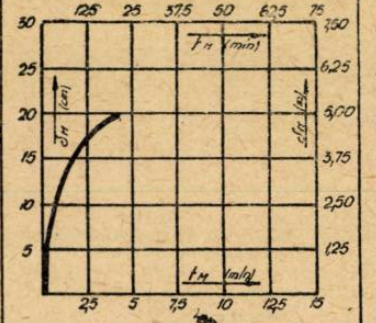
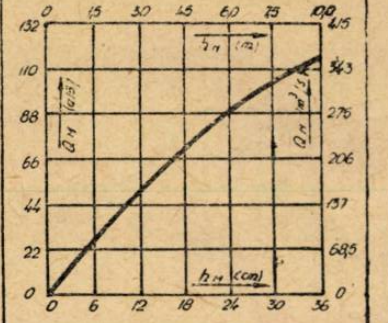
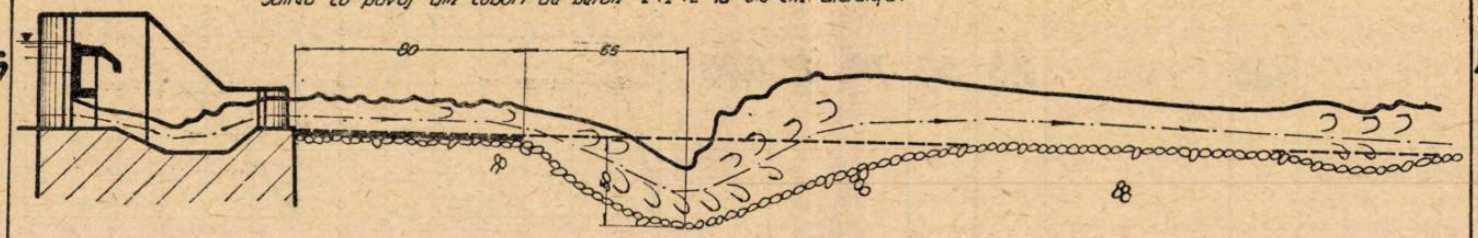
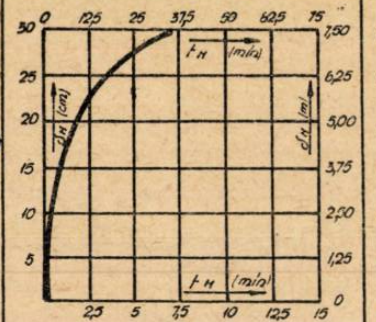
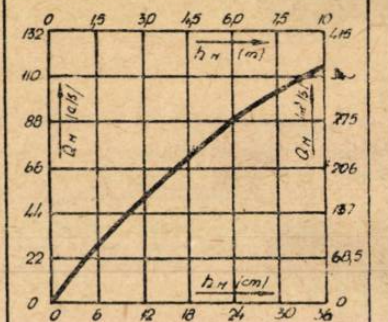
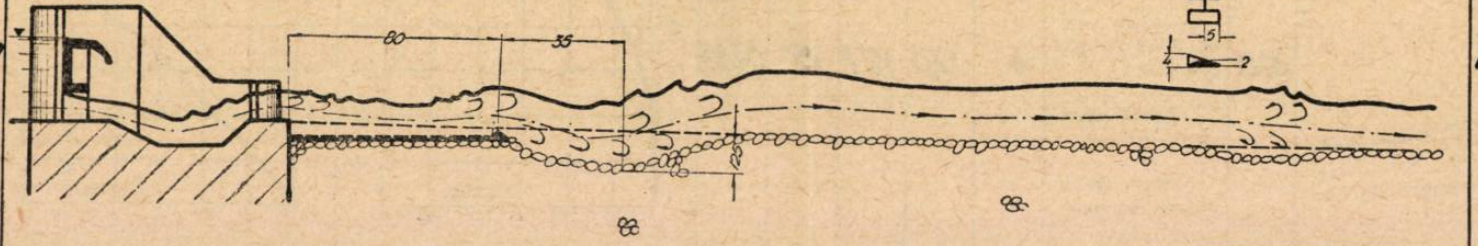
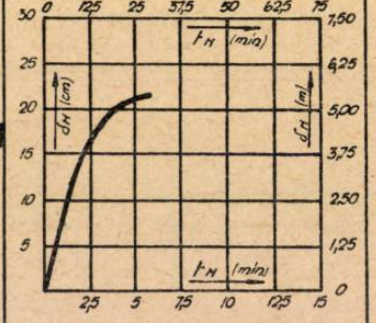
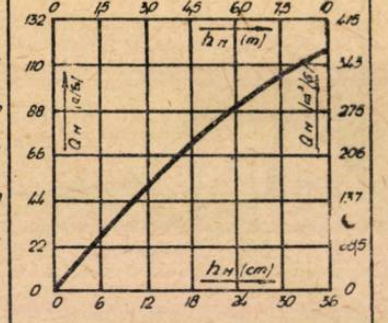
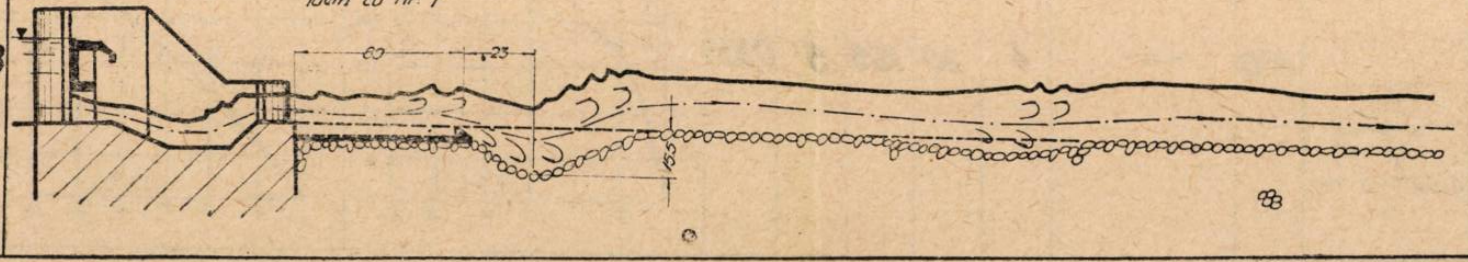
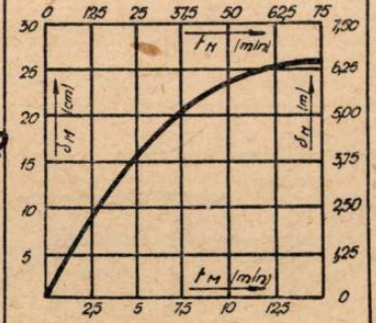
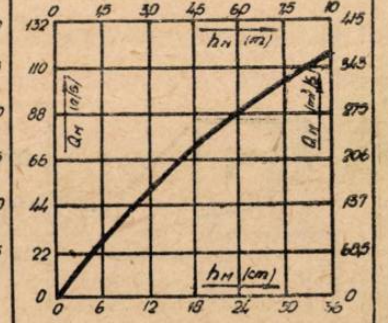
$Q = f(h)$ = variaţia debitului evacuat în funcţie de sarcină. Sînt date valorile pentru model Q_M, h_M şi pentru natură Q_N, t_N.

INCERCARI DE ORIENTARE

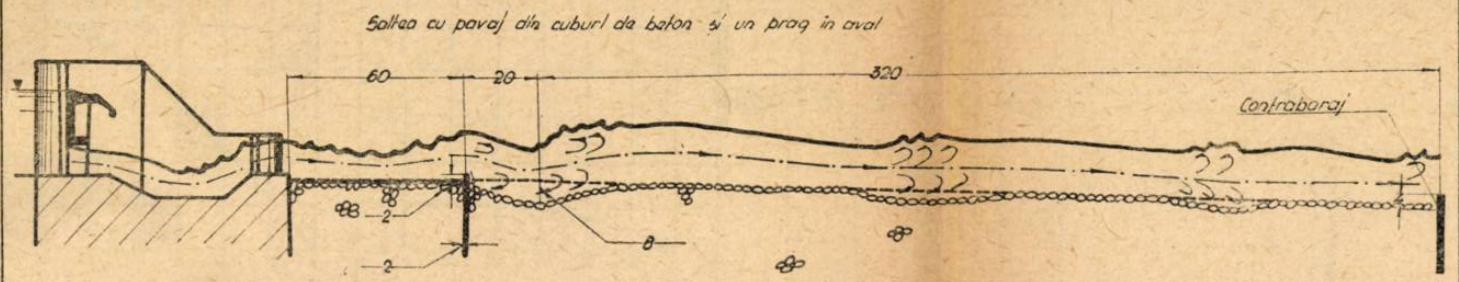
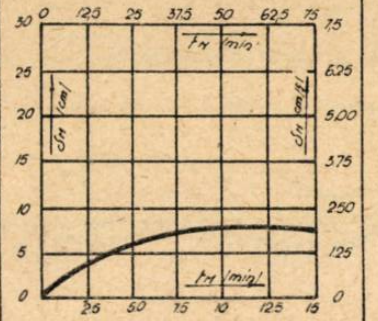
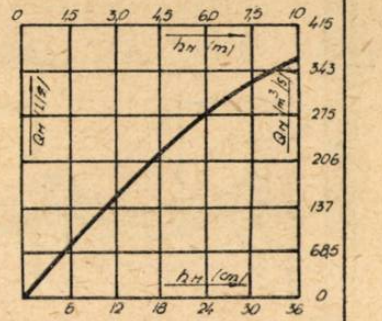
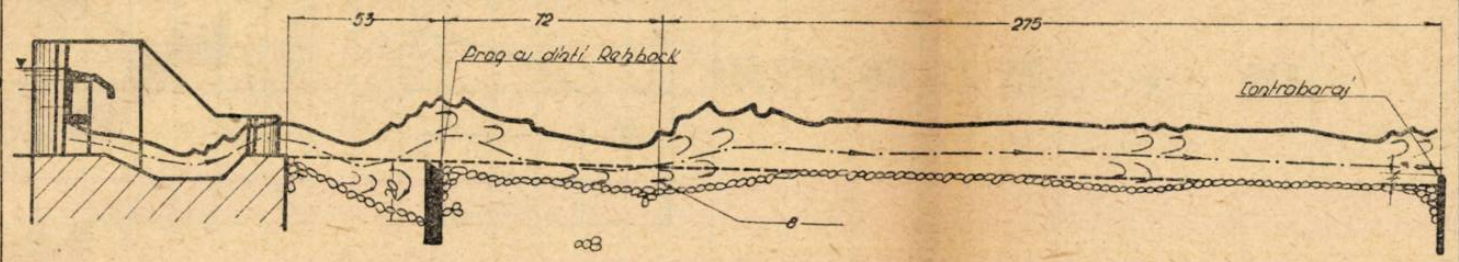
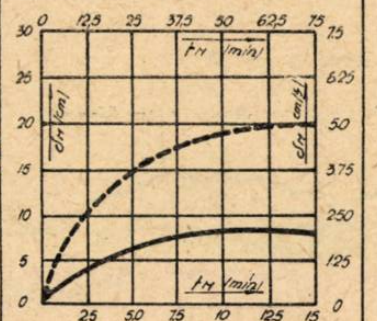
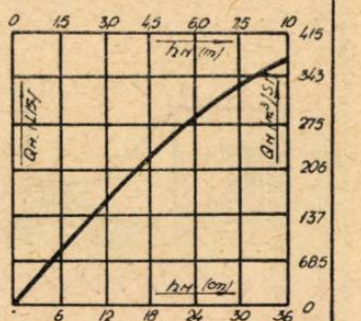
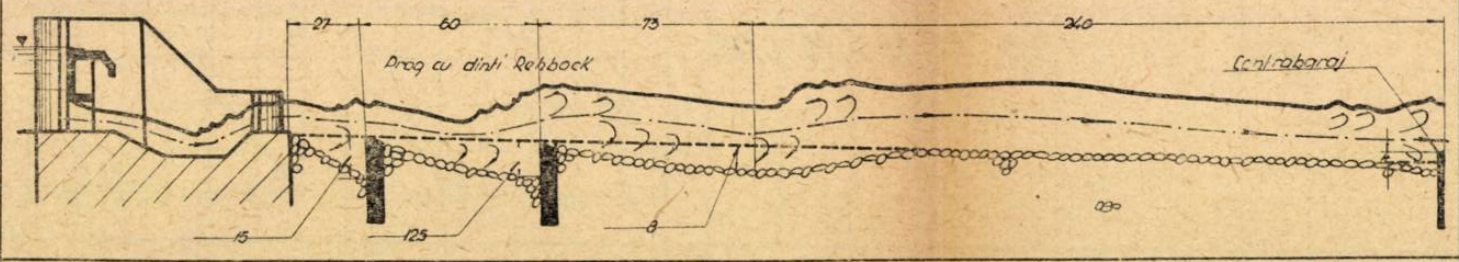
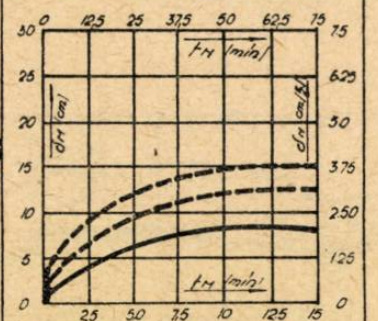
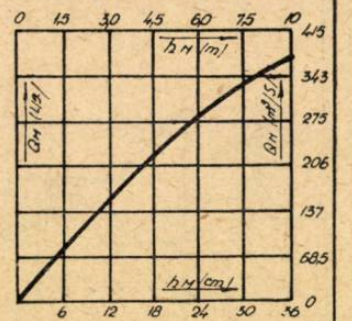
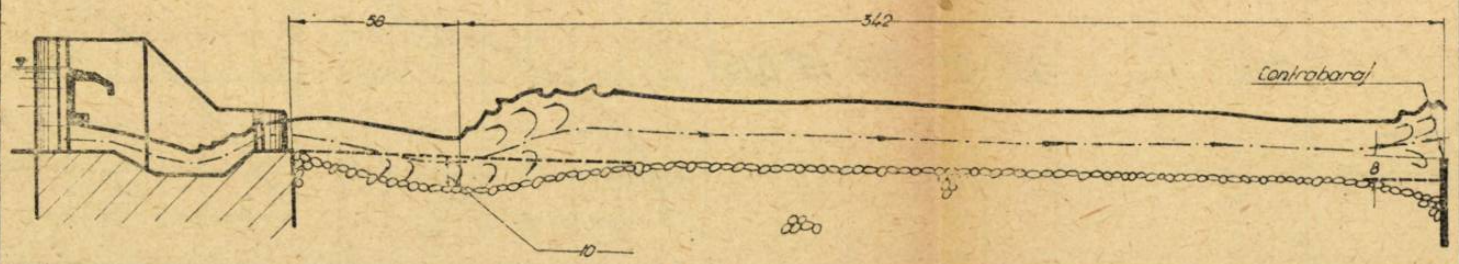
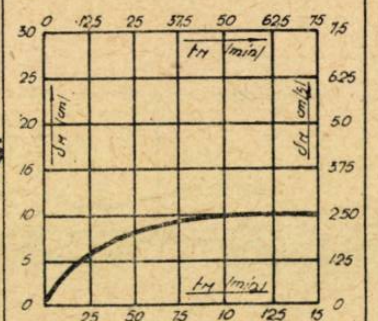
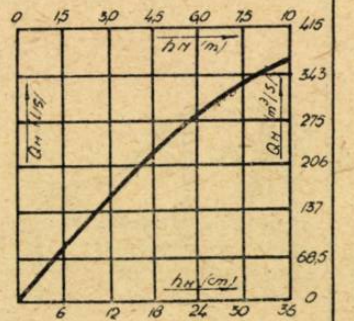
INCERCARI DENTRU DETERMINAREA SOLUTIEI HIDRAULICE OPTIME

Nr. crt.	TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q l/s	Modul de evacuare al debitului	J %	S_m (cm)	L (cm)	t (min)	E	S = f (t)	Q = f (h)
1		116,5	-Ambele galiri de fund complet deschise -Clapetele ridicate	4	30	60	7'	0,00		
2		116,5	- » -	2,3	30	70	7'	0,00		
3		100	-Ambele galiri de fund complet deschise -Clapete cabanite -Nivelul de referinta normal	4	17,5	127	8'	0,415		
4		100	- » -	4	20	165	5'	0,333		

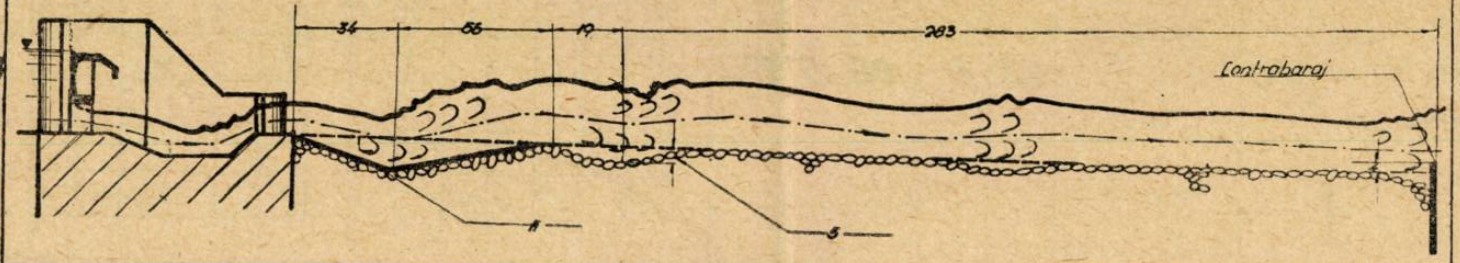
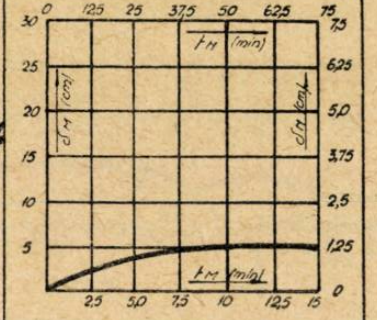
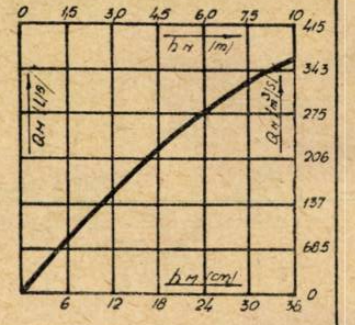
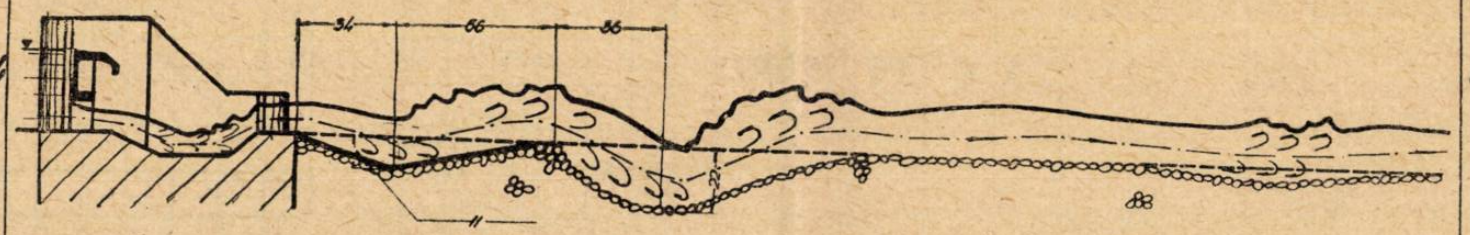
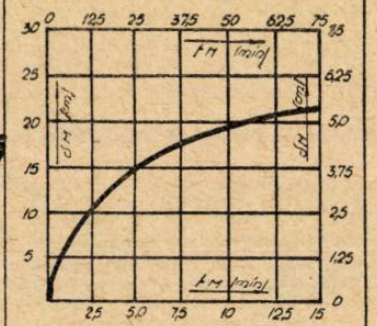
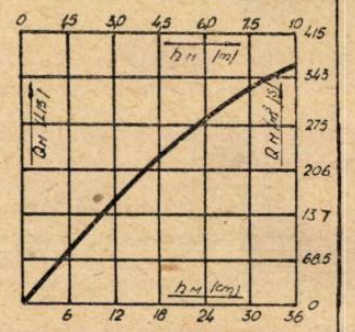
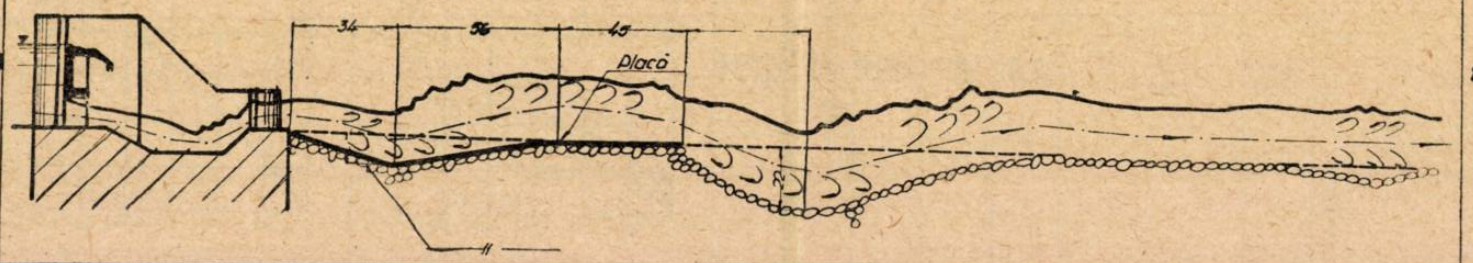
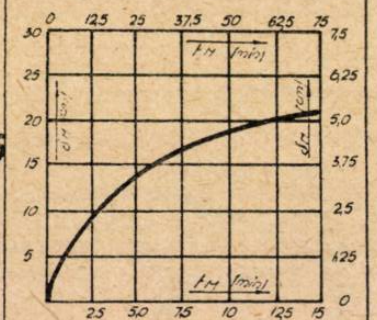
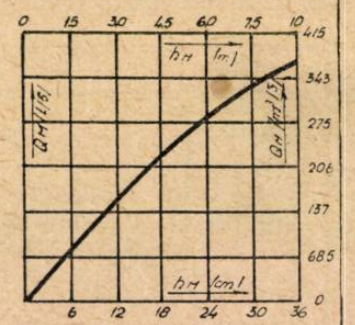
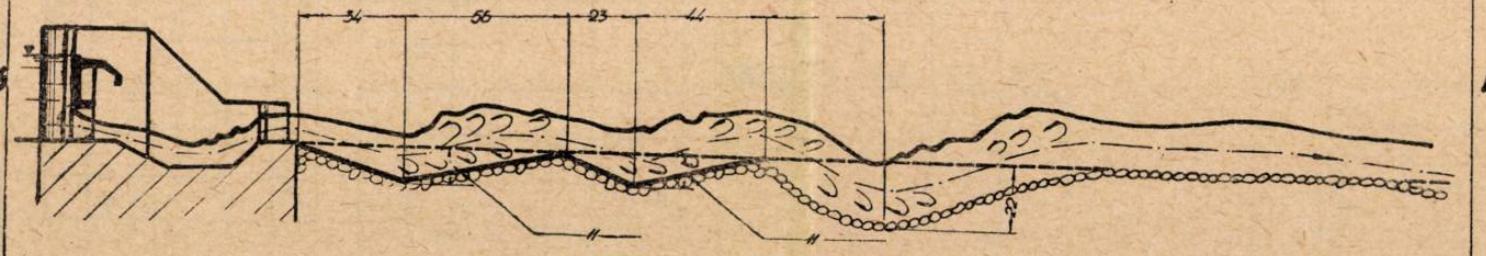
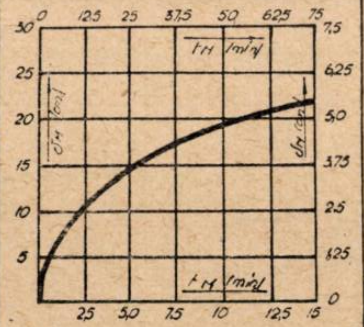
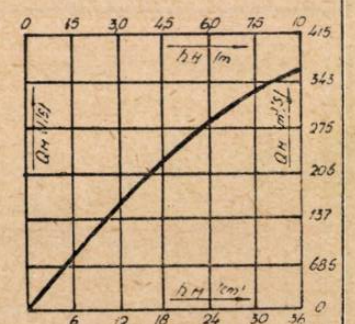
INCERCARI PENTRU DETERMINAREA SOLUTIEI HIDRAULICE OPTIME

Nr. crt.	TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q l/(s.)	Modul de evacuare al debitului	J %	S_n (cm)	L (cm)	t (min)	ε	S = f (t)	Q = f (h)
5		100	-Ambele goliri de fund complet deschise. -Clapetele cobarâte. -Nivelul de retinere normal.	4	20	152	5'	0,333		
6	 Saltea cu pavaj din cuburi de beton 2×2×2 la 0.5 cm. distanta.	100	-„-	2,3	30	135	7'30"	0,00		
7	 Acaiași saltea ca la Nr. 6, terminată cu dinți Rehbock. Detaliu dinți Rehbock.	100	-„-	2,3	12,5	115	6'	0,583		
8	 Idem cu Nr. 7	100	-„-	2,3	15,5	83	15'	0,482		

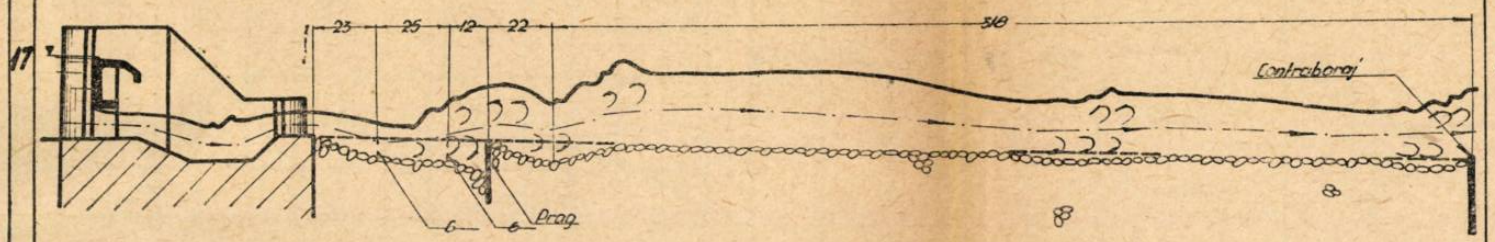
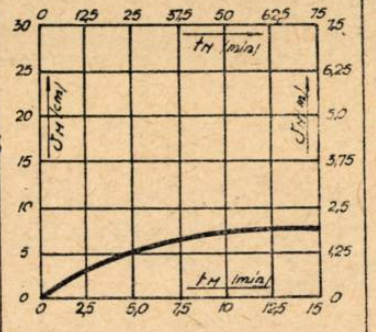
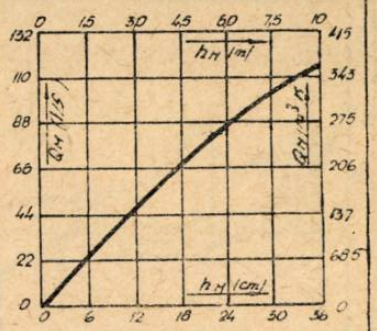
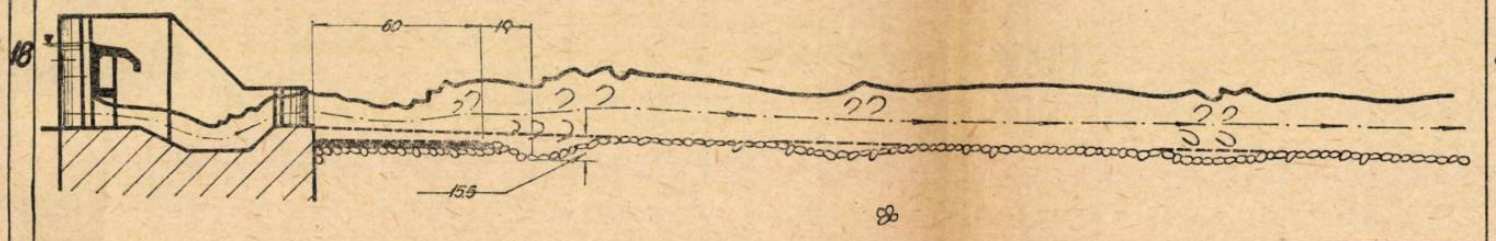
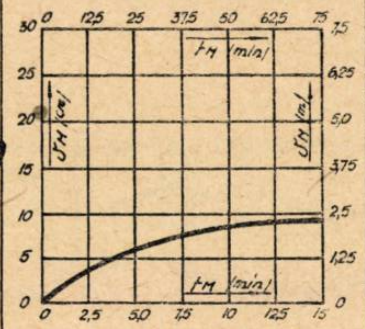
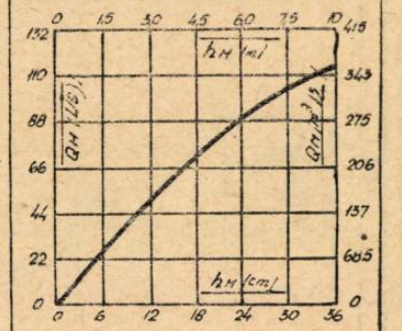
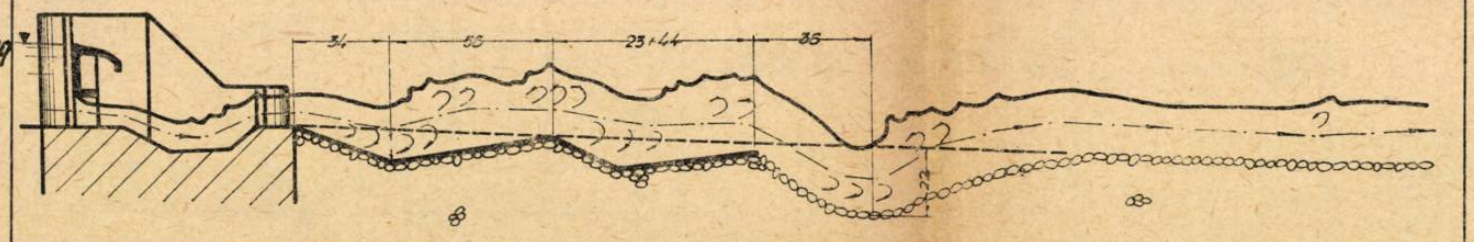
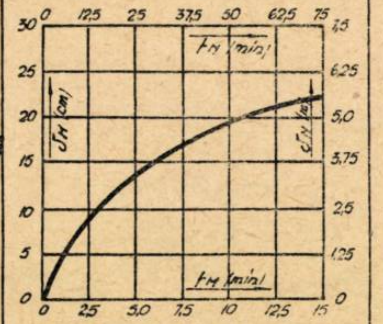
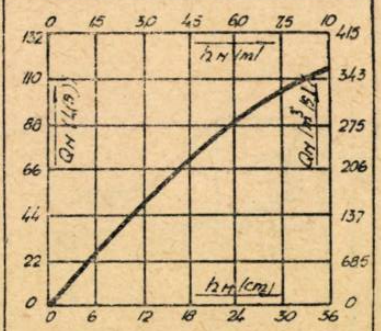
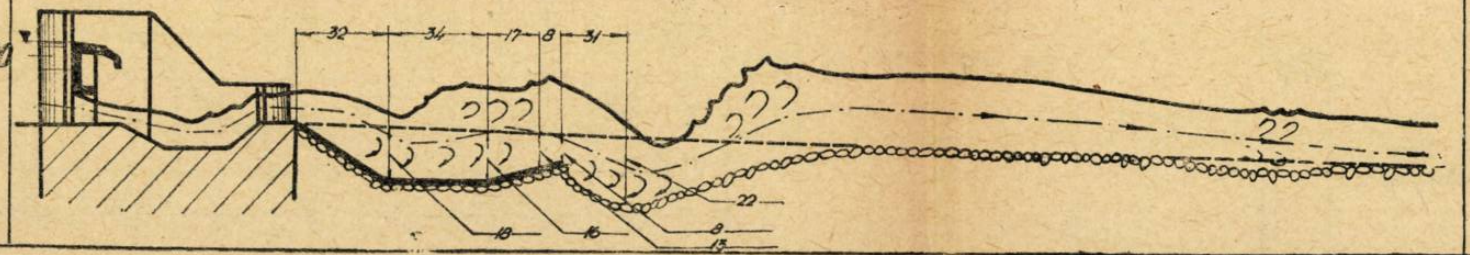
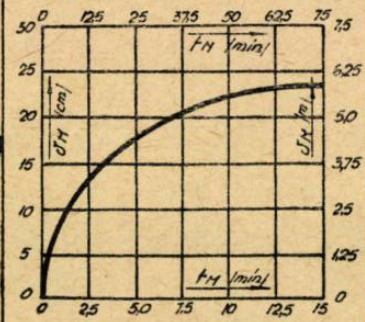
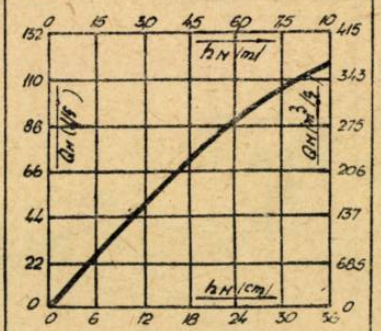
INCERCARI PENTRU DETERMINAREA SOLUTIEI HIDRAULICE OPTIME

Nr. crt.	TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q l/s	Modul de evacuare al debitului	J %	δ (cm)	L (cm)	t (min)	ε	δ = f (t)	Q = f (h)
9		100	-Ambele galiri de fund complet deschise. -Clapetele coborîte -Nivelul de retinere normal.	2,3	8	80	15'	0,733		
10		100	-„-	2,3	8	125	15'	0,733		
11		100	-„-	2,3	8	160	15'	0,733		
12		100	-„-	2,3	10	58	15'	0,666		

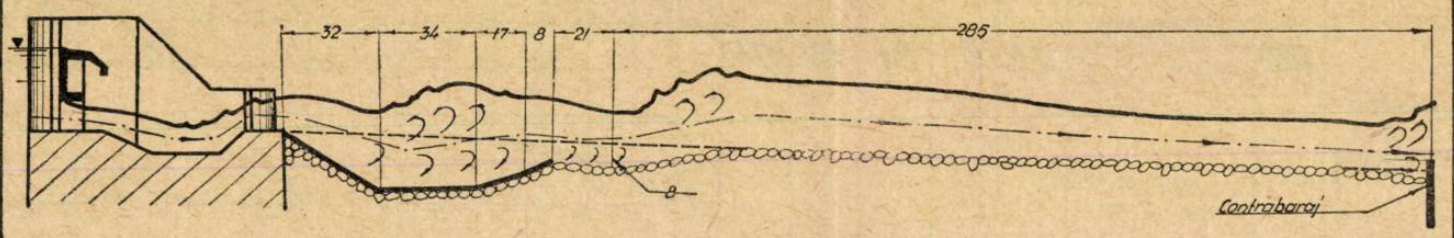
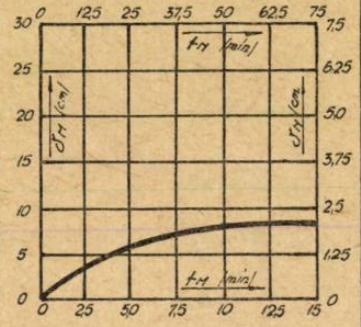
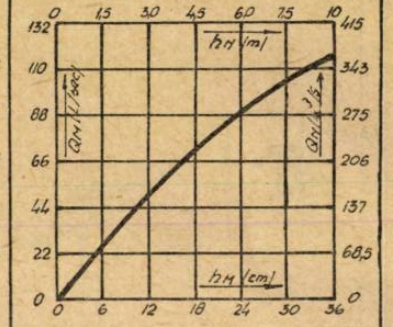
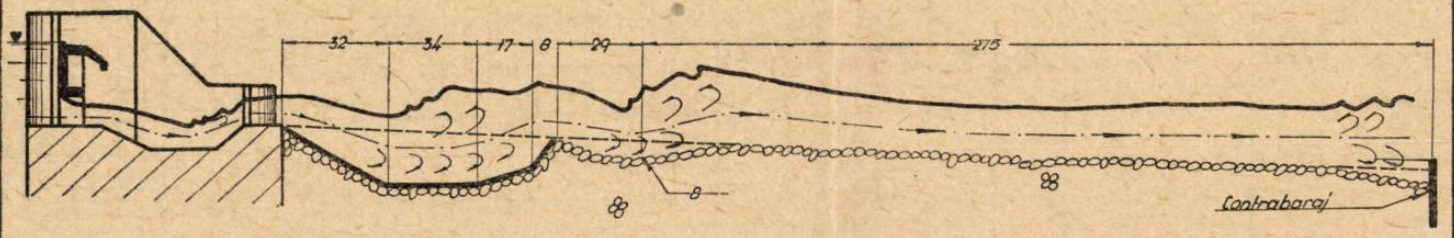
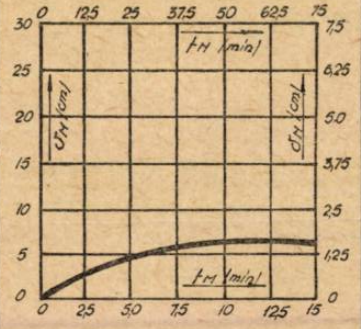
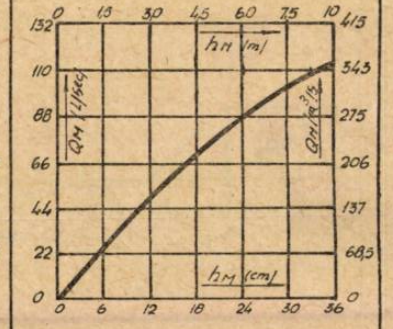
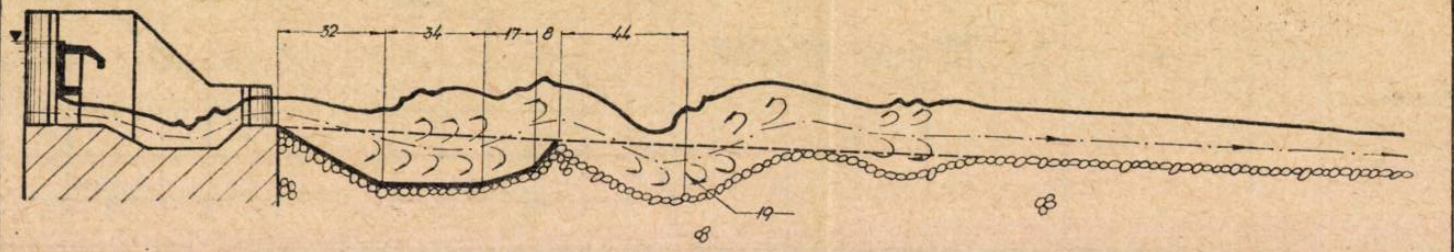
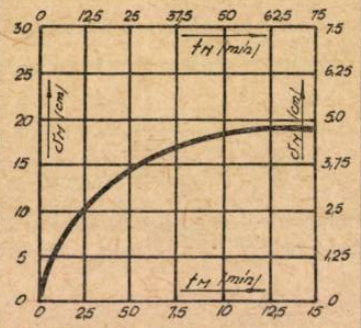
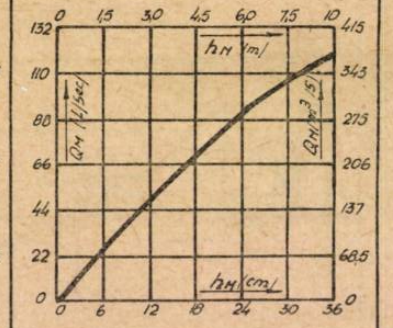
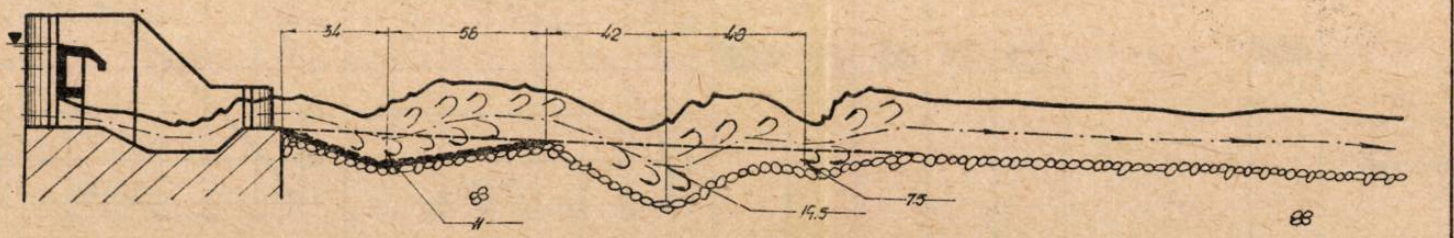
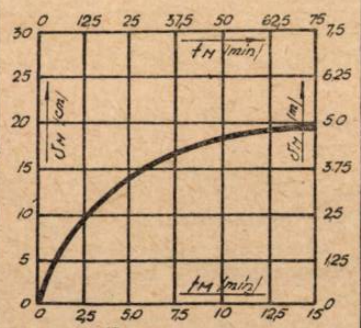
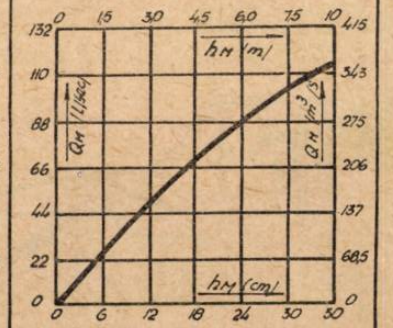
INCERCARI PENTRU DETERMINAREA SOLUTIEI HIDRAULICE OPTIME

Incerc.	TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q L/s	Modul de evacuare al debitului	J %	δ (cm)	L (cm)	t (min)	ε	δ = f (t)	Q = f (h)
13	Postradier în pantă și contrapantă 	100	- Ambele goliri de fund complet deschise - Nivelul de retinere normal	2,3	5	113	15'	0,834		
14	Idem cu Nr 13 	100	-"-	2,3	22	126	15'	0,265		
15		100	-"-	2,3	22	180	15'	0,265		
16		100	-"-	2,3	22	200	15'	0,265		

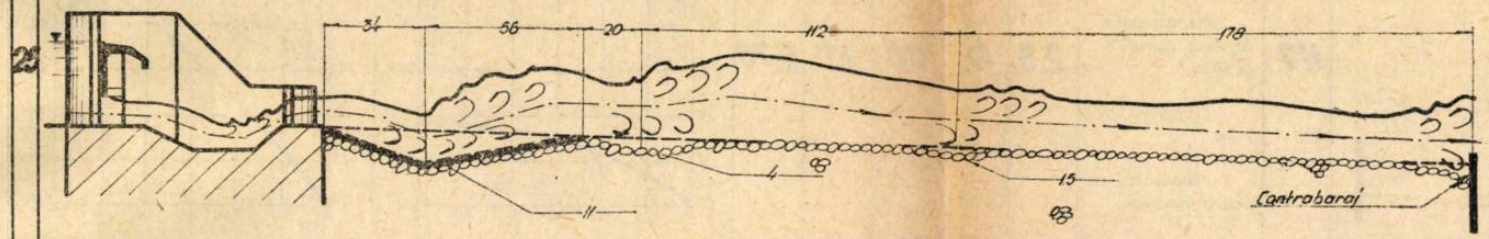
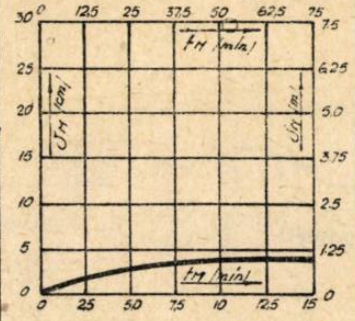
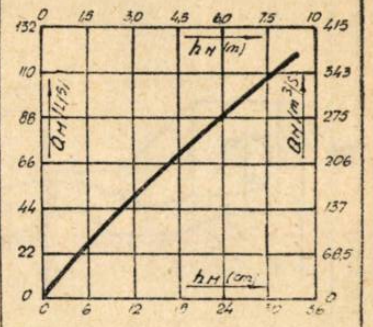
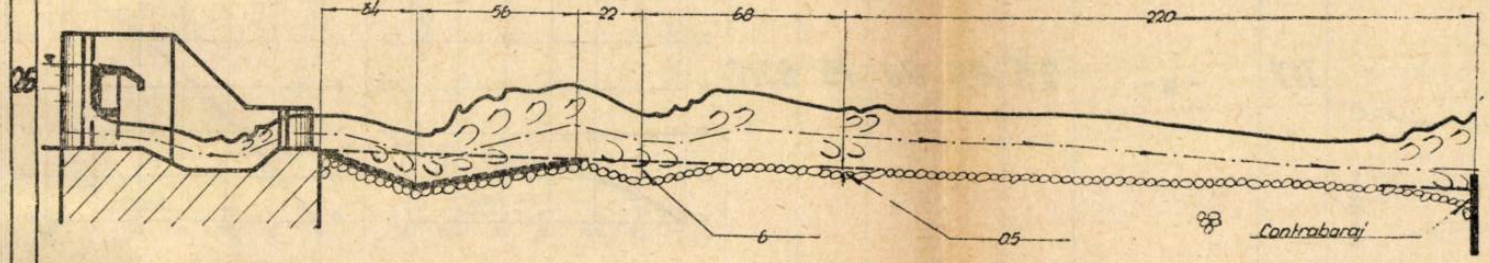
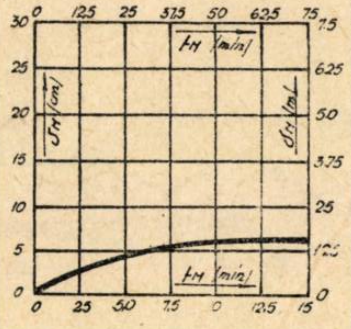
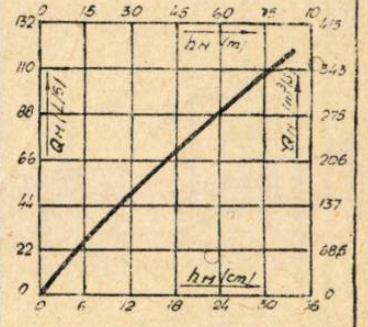
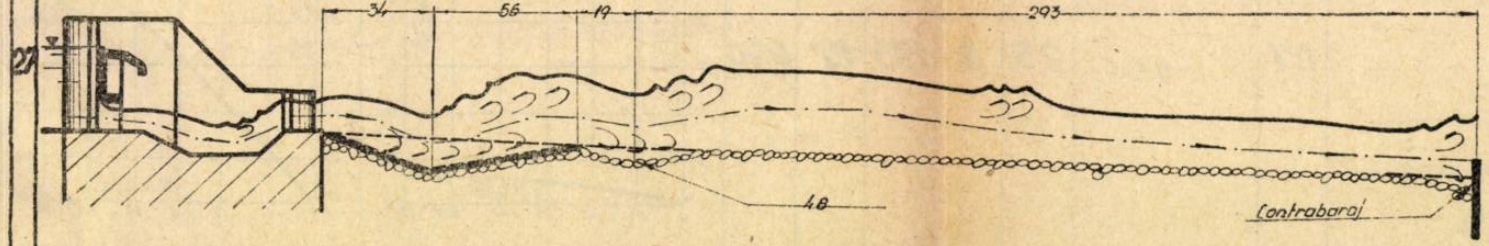
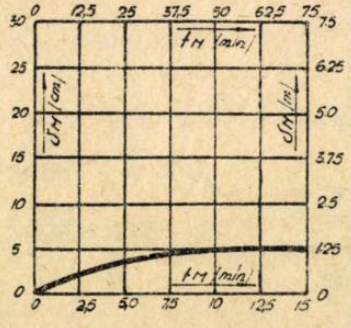
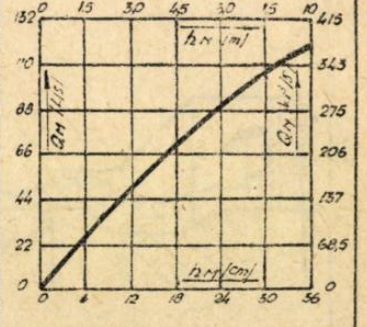
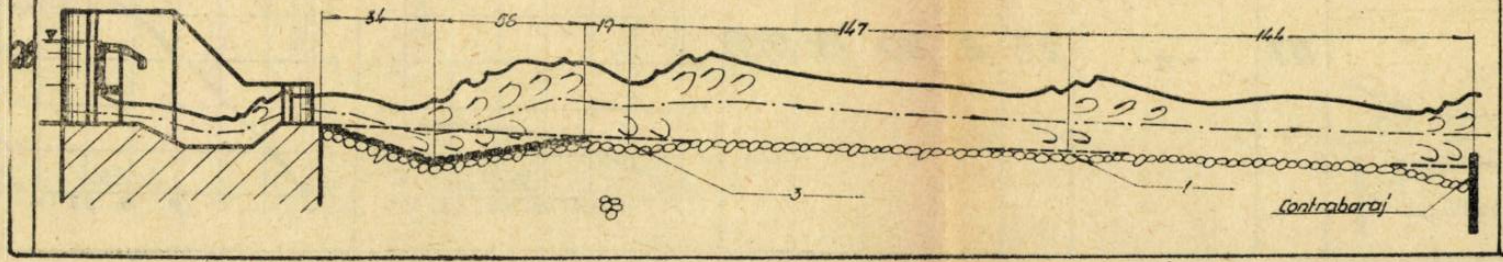
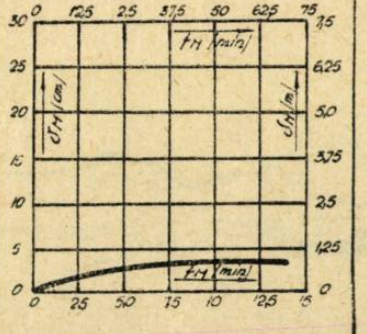
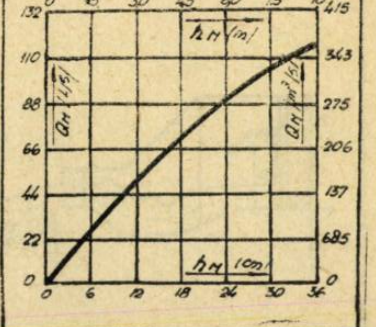
INCERCARI PENTRU DETERMINAREA SOLUTIEI HIDRAULICE OPTIME

Nr. crt.	TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q (l/s)	Modul de evacuare al debitului	J (%)	S (cm)	L (cm)	t (min)	E	S = f(t)	Q = f(h)
17		100	-Ambele goliri de fund complet deschise -Clapaleta coborîtă -Nivelul de reținere normal	2,3	8	81	15'	0,733		
18		100	-»-	2,3	9	77	15'	0,500		
19		100	-»-	2,3	22	200	15'	0,265		
20		100	-»-	2,3	24	115	15'	0,20		

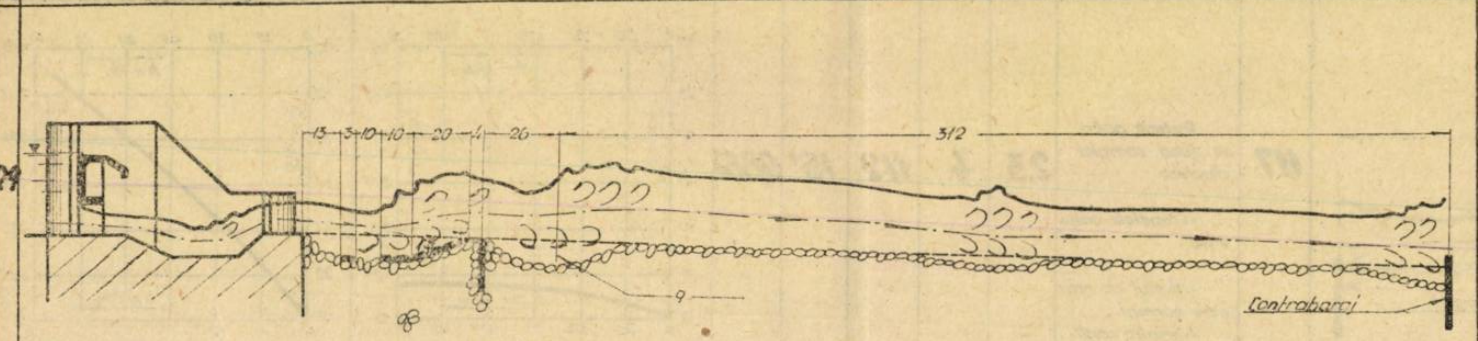
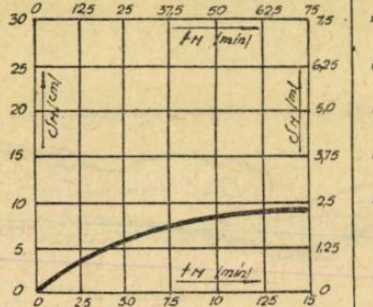
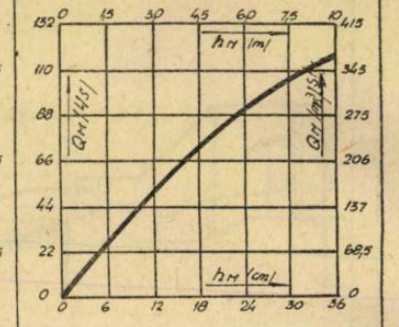
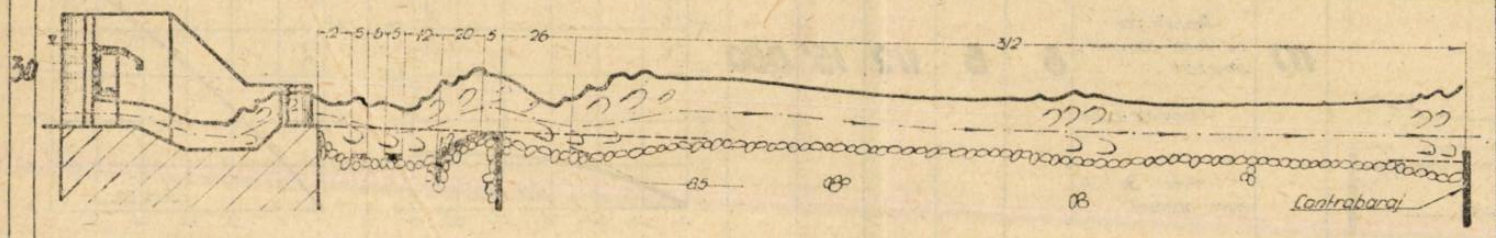
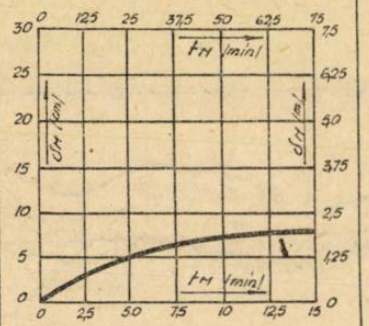
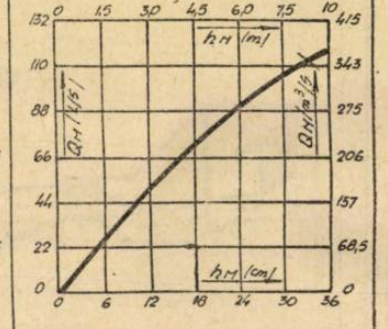
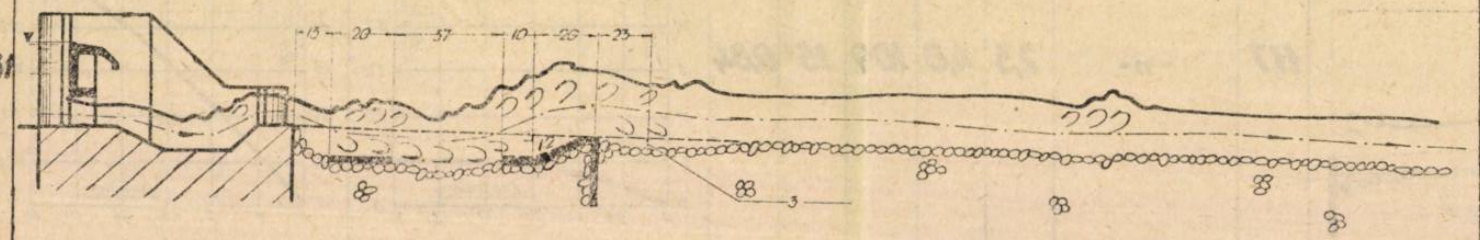
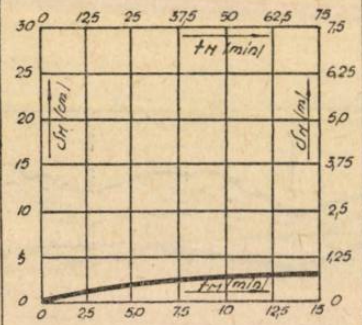
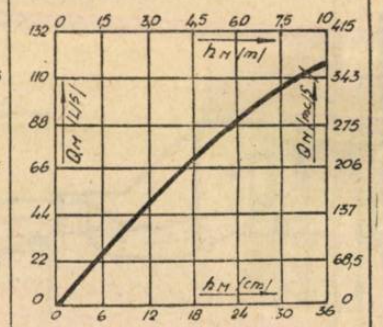
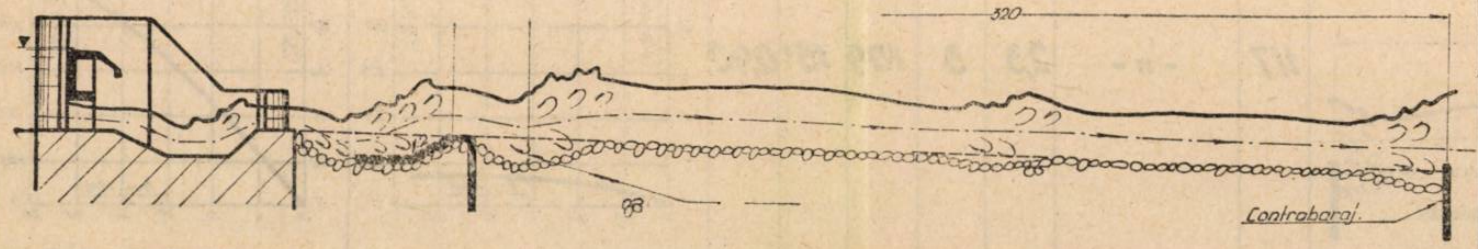
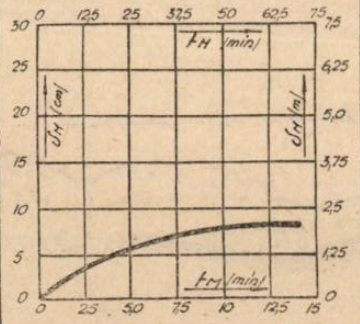
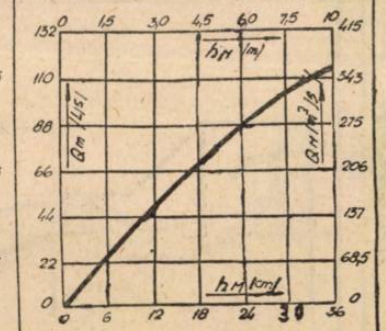
ÎNCERCĂRI DE LABORATOR PENTRU DETERMINAREA SOLUȚIEI HIDRAULICE OPTIME

Nr. crt.	TIPUL DISTRUGĂTORULUI DE ENERGIE ȘI SCHIȚA CONSTRUCȚIEI	Q (l/s)	Modul de evacuare al debitului	J (%)	S (cm)	L (cm)	t (min)	E	S = f(t)	Q = f(h)
21		100	-Ambele goliri de fund complet deschise. -Clapetele coborîte -Nivelul de retinere normal	2,3	8	115	15'	0733		
22		100	- » -	2,3	8	125	15'	0733		
23		100	- » -	2,3	19,5	125	15'	0366		
24		100	- » -	2,3	19,5	225	15	0350		

INCERCARI PENTRU DETERMINAREA SOLUTIEI HIDRAULICE OPTIME

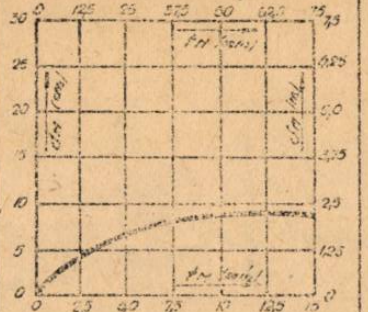
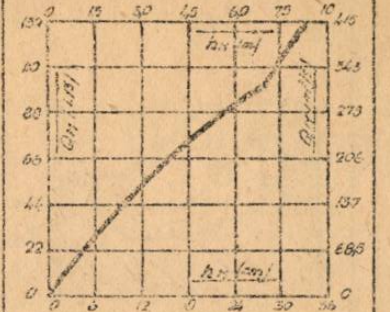
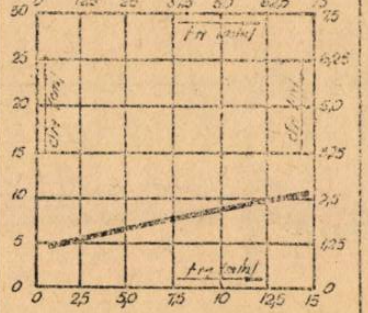
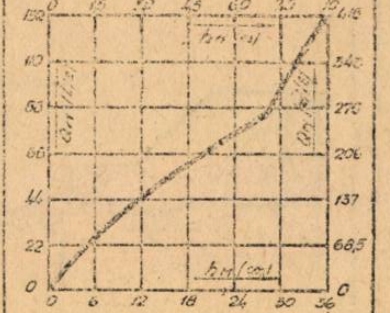
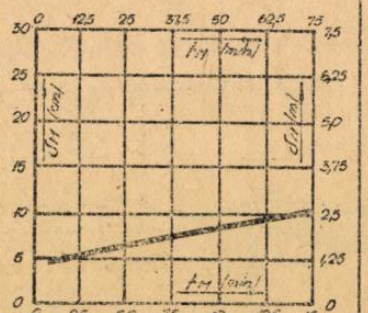
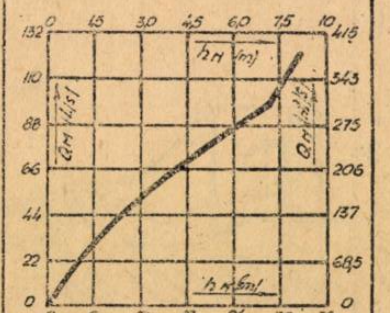
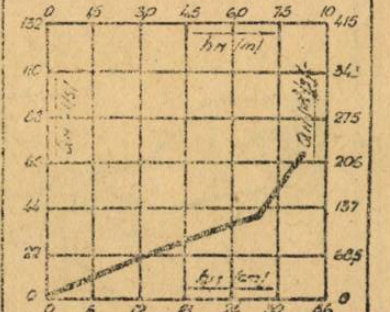
Nr.	TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q (L/S)	Modul de evacuare al debitului	J (%)	δ (cm)	L (cm)	t (min)	ε	δ = f(t)	Q = f(h)
25		117	-Ambele goliri de fund complet deschise. -Clapetele coborîte. -Nivelul de reţinere normal. -Variaţia continuă a debitului.	2,3	4	112	15'	0,867		
26		117	-Ambele goliri de fund complet deschise -Clapetele coborîte -Nivelul de reţinere normal	6	6	112	15'	0,80		
27		117	-"-	2,3	4,8	109	15'	0,84		
28		117	-"-	2,3	3	109	15'	0,90		

DETERMINAREA SOLUTIEI OPTIME ECONOMICE

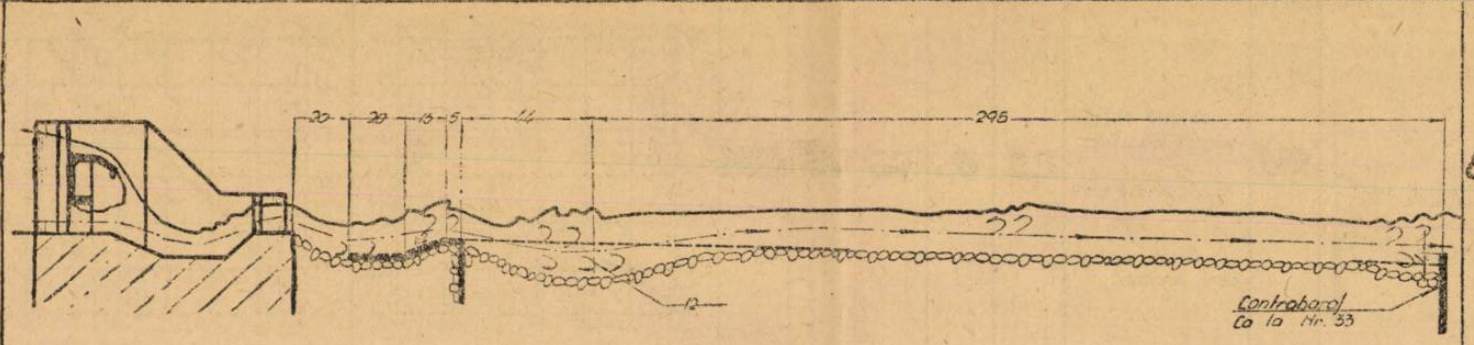
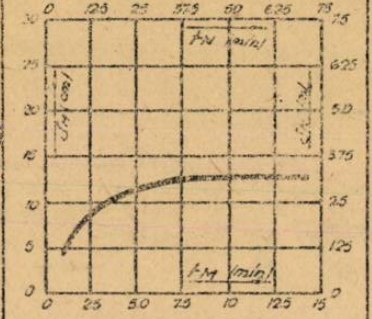
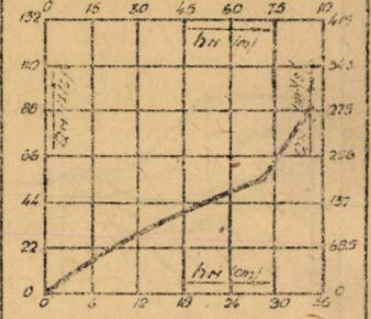
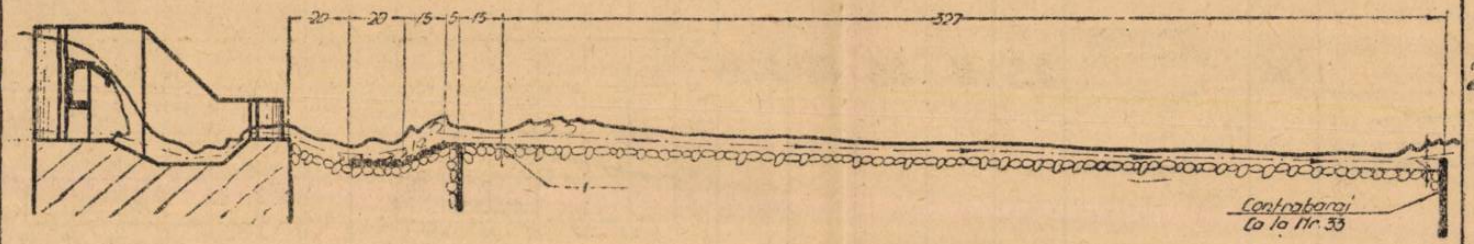
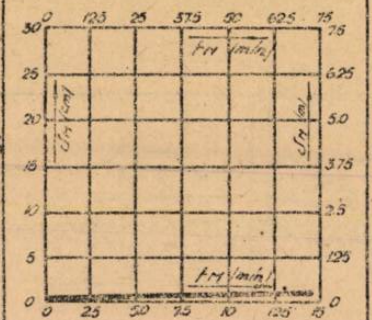
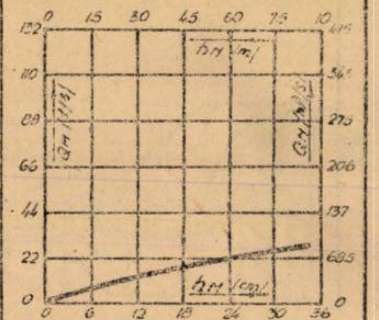
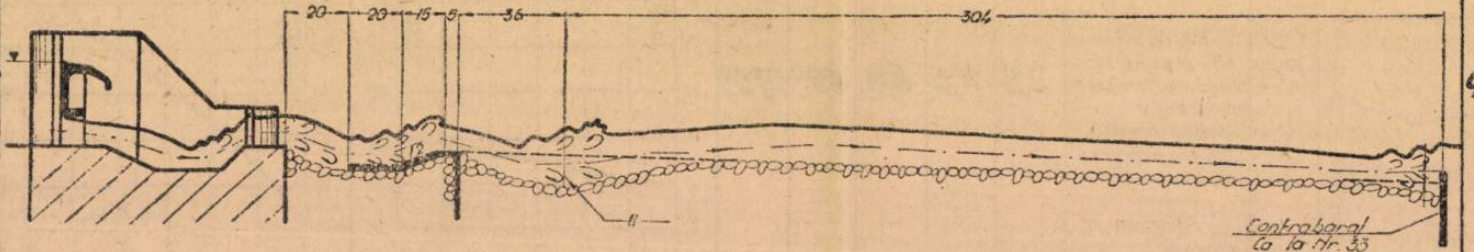
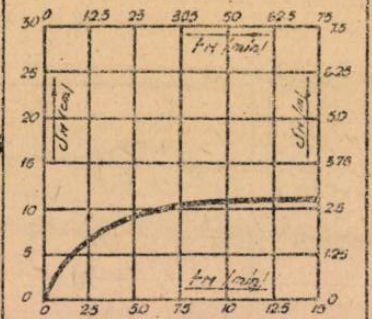
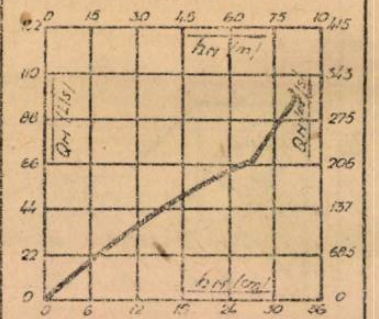
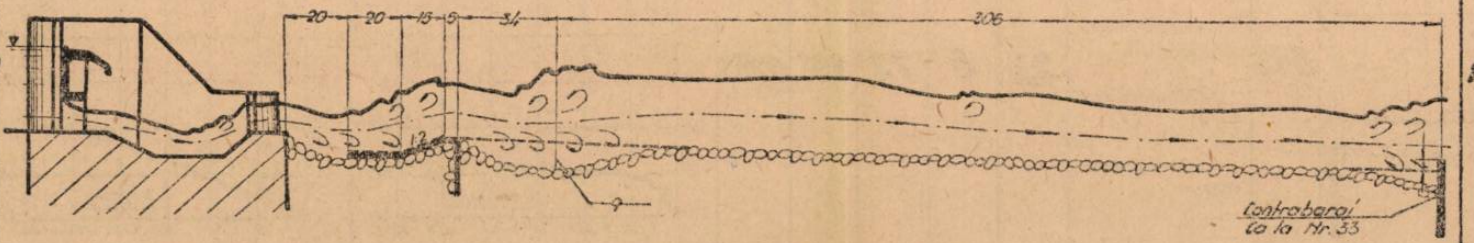
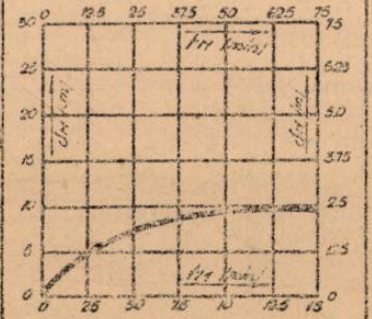
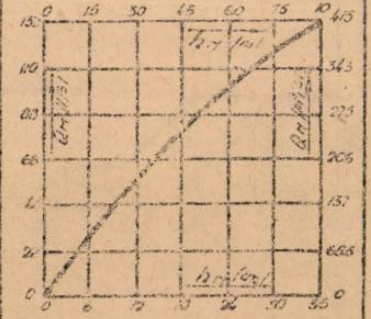
TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q (l/sec)	Modul de evacuare al debitului	J (%)	S (cm)	L (cm)	t (min)	E	S = f(t)	Q = f(t)
	117	-Ambele goliri de fund complet deschise -Clapetele cobarite -Nivelul de retinere normal	2,3	9	88	15'	0,70		
	117	-»-	2,3	8,5	88	15'	0,717		
	117	-»-	2,3	3	123	15'	0,90		
	117	-»-	2,3	8	80	15'	0,733		

STUDIUL COMPARATIV PENTRU DIVERSE MODURI DE EVACUARE A DEBITURILOR

TIPUL DISTRIBUITORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI

Nr. crt.	Q (l/s)	Modul de evacuare al debitului	J (%)	S (cm)	L (cm)	t (min)	E	J = f(t)	Q = f(h)
33	100	-Ambele stăvilare complet deschise. -Clapetele cobarîte. -Nivelul de reţinere normal	2,3	8	96	15'	0,733		
34	120	-Ambele stăvilare deschise 2/3 -Clapetele cobarîte. -Deversare de creastă	2,3	11	96	15'	0,733		
35	125	-Un stăvilar complet deschis, clapeta respectivă cobarîtă-celălalt deschis 2/3, clapeta cobarîtă -Deversare de creastă	2,3	11,5	88	15'	0,733		
36	825	-Ambele stăvilare deschise -Clapetele cobarîte -Deversare de creastă	2,3	5	72	15'	0,733		

STUDIUL EROSIUNII PENTRU DIVERSE MODURI DE EVACUARE A DEBITULUI

Nr. crt.	TIPUL DISTRUGATORULUI DE ENERGIE SI SCHITA CONSTRUCTIEI	Q (L/s)	Modul de evacuare al debitului	J (%)	J (cm)	L (cm)	t (min)	E	J = f (t)	Q = f (h)
37		83,5	-Un stăvilar complet deschis si clapeta respectivă coborîtă. Celălalt complet inchis si clapeta ridicată. -Nivelul de retinere maxim.	2,3	12	104	15'	0,733		
38		26,5	-Ambele stăvilare complet inchise -Clapetele coborîte -Deversare numai de creastă	2,3	1	73	15'	0,733		
39		97,5	-Un stăvilar complet deschis, celălalt deschis 1/3, -Clapetele coborîte. -Deversare de creastă	2,3	11	96	15'	0,733		
40		133	-Ambele stăvilare complet deschise. -Clapetele ridicate -Nivelul de retinere maxim	2,3	9	94	15'	0,733		

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ УСТАНОВОК ГАСИТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для определения наилучшего типа гасителя энергии в последовательной установке ниже другой, уже существующей на плотине, авторами были проведены опыты на модели масштаба 1/25.

Авторы нашли, что наилучшие результаты как с гидравлической, так и экономической точки зрения получаются при применении гасителей энергии трапецоидального типа.

Предложено введение понятия коэффициента полезного действия гасителя энергии.

Для нахождения гасителя энергии, дающего наилучшие результаты с экономической точки зрения, были произведены исследования размыва у основания плотины при восьми различных способах водоотвода.

При последовательном расположении двух гасителей энергии, наилучшие результаты получаются тогда, когда оба гасителя одинакового типа и когда общая длина их равна расчетнойд лине одного гасителя энергии, соответствующего тем же параметрам потока.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Модель. Продольное сечение.
Рис. 2. — Модель. Вид нижней части водослива.
Рис. 3. — Модель. Вид сбоку во время опыта.
Рис. 4. — Чертеж модели с двумя образовавшимися в нижней части водослива водоворотами.
Рис. 5. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 312$ м³/с.
Рис. 6. — Кривые уровня эрозии. $Q = 312$ м³/₅.
Рис. 7. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 376$ м³/с.
Рис. 8. — Кривые уровня эрозии . $Q = 375$ м³/₅.
Рис. 9. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 390$ м³/с.
Рис. 10. — Кривые уровня эрозии. $Q = 390$ м³/₅.
Рис. 11. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 217$ м³/с.
Рис. 12. — Кривые уровня эрозии. $Q = 217$ м³/₅.
Рис. 13. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 260$ м³/с.
Рис. 14. — Кривые уровня эрозии. $Q = 260$ м³/₅.
Рис. 15. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 82{,}8$ м³/с.
Рис. 16. — Кривые уровня эрозии. $Q = 82{,}8$ м³/₅.
Рис. 17. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 304$ м³/с.
Рис. 18. — Кривые уровня эрозии. $Q = 304$ м³/₅.
Рис. 19. — Профиль эрозии к концу опыта. $Q = 415$ м³/с.
Рис. 20. — Кривые уровня эрозии. $Q = 415$ м³/₅.

ÉTUDE SUR LES DISSIPATEURS D'ÉNERGIE EN CHAÎNE

(RÉSUMÉ)

Pour déterminer le dissipateur d'énergie optimum situé à l'extrémité aval d'un dissipateur déjà existant du barrage, on a effectué des essais sur un modèle réduit, à l'échelle 1/25.

Les Auteurs ont déterminé la solution optimum au point de vue hydraulique ainsi qu'une solution optimum au point de vue économique; celle-ci consiste en un dissipateur d'énergie du type trapézoïdal.

Ils ont introduit la notion de rendement du dissipateur d'énergie.

Pour le dissipateur représentant la solution optimum du point de vue économique, on a étudié l'affouillement au pied du barrage pour huit différents modes de fonctionnement.

Les essais qui ont porté sur les dissipateur d'énergie en chaîne permettent de tirer des conclusions sur la meilleure disposition de l'ouvrage, à savoir:

1. Les dissipateurs d'énergie (qui se suivent) doivent être du même type;
2. La somme de leurs longueurs doit être égale à la longueur résultant du calcul d'un seul dissipateurs, pour les mêmes données de l'écoulement.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Maquette. Section longitudinale.
Fig. 2. — Maquette. Vue aval.
Fig. 3. — Maquette. Vue de profil pendant une expérience.
Fig. 4. — Esquisse de la maquette et des deux tourbillons qui se forment en aval du barrage.
Fig. 5 — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience, $Q = 312$ m³/s.
Fig. 6. — Courbes de niveau de l'érosion. $Q = 312$ m³/s.
Fig. 7. — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience, $Q = 375$ m³/s.
Fig. 8. — Courbes de niveau de l'érosion, $Q = 375$ m³/s.
Fig. 9. — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience, $Q = 390$ m³/s.
Fig. 10. — Courbes de niveau de l'érosion, $Q = 390$ m³/s.
Fig. 11. — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience, $Q = 217$ m³/s.
Fig. 12. — Courbes de niveau de l'érosion, $Q = 217$ m³/s.
Fig. 13. — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience, $Q = 260$ m³/s.
Fig. 14. — Courbes de niveau de l'érosion, $Q = 260$ m³/s.
Fig. 15. — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience, $Q = 82{,}8$ m³/s.
Fig. 16. — Courbes de niveau de l'érosion, $Q = 82{,}8$ m³/s.
Fig. 17. — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience $Q = 304$ m³/s.
Fig. 18. — Courbes de niveau de l'érosion, $Q = 304$ m³/s.
Fig. 19. — Profil de l'érosion à la fin de l'expérience, $Q = 415$ m³/s.
Fig. 20. — Courbes de niveau de l'érosion, $Q = 415$ m³/s.

BIBLIOGRAFIE

1. F. I. Pikalov, Ghidrotehnika i melioraţia, 1952, nr. 10, p. 37—47.
2. I. I. Taraimovici, Ghidrotehniceskoe Stroitelstvo, 1951, nr. 1, p. 27—33.
3. C. Camichel et L. Escande, *L'étude des barrages-déversoirs au moyen de modèles réduits.* Publication du Journal « Le Génie civil », Paris, 1928, p. 5—10.
4. M. D. Certousov, *Speţialnîi kurs ghidravliki.* Gosudarstvennoe Energheticeskoe Izdatelstvo, Moscova—Leningrad, 1949, p, 180.
5. I. I. Agroskin. G. T. Dimitriev i F. I. Pikalov *Ghidraulika.* Gosudarstvennoe Energheticeskoe Izdatelstvo, Moscova—Leningrad. 1950, p. 298—326.
6. C. Camichel, L. Escande, *Études sur modèles réduits du barrage de Pizançon sur Isère.* Publication du Journal « Le Génie Civil », Paris, 1928, p. 5—8.
7. A. G. Cianişvili, Ghidrotehniceskoe stroitelstvo, 1951, nr. 4, p. 24—28.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

HIDROTEHNICĂ

STUDII ŞI ÎNCERCĂRI PE MODELE DE DESCĂRCĂTORI DE APE MARI

DE

D. DUMITRESCU şi P. GEORGESCU

INTRODUCERE

Determinarea dimensiunilor şi dispozitivelor constructive care să asigure, în condiţii date, funcţionarea optimă a descărcătorilor de ape mari ai unui baraj, constituie una din problemele dificile ce apar la proiectarea construcţiilor hidrotehnice. Aceasta se datoreşte, pe de o parte formelor particulare, debitelor mari ce trebuie evacuate de o amenajare de dimensiuni cît mai restrînse şi condiţiilor speciale de exploatare, iar pe de altă parte importanţei acestor lucrări pentru siguranţa generală a construcţiei considerate.

De aceea, pentru soluţionarea problemelor de acest gen, este necesar să se recurgă la încercări hidraulice pe modele reduse.

În această lucrare vor fi prezentate rezultatele cele mai caracteristice obţinute în studiul efectuat, în laboratorul hidrotehnic al Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R., pe modelele reduse ale unui deversor lateral şi ale unei goliri de fund, ce se construiesc la noi în ţară.

Prototipul deversorului lateral studiat a fost proiectat să evacueze un debit de $Q = 280$ m^3/s, la o lamă deversantă de înălţime $H = 2{,}30$ m. Deversorul, de profil Creager-Ofiţerov, are creasta lungă de 40 m. Înălţimea maximă admisibilă a lamei deversante este $H_{max} = 3$ m. Paralel cu deversorul se află canalul colector al cărui fund este lat de 6 m şi are panta longitudinală de 13 %. În continuare, după pragul de control hidraulic, este amenajat canalul de evacuare. Canalul de evacuare are secţiunea transversală trapezoidală, cu fundul lat de 6 m, este lung de 64 m şi are o pantă de 5 %. Pe porţiunea finală, canalul de evacuare este curbat spre stînga, are o pantă transversală de 2 % şi este prevăzut cu doi pereţi intermediari de ghidaj, paraleli cu axa canalului. Fundul canalului de evacuare se racordează cu terenul printr-o curbă în plan vertical.

Golirea de fund a fost proiectată să evacueze, la o sarcină de apă $H = 57$ m, un debit de aproximativ 50 m^3/s. Galeria, escavată în stîncă, este betonată numai pe porţiunea finală, lungă de 30 m. Pe primii 22 m secţiunea este circulară, de diametru $D = 2{,}80$ m, iar pe ultimii 8 m galeria îşi modifică forma alcătuind o danaidă,

cu secţiunea aval o elipsă cu axele $2a = 6$ m şi $2b = 0{,}63$ m. Suprafaţa interioară a danaidei este riglată. La ieşirea din galerie a fost proiectat un postradier, lung de 4 m, înclinat faţă de orizontală cu un unghi $\theta = 8°$ şi pe care s-au prevăzut patru dinţi deflectori.

Pentru ambii descărcători s-au studiat formele optime pentru scurgere, capacitatea de evacuare şi mijloacele cele mai eficace pentru îndepărtarea de baraj a eroziunilor albiei din aval.

DEVERSORUL LATERAL

Realizarea modelului şi instalaţia de încercări. Forţele care determină mişcările lichidelor grele cu suprafaţă liberă sînt forţele de greutate şi cele de viscozitate. Pentru a realiza similitudinea completă a mişcării de pe model cu cea de pe prototip ar trebui ca numerele Froude şi Reynolds de pe model să fie egale cu cele de pe prototip. Dar, după cum se ştie, în mod practic nu este posibil ca aceste două condiţii să fie satisfăcute simultan. Ţinînd seama de faptul că forţele de greutate sînt cele ce predomină, vom impune pentru model acelaşi număr Froude ca pe prototip. În ceea ce priveşte forţele de viscozitate, vom adopta o similitudine Reynolds aproximativă, limitîndu-ne la a asigura pe model un regim al pierderilor prin frecare asemănător cu cel din natură.

Scara geometrică a modelului s-a dedus din aceste două condiţii. Astfel notînd o viteză şi o lungime caracteristică a scurgerii cu v, respectiv l, prima condiţie este exprimată prin relaţia

$$\frac{v_M^2}{g_M\, l_M} = \frac{v_N^2}{g_N\, l_N},$$

unde indicele M se referă la model, iar N la prototip.

Deoarece pe prototip regimul pierderilor prin frecare este cel al rezistenţelor patratice, referindu-ne la diagrama lui A. P. Zegjda [1] *), condiţia a doua este practic îndeplinită dacă pe model se realizează

$$Re_M = \frac{v_M\, l_M}{\nu_M} \geqslant 30\,000.$$

Notînd raportul lungimilor $\frac{l_N}{l_M} = \lambda$, ţinînd seama de faptul că viscozitatea cinematică a apei $\nu_M \approx 0{,}01$ cm²/s şi admiţînd $g_M = g_N$, aceste relaţii se pot reduce la inegalitatea

$$\lambda \leqslant \sqrt[3]{\frac{v_N^2\, l_N^2}{90\,000}}.$$

Alegînd ca lungime şi viteză caracteristică înălţimea lamei deversante ce evacuează debitul de calcul, $H_N = 2{,}30$ m, respectiv viteza medie corespunzătoare, rezultă

$$\lambda \leqslant 39.$$

S-a adoptat scara geometrică $\lambda = 30$. Pentru această scară similitudinea aproximativă a forţelor de viscozitate este asigurată pentru lame deversante

*) p. 90.

$H_M \geqslant 6$ cm şi, după cum apare din literatură [2] *), coeficientul de debit al modelului va diferi de cel al prototipului cu 1,5...2%. Deci, aplicînd legea Reech-Froude, rezultatele de pe model vor putea fi folosite cu o precizie suficientă şi pentru prototip.

În funcţie de scara aleasă, înălţimea maximă a lamei deversante de pe model a fost $H_M = 10$ cm, iar debitele necesare experimentării au fost de ordinul $Q_M = 60$ l/s.

Pentru a asigura aceleaşi condiţii de scurgere ca pe prototip, pe model a fost reprodusă o suprafaţă din bazinul de retenţie de aproape 3 200 m².

Fig. 1. — Macheta profilului deversant, canalului colector şi canalului de evacuare.

Astfel macheta a ocupat o suprafaţă de aproximativ 8 m² (2×4 m).

Deversorul lateral (fig. 1) şi relieful din amonte au fost executate din mortar de ciment, armat cu o plasă de sîrmă. Pereţii de ghidare de la capătul aval al canalului de fugă au fost executaţi din tablă. Precizia de execuţie a machetei a fost de 0,3 mm.

Pentru realizarea similitudinii rugozităţii betonului din natură cu cea a modelului profilului deversant şi canalelor de colectare şi de evacuare, suprafaţa în contact cu apa a acestora a fost acoperită cu un strat de parafină.

*) p. 70.

Instalaţia de încercare funcţionează în circuit închis şi este deservită de o pompă centrifugă cu următoarele caracteristici: $Q = 240$ l/s şi $H = 30$ m. Pompa debitează în liniştitorul canalului vitrat, apoi apa este condusă în canalul de întoarcere şi de aici, după ce este trecută peste machetă, revine în bazinul de alimentare al pompei (fig. 2).

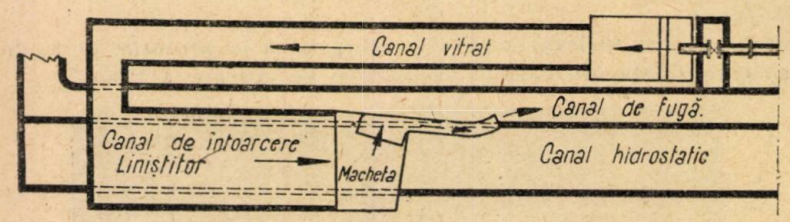


Fig. 2. — Schiţa instalaţiei de încercare.

Debitul de apă folosit a fost măsurat cu un debitmetru cu diafragmă, montat pe conducta de refulare a pompei. Precizia de măsură este de $\pm 1\%$. Nivelele apei au fost măsurate cu limnimetre cu ac şi cu micromanometre tip Askania, adaptate pentru măsurători cu apă; precizia citirilor a fost de 1:10 mm. Pentru măsurarea presiunilor s-au folosit tuburi piezometrice simple. Vitezele s-au măsurat cu tuburi Pitot, cu diametrul exterior $\varnothing = 4$ mm; eroarea de măsură a fost sub 2%.

ÎNCERCĂRILE EFECTUATE

Studiul scurgerii în canalul colector şi canalul de evacuare. Scurgerea din canalul colector şi canalul de evacuare are un caracter complex, care se dezvoltă odată cu creşterea debitului deversat. Astfel, la debite mici ($Q_M < 20$ l/s), curentul vacuat, deşi torenţial, păstrează un aspect regulat, tulburat numai de obstru-

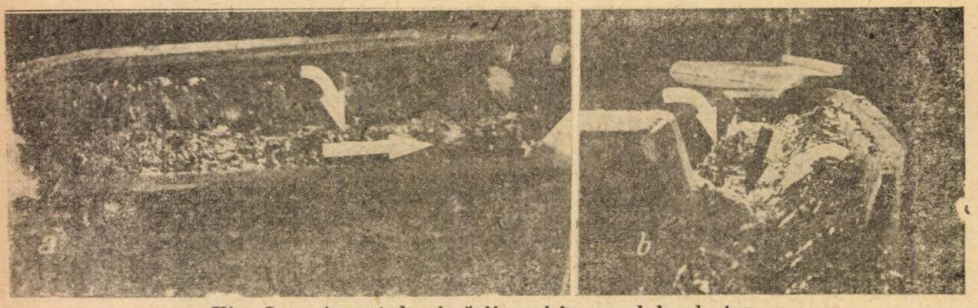


Fig. 3. — Aspectul mişcării apei în canalul colector,
a) vedere în plan; *b)* vedere din aval.

area secţiunii prin pragul de control hidraulic şi de rare unde transversale ce apar în canalul de evacuare.

Dacă debitul este mărit ($Q_M > 25$ l/s), energia curentului creşte şi lama de apă, după deversare, are tendinţa să se ridice pe paramentul stîng al colectorului. Astfel, de-a lungul canalului colector se formează un rulou de apă în interiorul căruia, datorită scurgerii în sens longitudinal, mişcarea este elicoidală. Ruloul apare mai întîi în partea din aval a canalului colector, unde energia cinetică a curentului este maximă. La debite de ordinul $Q_M = 50$ l/s, mişcarea elicoidală se extinde pe toată lungimea canalului colector (fig. 3).

Pe măsură ce ruloul se dezvoltă, unele fire de lichid, după ce au ieşit ascendent pe lîngă paramentul canalului colector, se desprind din rulou şi alimentează un curent longitudinal, care curge în «albia» delimitată la dreapta şi la fund de lama deversantă, iar la stînga de rulou (fig. 4).

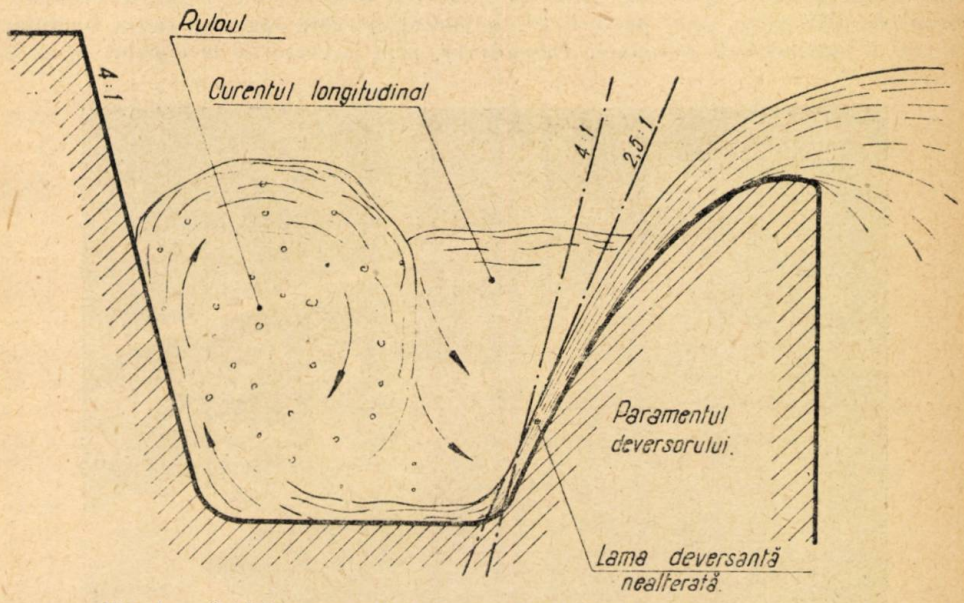


Fig. 4. — Schiţă reprezentînd mişcarea apei într-o secţiune transversală a canalului colector.

Deci, aşa după cum se remarcă din figurile 3 şi 4, pentru această situaţie, într-o secţiune transversală a canalului colector se suprapun trei mişcări deosebite:

— mişcarea apei din lama deversantă;

— mişcarea de rulou;

— curentul longitudinal.

Dacă debitul deversat depăşeşte $Q_M = 57$ l/s (corespunzător debitului de calcul al prototipului), scurgerea, păstrîndu-şi totuşi caracterele generale descrise mai sus, devine instabilă. Ruloul se îngustează, curentul longitudinal devine mai larg, iar în partea din amonte a canalului colector apare periodic, la intervale neregulate (cuprinse între 20″ şi 2′), o buclă de salt ondulator, care se deplasează înspre aval cu o viteză aproximativ egală cu cea a curentului longitudinal (fig 5).

Apariţia acestui fenomen periodic este determinată de oscilaţii ale nivelului apei din canalul colector. Astfel, pentru debitul indicat, nivelul apei din canalul colector depăşeşte creasta deversorului: deversorul funcţionează înnecat, debitul deversat se micşorează şi debitul evacuat de canalul colector devine mai mare decît cel deversat. Deci, în porţiunea din amonte, nivelul apei din canalul colector va scădea. În consecinţă, pe această porţiune se reduce înnecarea lamei deversante şi se creează condiţiile în care apare saltul ondulator. Dar scăzînd înnecarea lamei deversante, debitul deversat creşte din nou, deci şi nivelul apei din canalul colector creşte, astfel realizîndu-se periodicitatea fenomenului. Sub această formă, fenomentul periodic se menţine pînă la debite de ordinul $Q_M = 61$ l/s. Pentru debitele mai mari, scăderea nivelului nu mai este posibilă decît în mod accidental,

în golul vreunei unde longitudinale ce apare în canalul colector. În acest caz bucla de salt ondulator este mai atenuată.

Scurgerea în canalul de evacuare are un caracter nestabil. Aceasta se datoreşte, pe de o parte, faptului că pe traseul canalului de evacuare nu mai există deversarea şi astfel echilibrul atins de scurgerea în canalul colector se distruge, iar pe de altă parte, unor perturbaţii ale curentului care apar din cauza fundului îngust al canalului de evacuare. Într-adevăr, prin trecerea de la canalul colector

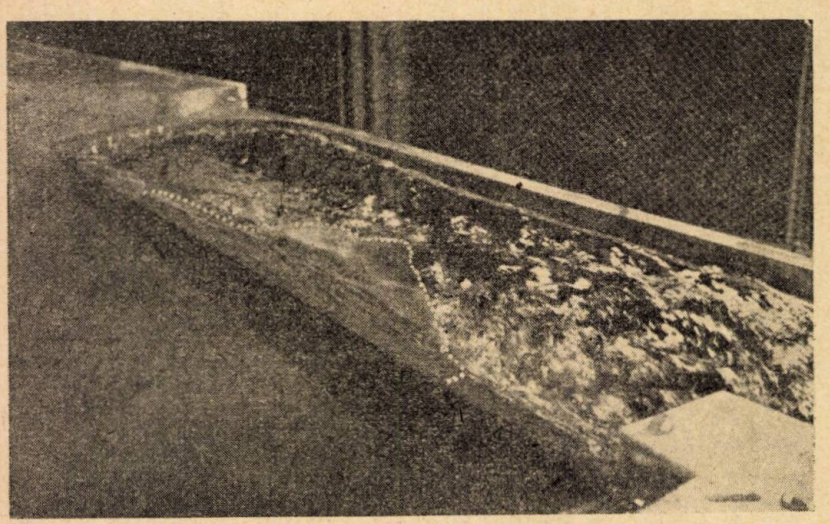


Fig. 5. — Bucla de salt ondulator ce apare periodic în canalul colector.

la canalul de evacuare, secţiunea transversală a scurgerii se micşorează şi axa generală a mişcării se deplasează spre stînga; astfel curentul se curbează către stînga şi imediat în aval de pragul de control hidraulic, lîngă peretele stîng al canalului de evacuare, se produce o concentrare a curentului. Deoarece scurgerea are un pronunţat caracter torenţial, pentru debitele mari numărul Froude depăşind chiar valoarea $Fr = 8$, din acest punct de perturbaţie pornesc unde transversale care, prin reflecţie, se propagă în aval pe toată lungimea canalului de evacuare.

Ca urmare a acestei stări a scurgerii, curba de la capătul aval al canalului de evacuare nu asigură devierea spre stînga a curentului de apă.

Studiul formei capătului aval al canalului de evacuare. Curba de la capătul aval al canalului de evacuare a fost proiectată pentru a devia curentul de apă către stînga, ca astfel apa să se scurgă pe versantul văii, să se distrugă cea mai mare parte din energia curentului şi să se reducă posibilitatea de erodare a albiei. Pentru a realiza o deviere de ordinul a 45° faţă de axa canalului colector, forma capătului aval al canalului de evacuare a trebuit să fie schimbată. În prealabil însă, pe machetă s-au făcut o serie de modificări care să îmbunătăţească scurgerea: *a)* fundul canalului de evacuare a fost lărgit pînă la $b_M = 21{,}33$ cm; *b)* în porţiunea de racordare dintre cele două canale, înclinarea peretelui drept al canalului de evacuare a fost redusă de la 1:4 la 1:2,5, panta medie a suprafeţei lamei deversante corespunzătoare debitului de calcul (fig. 4 şi 6); *c)* s-a adoptat un fund plan şi pe porţiunea finală a canalului de evacuare, deoarece pe porţiunea curbă prin care fundul canalului de evacuare se racorda cu terenul se produceau dezlipiri

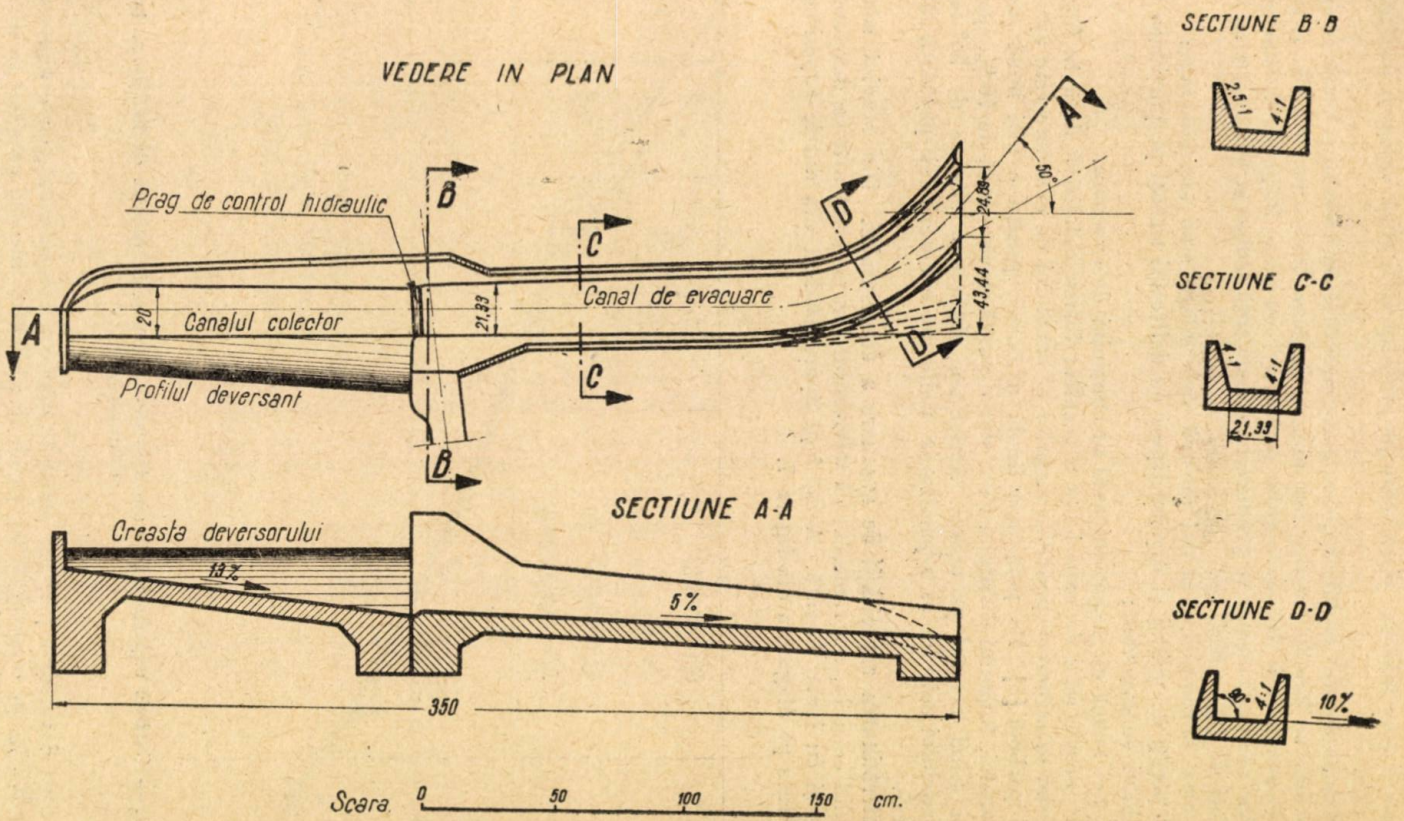


Fig. 6.— Forma finală a canalului de evacuare. Liniile punctate indică forma inițială.

ale venei şi s-au măsurat viteze care pe prototip ar fi atins valoarea neadmisibilă de 15 m/s.

În urma acestor modificări, trecerea curentului din canalul colector în canalul de evacuare se face în condiţii mai bune, scurgerea devine mai stabilă şi capacitatea de evacuare a descărcătorului se măreşte cu peste 30%, iar fenomenul periodic din canalul colector se produce cu o frecvenţă redusă şi numai pentru debite mai mari de $Q_M = 67{,}3$ l/s.

Pentru devierea curentului de apă spre stînga s-au experimentat:

a) pereţi de ghidaj şi diverse tipuri de deflectori situaţi pe porţiunea finală a canalului de evacuare;

b) noi forme ale capătului aval al canalului de evacuare.

Din aceste serii de experienţe a rezultat forma definitivă dată în figura 6.

Curba directoare a peretelui exterior al canalului de evacuare este apropiată de o hiperbolă [3]. Pe porţiunea finală a curbei, pentru o mai bună dirijare a curentului, fundului canalului i s-a dat o pantă transversală de 10 %, peretele exterior fiind normal pe acesta. Astfel s-a obţinut o deviere de 50° faţă de axul canalului colector şi repartizarea uniformă a curentului pe toată lăţimea canalului.

Determinarea capacităţii de evacuare a deversorului. Din studiul scurgerii în canalul colector, s-a remarcat că deversorul funcţionează atît ca deversor perfect cît şi cu lama înecată. Acest fapt apare evident din datele experimentale înregistrate pe diagrama din figura 7.

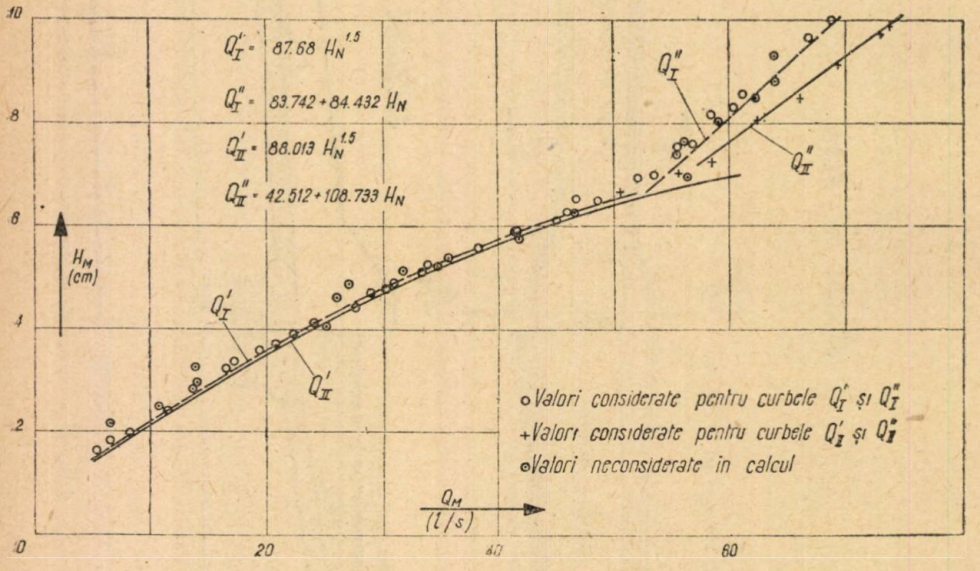


Fig. 7. — Curbele experimentale ale debitului evacuat, în funcţie de înălţimea lamei deversante.

Pentru deversarea perfectă punctele diagramei se situează, cu o abatere mai mică de 3,2 %, pe o curbă de tip parabolic; în cazul înecării punctele se situează, cu o abatere mai mică de 1,3%, pe o dreaptă. Deci, în cazul înecării, funcţionarea deversorului este foarte apropiată de cea a unui deversor proporţional.

Datele înregistrate pe diagrama din figura 7 corespund deversării în situaţia iniţială (Q'_I şi Q''_I) şi celei după modificările menţionate mai sus (Q'_{II} şi Q''_{II}); se remarcă în acest caz creşterea debitului maxim evacuat.

Luînd în consideraţie vitezele de acces ale apei la deversor, s-au calculat valorile coeficienţilor de debit m. Datele obţinute coincid cu datele din literatură [1] *). Pentru deversarea perfectă, m variază între $m = 0{,}4723 \ldots 0{,}4937$, iar pentru lama înecată între $m = 0{,}4816 \ldots 0{,}3569$.

Debitele obţinute în cazul funcţionării înecate au fost confruntate cu cele calculate cu ajutorul datelor indicate de A. S. Ofiţerov şi V. S. Istomina [1] **) şi N. N. Pavlovski [4] ***) pentru coeficienţii de debit ai deversoarelor înecate. Ţinînd seama de faptul că înecarea în aval a lamei deversante variază liniar, împărţind lungimea crestei deversorului în mai multe sectoare de calcul egale, pentru care înecarea relativă este admisă ca fiind constantă şi egală cu cea de la mijlocul sectorului, debitul total poate fi dedus din expresia

$$Q = \frac{l}{n} m \sqrt{2g} H^{1,5} \Sigma \sigma_i$$

unde s-a notat cu l, lungimea crestei deversorului; n numărul sectoarelor de calcul; m, coeficientul de debit al deversorului; H, înălţimea lamei deversante; σ_i coeficientul de înecare corespunzător fiecărei porţiuni de calcul.

Notînd

$$\frac{\Sigma \sigma_i}{n} = \sigma^*,$$

se poate scrie

$$\sigma^* = \frac{Q''}{Q'},$$

unde Q'' este debitul evacuat în ipoteza lamei înecate în aval, iar Q' este debitul evacuat pentru aceeaşi lamă de apă în ipoteza deversării perfecte.

Tabloul nr. 1

Nr. crt.	H_m	Înecarea relativă		λH_M	Q''	Q'	$\sigma^* = \frac{Q''}{Q'}$
		Amonte	Aval				
	cm			m	m³/s	m³/s	
1	8,19	0,817	0,415	2,457	290,74	337,20	0,860
2	8,90	0,887	0,607	2,670	314,91	383,00	0,822
3	9,71	0,865	0,660	2,913	328,74	436,00	0,754
4	10,02	0,890	0,690	3,006	338,88	458,00	0,740
5	9,16	0,862	0,316	2,748	342,29	402,00	0,862
6	9,75	0,882	0,420	2,925	359,41	440,00	0,817
7	10,00	0,890	0,490	3,000	371,05	457,00	0,810

În tabloul nr. 1 sînt trecute datele care au servit la întocmirea tabloului nr. 2 şi a diagramei din figura 8, pe care sînt trasate valorile σ^* rezultate din calcul şi

*) p. 290.
**) p. 296.
***) p. 154.

din măsurătorile efectuate. Primele patru valori (σ_I^*) corespund formei iniţiale a deversorului lateral, iar ultimele (σ_{II}^*) formei finale. Pentru a înlesni compararea datelor obţinute în laborator cu cele din literatură, pe diagrama din figura 8 au fost trasate curbele $\sigma^* = f(\lambda H_M)$.

Tabloul nr. 2

Nr. crt	λH_M	σ^*	Valorile σ^* calculate		Δ_{max} %
			Ofiţerov	Pavlovski	
	m				
1	2,457	0,860	0,893	0,864	3,83
2	2,670	0,822	0,813	0,782	4,88
3	2,913	0,754	0,737	0,787	4,38
4	3,006	0,740	0,766	0,750	3,51
5	2,748	0,862	0,867	0,835	3,13
6	2,925	0,817	0,842	0,805	3,06
7	3,000	0,810	0,825	0,787	2,84

Pentru evitarea cumulării erorilor ce ar rezulta din calculul coeficienţilor de debit *m*, debitele Q' şi Q'' considerate pentru calculul valorilor σ^* au fost deter-

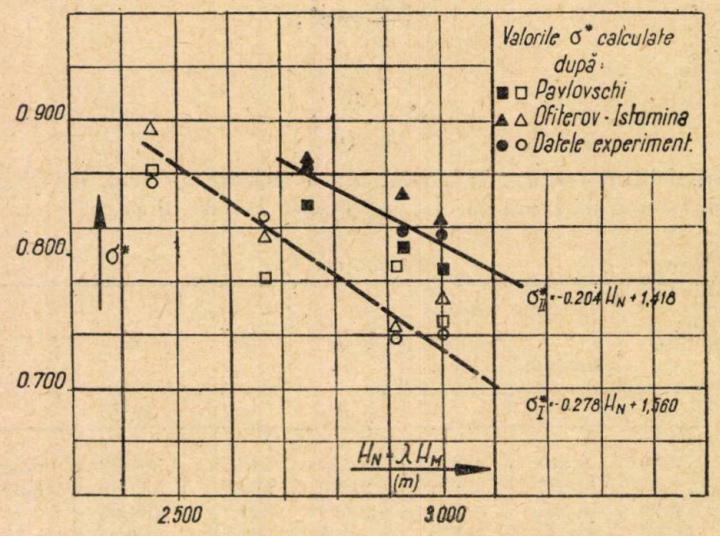


Fig. 8. — Diagramă comparativă pentru valorile coeficientului.

minate cu formulele de pe diagrama din figura 7, rezultate din prelucrarea datelor experimentale.

Atît din tabloul nr. 2, cît şi de pe diagrama din figura 8, se remarcă o diferenţă mică între datele indicate în literatură şi cele obţinute în aceste experienţe.

Deci, ţinînd seama de caracterul înecării în aval, coeficienţii de debit pentru deversorii înecaţi uniform pot fi folosiţi şi la calculul debitelor evacuate de astfel de descărcători.

CONCLUZII

În urma studiului efectuat rezultă următoarele concluzii:

1. Scurgerea în canalul colector este caracterizată de suprapunerea a trei mişcări diferite care se produc izolat sau simultan, într-o ordine determinată de debitul deversat.

2. Datorită înecării în aval a lamei deversante, la debite apropiate de debitul de calcul al prototipului, în canalul colector apare periodic o buclă de salt ondulator. Acest fenomen poate fi atenuat prin realizarea unei bune racordări între canalul colector şi cel de evacuare.

3. Scurgerea în canalul de evacuare este condiţionată de scurgerea în canalul colector şi de racordarea dintre cele două canale. Din încercările efectuate a rezultat că forma racordării trebuie să urmărească din aproape forma lamei deversante.

4. Din studiile pentru determinarea capacităţii de evacuare a deversorului, a rezultat că valorile coeficienţilor de debit pentru deversorii înecaţi uniform în aval, pot fi utilizaţi şi pentru deversorii cu lama înecată neuniform, cu condiţia să se ţină seama de caracterul înecării.

GOLIREA DE FUND

Realizarea modelului. Problema principală în legătură cu galeria de golire a fost determinarea debitului evacuat. Pentru aceasta, a trebuit stabilit coeficientul de debit al danaidei, celelalte elemente ale scurgerii fiind cunoscute. De aceea, pe model s-a reprodus din galeria de golire numai porţiunea de la capătul aval, care include danaida.

Scurgerea pe prototip atingînd numere Reynolds $Re \approx 5{,}5 \times 10^6$, forţele de viscozitate sînt neglijabile faţă de cele de greutate. Similitudinea este deci redată de legea Reech-Froude.

În literatură, se recomandă ca scara geometrică să nu fie mai mică de $1/\lambda = 1/50$ [5], sau [2] *) scara să fie astfel aleasă încît pentru domeniul de expriementare să se asigure

$$vb \geqslant 100,$$

unde v este viteza medie a apei pe model, iar b este dimensiunea minimă a secţiunii, ambele date în cm/s, respectiv în cm. S-a adoptat scara geometrică $\lambda = 30$, valoare pentru care ambele condiţii sînt satisfăcute.

Corespunzător, sarcinile de apă necesare încercărilor au fost $H_M < 1{,}70$ m, iar debitele de ordinul $Q_M = 18$ l/s.

Macheta a ocupat o suprafaţă de aproape 6 m^2 (4 × 1,50 m) şi a fost situată tot la capătul aval al canalului de întoarcere (fig. 2). Modelul a reprodus danaida şi porţiunea de galerie betonată (fig. 9), în pereţii căreia, din 20 în 20 cm, au fost practicate prize de presiune. În continuare, după ieşirea din danaidă a fost modelat postradierul cu dinţii deflectori.

În aval de golire, pe model s-a reprodus relieful rîului pe o lungime de 85 m. Modelarea galeriei şi relieful albiei rîului s-a făcut cu mortar de ciment, iar postradierul şi dinţii deflectori s-au executat din lemn. Precizia de execuţie a machetei a fost de 0,3 mm.

S-a folosit instalaţia de încercări şi aparatele de măsură descrise mai sus. Deoarece debitele necesare încercărilor au fost mici, pentru verificarea datelor indicate de debitmetru, în aval de machetă s-a instalat un deversor triunghiular de tip Thompson.

*) p. 80.

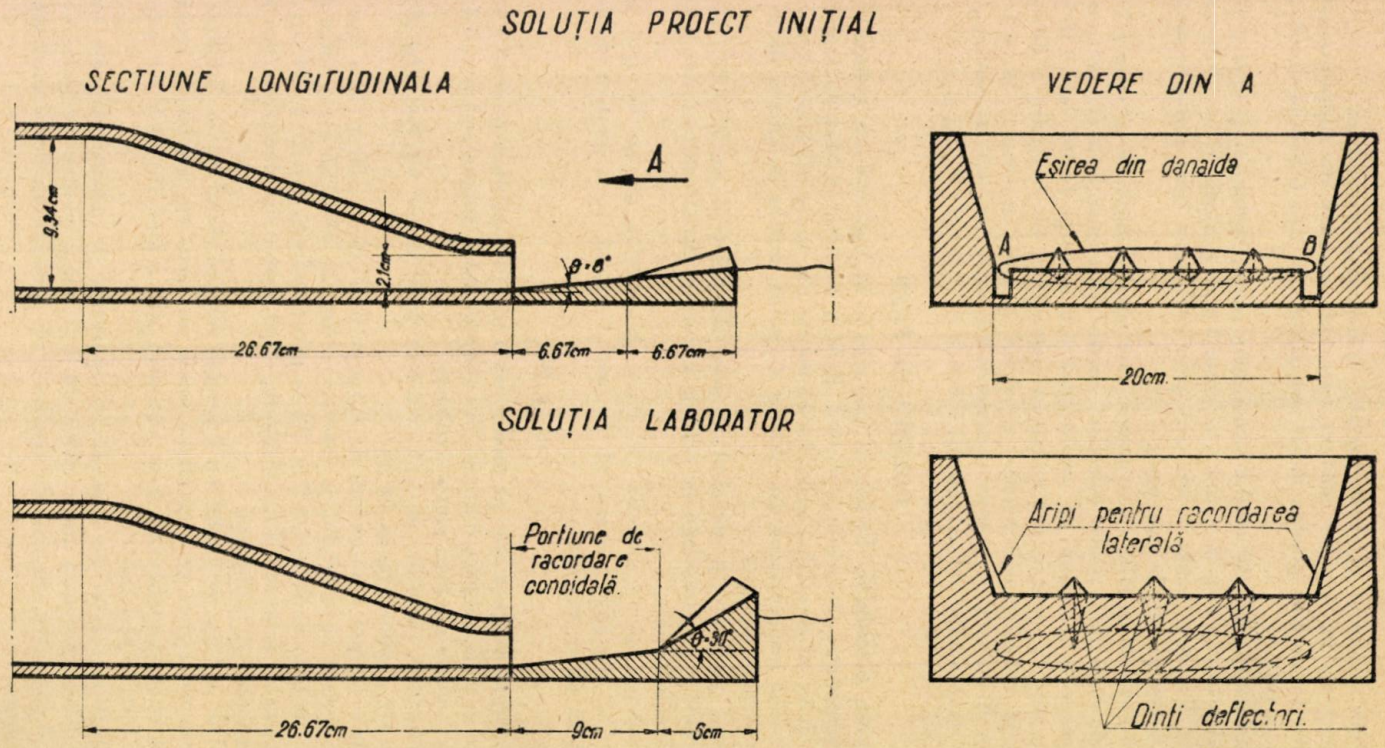


Fig. 9. — Schița machetei danaidei, postradierului și dinților deflectori.

ÎNCERCĂRILE EFECTUATE

Determinarea debitului evacuat. Măsurînd sarcinile de apă, debitele evacuate şi presiunile corespunzătoare în dreptul secţiunii de intrare în danaidă, coeficientul de rezistenţă al danaidei se deduce din relaţia

$$\zeta = \frac{2gH^*}{v_e^2} - 1,$$

unde H^* reprezintă energia totală a curentului în secţiunea de intrare în danaidă, iar v_e viteza de ieşire din danaidă. În mod analog, coeficientul de debit φ al danaidei se obţine din relaţia

$$\varphi = \frac{v_e}{\sqrt{2gH^*}}.$$

Valorile H^*, v_e, ζ şi φ sînt date în tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

Nr. crt.	H^*	v_e	ζ	φ
	cm	cm/s	—	—
1	26,90	2,083	0,2164	0,9112
2	38,84	2,500	0,2193	0,9056
3	53,45	2,917	0,2325	0,9007
4	68,90	3,333	0,2166	0,9065
5	88,22	3,750	0,2308	0,9013
6	109,40	4,167	0,2361	0,8994
7	131,43	4,583	0,2277	0,9025
8	143,24	4,833	0,2032	0,9118

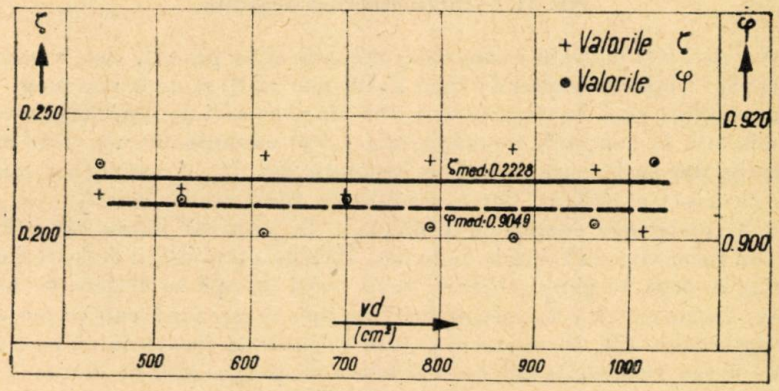


Fig. 10. — Diagramele valorilor experimentale ale coeficienţilor ζ şi φ.

Pe diagrama din figura 10 sînt înregistrate valorile ζ şi φ în funcţie de $v_e b$. S-au admis valorile medii

$$\zeta_{med} = 0,2211 \quad \text{şi} \quad \varphi_{med} = 0,9049.$$

Valoarea obţinută pentru coeficientul $\zeta_{med} = 0,2211$ diferă puţin de $\zeta = 0,255$, valoare obţinută folosind formula pentru pierderea de sarcină la o îngustare bruscă a curentului [4] *).

*) p. 96.

În funcţie de valorile determinate pentru coeficienţii ζ_{med} şi φ_{med}, debitul maxim evacuat de prototip va fi $Q_M \approx 78$ m³/s.

Determinarea formei optime a radierului şi a dinţilor deflectori. Deoarece golirea debuşează lîngă piciorul barajului, postradierul şi dinţii deflectori trebuie să spargă vena de apă şi s-o arunce la o distanţă cît mai mare, pentru a evita eroziunile imediat în aval de baraj S-a constatat însă că sub forma propusă dinţii deflectori şi postradierului nu corespund scopului urmărit. Anume, deoarece nu sînt suficient de înalţi şi panta postradierului este prea mică, dinţii deflectori nu fracţionează vena şi nu se realizează efectul de trambulină dorit. Din această cauză, la vitezele mari din natură ($v_{max} \approx 25$ m/s) pe dinţii deflectori vor apare cavitaţii şi eroziunile se vor produce imediat în aval de postradier. De asemenea, s-a remarcat că vena de apă aderă pe taluzele de beton ale canalului de la ieşire şi că scurgerea este influenţată defavorabil şi de rigolele A şi B ale postradierului (fig. 9).

Pentru îmbunătăţirea scurgerii, s-a renunţat la aceste rigole, iar ieşirea din danaidă a fost racordată cu radierul printr-o suprafaţă conoidală. În ceea ce priveşte dinţii deflectori, s-au încercat tipurile reprezentate în figura 11.

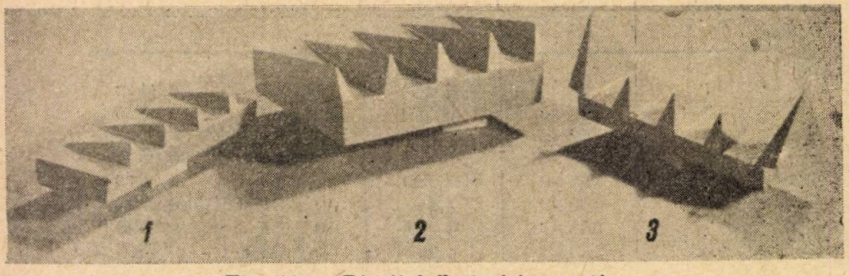


Fig. 11. — Dinţii-deflectori încercaţi.

Tipul 1 de dinţi deflectori este chiar cel indicat în proiect, care a rezultat ca fiind prea mic. Dinţii deflectori de tipul 2 sînt mai înalţi şi mult mai lungi. Pentru a se evita aderarea apei de taluzele de beton ale canalului de ieşire şi pentru simetrizarea mişcării, la marginile postradierului a fost adăugat cîte un dinte deflector de acelaşi tip, dar cu lăţimea redusă la jumătate (fig. 11). Acest tip s-a comportat mai bine decît cel precedent, dar a rezultat ca fiind neeconomic.

Tipul 3 corespunde condiţiilor problemei. Se remarcă forma robustă a dinţilor şi genul racordării cu taluzele de beton. Întrebuinţînd dinţii deflectori de acest tip, imediat în aval de gura golirii de fund vena de apă se desface şi formează patru vene distincte, care la sarcini mari de apă se prezintă sub forma a patru lame verticale (fig. 12). De asemenea, prin racordările făcute între postradier şi taluzele de beton vena de lichid nu mai aderă de paramentul de beton.

Mărind panta postradierului pînă la $1:\sqrt{3}$ ($\theta = 30°$) s-a obţinut o aerare deplină şi permanentă a celor patru vene de lichid şi a porţiunii din aval a dinţilor deflectori, înlăturîndu-se astfel pericolul de cavitaţie şi vibraţii şi obţinîndu-se un pronunţat efect de trambulină.

În această situaţie, la o sarcină de apă $H_M = 152$ cm, s-a obţinut un jet cu bătaia lungă de $L_M = 260$ cm, cu o săgeată de 60 cm şi cu o răspîndire pe o suprafaţă de aproximativ 0,2 m².

Pentru transpunerea pe prototip, datele referitoare la dimensiunile jetului de apă de pe model trebuie interpretate însă cu prudenţă. Aceasta se datoreşte faptului că, faţă de model, pe prototip fenomenul este influenţat de factori supli-

mentari. Astfel, datorită vitezelor mari, pe prototip vena de apă se emulsionează cu aerul şi chiar se pulverizează, pe cînd pe model vena se menţine. Deci, între datele de pe model şi cele de pe prototip nu se poate face decît o apropiere cali-

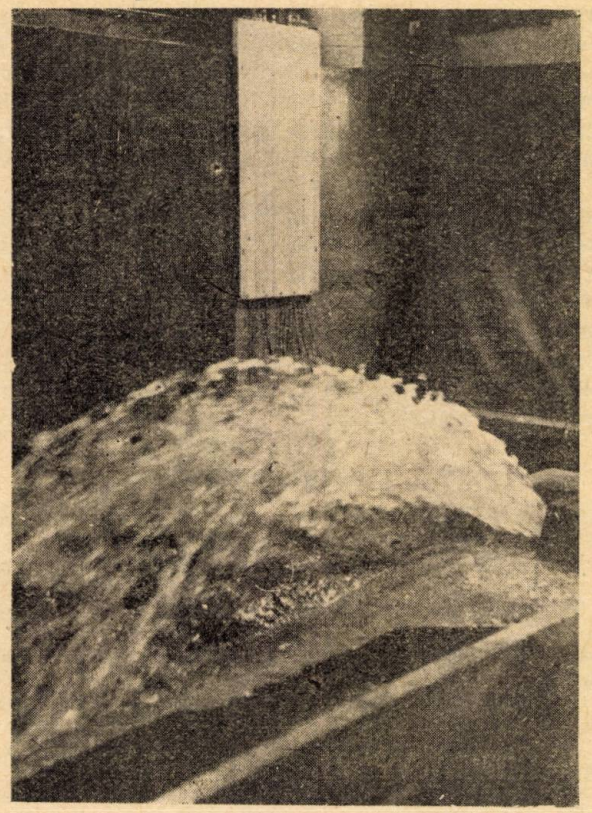


Fig. 12. — Scurgerea pe model în aval de danaidă.

tativă [6]. În orice caz, este de aşteptat că eroziunea va fi îndepărtată de piciorul aval al barajului şi, datorită consumului mare de energie în procesul de emulsionare al venei de apă cu aerul, va fi redusă.

CONCLUZII

Pentru galeria de golire studiată, se pot trage următoarele concluzii:

1. Din cauza trecerii rapide de la secţiunea circulară la o secţiune eliptică aplatisată, pierderile de sarcină din danaidă sînt apreciabile şi comparabile cu cele ce apar la o îngustare bruscă a secţiunii curentului.

2. Prin încercări în care s-a urmărit ca apa evacuată să fie aruncată la o distanţă cît mai mare de baraj, s-a determinat forma dinţilor deflectori şi panta postradierului. Deşi datele de pe model nu au decît un caracter calitativ, totuşi este de aşteptat ca eroziunile de pe prototip să fie reduse şi să se producă la distanţe care să nu pericliteze siguranţa barajului.

ИССЛЕДОВАНИЕ И ИСПЫТАНИЕ МОДЕЛЕЙ УСТРОЙСТВ ДЛЯ СТОКА ВОД С ВЫСОКИМ УРОВНЕМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении авторы представляют результаты исследования уменьшенных моделей устройств для стока вод с высоким уровнем, бокового водослива и данного водоспуска, строящихся в РНР.

Описывается водосток, механизм периодического явления, возникающего в водосборном канале бокового водослива, и меры, принимаемые против образования слишком больших эрозий ниже бокового водослива.

Экспериментальные данные показали, что значения коэффициентов дебита равномерно затопленных в нижней части водосливов могут быть применяемы и к водосливам с неравномерным затоплением.

В рассматриваемом случае нижний конец водоспускной штольни имеет вид нормальной насадки, коэффициент дебита которой определен авторами. Исследовались также водобойные стенки и продолжение нижней речной постели водоспуска с целью отвода воды на возможно большее расстояние от плотины.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Макет профиля водослива, водосборного и выпускного каналов.
Рис. 2. — Чертеж испытательной установки.
Рис. 3. — Движение воды в водосточном канале: *a* — вид в плоскости; *b* — вид снизу.
Рис. 4. — Чертеж, представляющий движение воды в поперечном разрезе водосборного канала.
Рис. 5. — Петля волнообразного взбрасывания, периодически появляющегося в водосборном канале.
Рис. 6. — Окончательная форма выпускного канала. Пунктирная линия указывает первоначальную форму.
Рис. 7. — Экспериментальные кривые выпускного дебита в зависимости от высоты водяного слоя на водосливе.
Рис. 8. — Сравнительная диаграмма значений коэффициента δ.
Рис. 9. — Чертеж макета нормальной насадки водоспускной штольни, нижней речной постели и водобойных зубцов.
Рис. 10. — Диаграммы экспериментальных значений коэффициентов ξ и φ
Рис. 11. — Водобойные зубцы, подвергнутые испытанию.
Рис. 12. — Сток на модели ниже нормальной насадки.

ÉTUDES ET ESSAIS SUR DES MODÈLES D'OUVRAGES D'ÉVACUATION DES CRUES

(RÉSUMÉ)

On expose dans cet ouvrage les résultats d'une étude effectuée sur des modèles réduits d'ouvrages d'évacuation des crues, composés d'un déversoir latéral et d'une galerie d'évacuation, que l'on construit dans la République Populaire Roumaine.

On décrit l'écoulement, le mécanisme d'un phénomène périodique qui apparaît dans le canal collecteur du déversoir latéral et les mesures prises pour éviter de trop grandes érosions qui pourraient avoir lieu en aval du déversoir latéral.

Les données expérimentales obtenues ont montré que les valeurs des coefficients de débit pour les déversoirs uniformément immergés en aval, peuvent également être utilisées pour les déversoirs à lame non uniformément immergée, à condition de tenir compte du caractère de l'immersion.

Dans le cas étudié, l'extrémité aval de la galerie d'évacuation a la forme d'une danaïde. On en a déterminé le coefficient de débit. On a également étudié les déflecteurs et le post-radier en aval de la danaïde, de manière à ce que l'eau évacuée puisse être envoyée à un maximum de distance du barrage.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Maquette du profil de déversement du canal collecteur et du canal d'évacuation.

Fig. 2. — Esquisse de l'installation d'essai.

Fig. 3. — L'aspect du mouvement de l'eau dans le canal collecteur; *a)* section plane; *b)* vue de l'aval.

Fig. 4. — Esquisse représentant le mouvement de l'eau dans une section transversale du canal collecteur.

Fig. 5. — La boucle du saut ondulatoire apparaissant périodiquement dans le canal collecteur.

Fig. 6. — Forme finale du canal d'évacuation. Les pointillés indiquent la forme initiale.

Fig. 7. — Courbes expérimentales du débit évacué en fonction de la hauteur de la lame déversante.

Fig. 8. — Diagramme comparatif des valeurs du coefficient.

Fig. 9. — Esquisse de la maquette de la danaïde, du postradier et des dents-déflecteurs.

Fig. 10.— Diagramme des valeurs expérimentales des coefficients ξ et φ.

Fig. 11.— Dents-déflecteurs mis à l'épreuve.

Fig. 12.— L'écoulement sur le modèle en aval de la danaïde.

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Agroskin, G. T. Dimitriev, F. I. Pikalov, *Ghidravlica.* Gosenergoizdat, Moscova, 1950.
2. J. Allen, *Scale models in hydraulic engineering.* Longmans-Glascow, 1947.
3. N. E. Kondratev, Izvestia, VNIIG, 1940, vol. 26. p. 132.
4. P. G. Kiselev, *Indreptar pentru calcule hidraulice.* Editura energetică, București, 1953.
5. C. Camichel, L. Escande, *Similitude hydrodynamique et technique des modèles réduits.* Gauthier-Villars, Paris, 1938, p. 204—230.
6. S. V. Izbaș, *Osnovi laboratorno opitnogo delov ghidrotehnike.* ONTI—Moscova, 1938, p. 48.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr, 3—4, 1954

HIDROTEHNICĂ

CONTRIBUŢII LA METODA CERCETĂRII CONSTRUCŢIILOR HIDROTEHNICE CU AJUTORUL AERULUI

DE

M. KAHAN

Esenţa metodei constă în considerarea scurgerilor cu suprafaţă liberă drept scurgeri sub presiune. Ea presupune modelarea construcţiilor hidrotehnice la o scară foarte mică (pînă la 1/1000—1/2500); materializarea suprafeţei libere a apei cu ajutorul unui cristal şi reproducerea fenomenelor hidraulice cu ajutorul unui curent de aer care se lansează între model şi cristal.

Această metodă s-a impus ca o consecinţă a necesităţii de a lucra cu modele la scară redusă, care să permită o evaluare rapidă a fenomenelor hidraulice.

Limita micşorării scării de modelare în cercetarea construcţiilor hidrotehnice o constituie însă păstrarea regimului turbulent. La modelarea în scurgere cu suprafaţă liberă, respectarea criteriului lui Froude conduce, pe măsura micşorării scării, la viteze din ce în ce mai mici. În aceste condiţii, păstrarea regimului turbulent desigur că limitează scara de modelare.

La modelarea cu aer însă, în scurgerea sub presiune păstrarea regimului turbulent poate fi asigurată chiar la scări de modelare foarte mici printr-o mărire corespunzătoare a vitezei, astfel încît să se păstreze numărul Re mai mare decît valoarea lui critică.

1. CERCETĂRI SOVIETICE ÎN INIŢIEREA ŞI DEZVOLTAREA METODEI

Metoda cercetării construcţiilor hidrotehnice cu ajutorul aerului a fost propusă de către A. G. Averkiev în cadrul Institutului unional din Leningrad VNIIG în anul 1950.

Justificarea teoretică a metodei constă în similitudinea dintre mişcarea lichidelor şi a gazelor. Lucrări în această privinţă sînt foarte multe. Se pot aminti experienţele mai vechi ale lui T. E. Stanton şi S. R. Pannell, care dovedesc perfect similitudinea de scurgere sub presiune dintre aer şi apă. Lucrările din ultimul timp, ale lui A. G. Averkiev confirmă din nou această similitudine aplicată în cazul concret al metodei de faţă. Similitudinea scurgerii fiind valabilă desigur în limitele vitezelor care nu conduc la compresiunea gazelor — adică pînă la viteze de 50—100 m/s, viteză care nu este însă atinsă la modelarea construcţiilor hidrotehnice cu ajutorul aerului.

Justificarea practică a metodei constă în succesele obţinute încă de multă vreme în tehnica modelării instalaţiilor hidraulice şi cele obţinute în ultimul timp de către E. V. Kudriavţev în modelarea sistemelor de ventilaţie cu ajutorul metodelor hidrodinamice.

În acelaşi timp însă, fără îndoială că cea mai sigură justificare practică a acestei metode o poate constitui verificarea rezultatelor obţinute în încercarea construcţiilor hidrotehnice înseşi. În această direcţie au şi fost făcute primele cercetări în cadrul Institutului VNIIG din Leningrad şi s-a acumulat un bogat material asupra încercărilor aceloraşi construcţii hidrotehnice modelate cu apă şi cu aer la scări deosebite (acest material a fost publicat în [1]).

Concluziile care au fost trase pe baza acestui material arată că:

a) Metoda se poate aplica cu rezultate bune în cazul problemelor care prin natura lor, permit cunoaşterea anticipată şi cu destulă exactitate a suprafeţei libere.

b) Metoda permite aprecieri rapide a fenomenelor hidraulice şi conduce la o îngrădire destul de clară a parametrilor principali de scurgere.

c) Pentru o serie de probleme de scurgere cu suprafaţă liberă plană, rezultatele ce se obţin, pot fi, şi azi sînt folosite direct în proiectare. Astfel de probleme apar la : studiul regularizării cursurilor de apă; batardourilor fazelor de lucru la construcţiile hidrotehnice; prizelor de apă fluviale; racordării canalelor, cursurilor de apă şi altele.

d) Pentru o serie de probleme, la care suprafaţa liberă a apei poate fi cunoscută anticipat, dar nu este plană (de exemplu racordarea biefurilor), se poate adopta, fie modelarea suprafeţei libere în două plane diferite, fie schimbarea corespunzătoare a cotelor fundului albiei sau la scări foarte mici şi diferenţe mici între biefuri, se poate neglija complet variaţia suprafeţei libere. La astfel de probleme, metoda poate da numai rezultate preliminare care servesc modelării cu apă.

Justificarea economică a metodei rezultă în primul rînd din reducerea substanţială a suprafeţei de modelare (de 100...500 ori) faţă de încercările cu apă şi a tuturor cheltuielilor legate de aceasta. Desigur că, din punct de vedere economic, este important, în special, reducerea timpului de modelare şi de experimentare: important atît pentru încercări dar mai ales pentru ritmul de proiectare. În acelaşi timp, metoda cere o instalaţie foarte simplă şi ieftină, iar condiţiile generale de lucru sînt comode şi uşoare.

Metoda a fost aplicată de către VNIIG în anul 1952, în cercetarea pe model, a uneia dintre marile probleme hidrotehnice din ţara noastră.

II. CONTRIBUŢII ÎN DEZVOLTAREA METODEI

Pe baza lucrărilor publicate de către A. G. Averkiev şi a experienţelor de la laboratoarele VNIIG şi Institutul politehnic din Leningrad, ale prof. I. I. Levi, s-a construit în laboratoarele I.M.A. instalaţia necesară pentru cercetarea modelelor hidrotehnice cu ajutorul aerului.

Instalaţia cuprinde un sistem de ventilaţii de 5 kW, dispozitive pentru diverse vizualizări, canale de studiu, tuburi Pitot de construcţie specială şi altele. După natura fenomenului studiat, instalaţia poate fi adaptată, fie pentru curenţi de aspiraţie, fie pentru curenţi de refulare. După cum reiese din cele de mai sus, instalaţia necesară nu este pretenţioasă.

Pentru perioada în care urmează să punem metoda la punct, primele modele confecţionate pentru verificarea rezultatelor, au fost ale unor scheme hidrotehnice

ce urmează a fi studiate cu apă în laboratoarele I.M.A. Deoarece încercările cu apă nu sînt încă terminate, rezultatele comparative se vor da ulterior. În cadrul prezentei comunicări vom da numai cîteva ilustrații calitative ale cercetărilor.

1. Un nou mijloc de vizualizare

Pentru studierea fenomenelor hidraulice cu ajutorul aerului, s-a întrebuințat pînă astăzi vizualizarea cu fum și fire de mătase. În cadrul încercărilor efectuate, ne-am propus să urmărim fenomenele de scurgere și pe baza spălărilor fundului albiei acoperit cu un strat fin de nisip. Metoda a dat rezultate bune. Curenții de aer cu viteze mai mari decît viteza de antrenare a nisipului, spală nisipul marcînd astfel clar zonele în care apar viteze mai mari decît viteza de antrenare a nisipului întrebuințat. În figura 1 se ilustrează spălările ce au avut loc pentru a treia deschidere curentă a barajului pentru viteze maxime variind de la 5...22 m/s. Prin această metodă se indică direcția curentului principal și în același timp curbel izotahe, deoarece limita zonei de spălare este o curbă de egală viteză, și anume viteza de antrenare a particulelor de nisip. Raportînd această viteză la viteza maximă realizată în axul deschiderii, se pot constitui curbele izotahe ale scurgerii.

Cu ajutorul acestei metode s-au studiat următoarele probleme:
— eficacitatea spălărilor în amonte
— zona afuierilor în aval
— influența diverselor elemente de construcție asupra scurgerii
— influența conlucrării dintre deschideri
— și altele.

Pe baza acestor studii s-au putut trage concluzii asupra:
a) amplasării prizei studiate;
b) necesității modificării unor elemente de construcții;
c) eficacității golirilor de fund;
d) manevrării vanelor barajului.

2. Studii teoretico-experimentale ale metodei

Toate aceste studii completate cu vizualizarea cu fum și fire de mătase pentru curenții secundari (care nu sînt scoși în evidență prin metoda de mai sus) și diversele măsurători de viteză, presiune etc., pot constitui o metodă bună de cercetare a construcțiilor hidrotehnice.

Pentru atingerea acestui scop trebuie realizat studiul teoretic și experimental al metodei. Acest studiu urmează să stabilească în ce măsură încercarea cu aer reproduce fenomenele din natură, cum poate fi îmbunătățită această reproducere și care sînt condițiile pe contur care trebuie asigurate; în același timp să stabilească parametrii principali de similitudine.

În cadrul studiului pe care l-am început, au fost atacate următoarele probleme:

a) Influența modificării condițiilor pe contur asupra scurgerii (prin limitarea suprafeței libere de scurgere),

b) Studiul pierderilor de sarcină în canale închise și

c) Studiul modelării aluviunilor în canale închise.

a) **Influența limitării suprafeței libere,** este elementul principal care deosebește scurgerea pe model de scurgerea în natură. Ea a fost studiată în funcție de variația numărului Re, de înălțimea curentului și de rugozitatea suprafeței inferioare a machetei.

Problema a fost studiată pe baza scurgerii curentului în plan orizontal pentru schema amintită mai sus şi pe baza variaţiei pe verticală a epurei vitezelor.

În ceea ce priveşte scurgerea curentului în plan orizontal, s-au urmărit curenţii principali pentru diverse manevrări ale clapetelor barajului şi variaţii ale numărului Re de la simplu la 4...5 ori (variaţia numărului Re făcîndu-se pentru H constant şi viteze variabile). În toate aceste cazuri nu s-a observat nici o schimbare în direcţia curenţilor principali. Un exemplu îl constituie spălările înregistrate pentru deschiderea a treia cu variaţii ale numărului Re de la 3 000...12 000 şi ale vitezei maxime în deschidere de la 6...22 m/s. În toate aceste cazuri se observă că axul spălărilor succesive s-a menţinut acelaşi (fig. 1).

Variaţia pe verticală a epurei vitezelor în funcţie de numărul Re a fost studiată în două canale de 5 şi 11 cm înălţime şi pentru valori ale numărului Re de la 12 500...52 500. Rezultatele obţinute (fig. 2) arată că influenţa variaţiei numărului Re este neglijabilă. Abaterea epurei vitezelor de la epura medie fiind de circa 2...4 %.

Experienţele efectuate confirmă deci faptul că de la anumite valori ale numărului Re în sus, variaţia acestuia nu mai aduce modificări sensibile în scurgerea fluidelor.

S-a făcut acelaşi studiu al epurei vitezelor pentru Re constant, rugozitate constantă şi H (înălţimea curentului) egal cu 2,5 şi 11 cm. Din figura 3, în care se redau epurele vitezelor pentru cele trei cazuri, se poate constata că micşorarea înălţimii curentului de aer apropie epura vitezelor obţinută în laborator de epura vitezelor obţinută în natură. Avînd în vedere că, în general, epurele care sînt date în literatură, sînt foarte numeroase, dar ca alură diferă foarte puţin una de alta, am considerat ca epură de referinţă, epura vitezelor pe verticală într-un rîu, din lucrarea lui E. M. Minski [2].

Acest lucru (influenţa înălţimii curentului asupra epurei vitezelor) se explică prin faptul că efectul de frînare pe cristal este o frînare pe o suprafaţă perfect netedă, iar efectul de frînare pe suprafaţa machetei este o frînare pe suprafaţa rugoasă, efect care se măreşte odată cu mărirea raportului $\frac{\Delta}{H}$, ceea ce se şi întîmplă la o micşorare a înălţimii curentului (H).

În ceea ce priveşte studiul limitării suprafeţei libere în funcţie de rugozitate, a fost făcut într-un canal de 11 cm înălţime şi cu raportul

$$\frac{\Delta}{H} = \frac{1}{35}; \frac{1}{45}; \frac{1}{55}; \frac{1}{75}; \frac{1}{90}; \frac{1}{110}; \frac{1}{145}; \frac{1}{220};$$

Rezultatele ilustrate în figura 4 arată că şi în acest caz, epura vitezelor este puţin influenţată de rugozitate — variaţiile fiind de 4...5 %. Se observă însă că într-o măsură oarecare, mărirea rugozităţii fundului măreşte frînarea vitezelor la fund şi o micşorează pe cea de la suprafaţă.

Din cele de mai sus rezultă:

1. Existenţa unui fenomen de frînare a vitezelor la suprafaţa curentului în cazul limitării suprafeţei libere, frînare care nu există în natură decît în cazul curenţilor transversali, care, în cadrul experienţelor efectuate, nu au avut loc.

2. Acest fenomen de frînare schimbă epura vitezelor pe o înălţime de circa 0,25 H de la suprafaţa curentului păstrînd însă alura epurei variaţiei vitezelor ca şi în cazul scurgerilor din natură în partea centrală şi la fund. Tocmai acest fenomen explică similitudinea scurgerii din natură şi modelarea cu aer, verificată de experienţele lui A. G. Averkiev pe construcţii hidrotehnice.

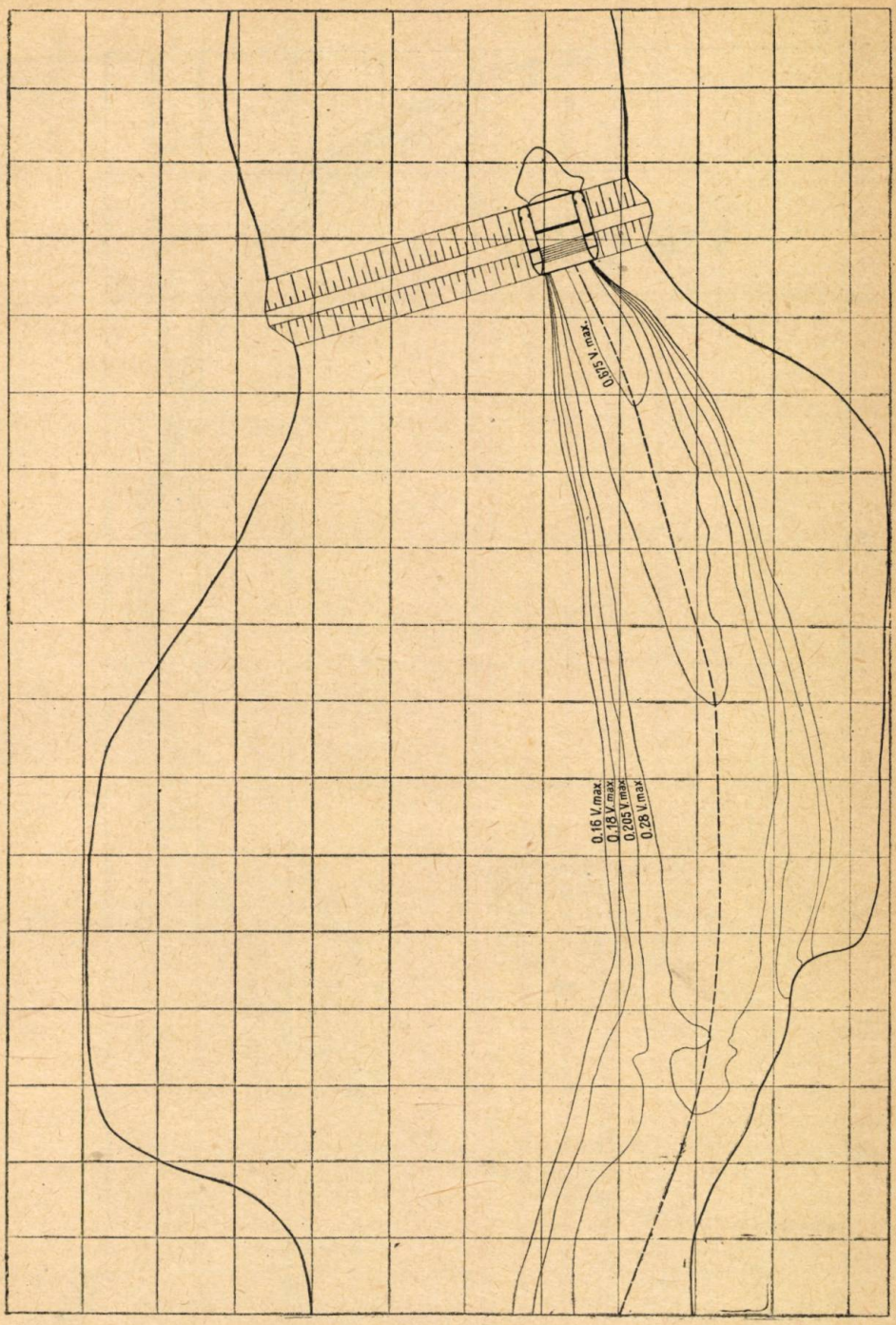


Fig. 1

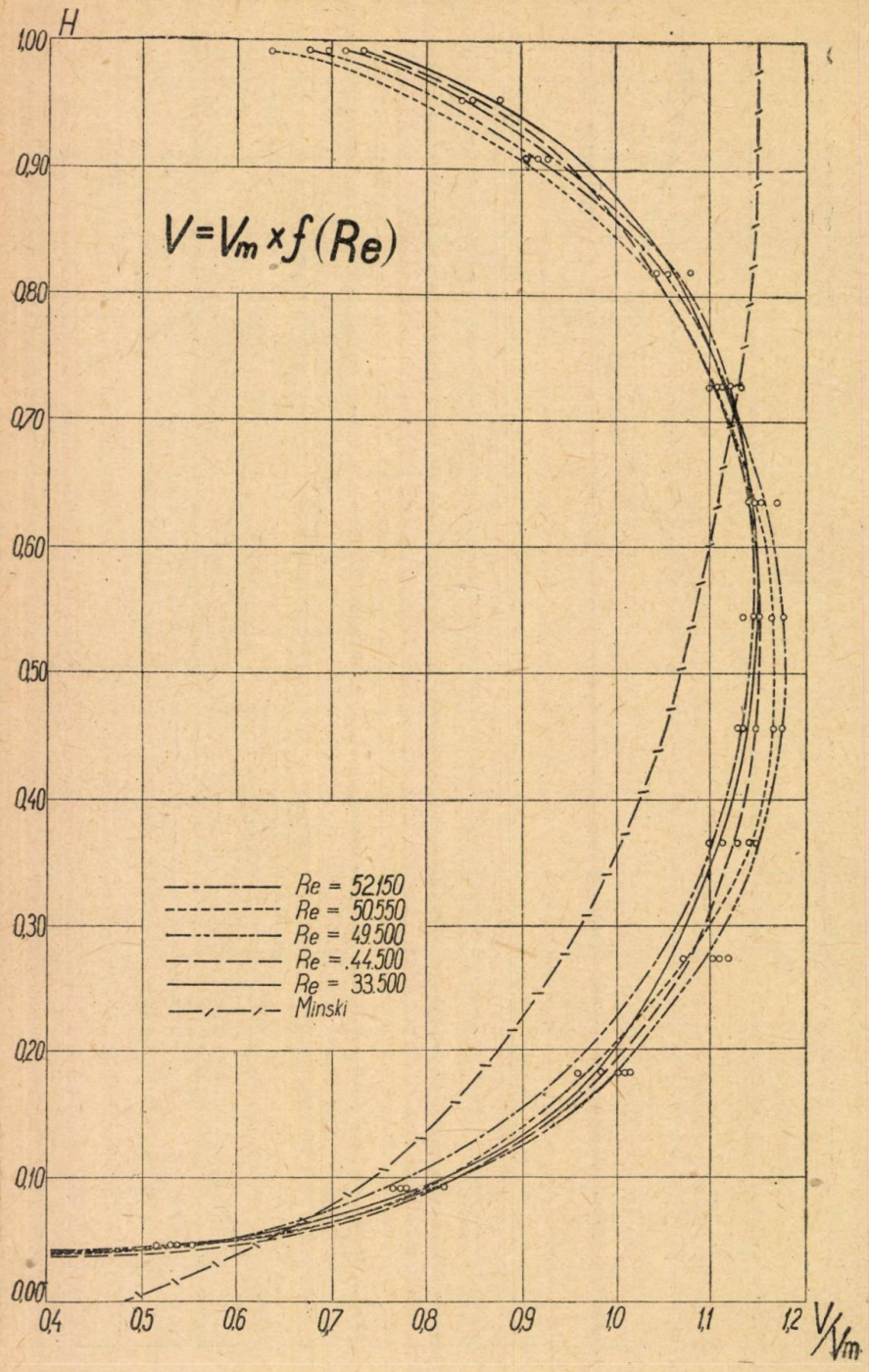

H
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
V=Vm x f(Re)
Re = 52.150
Re = 50.550
Re = 49.500
Re = 44.500
Re = 33.500
Minski
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
V/Vm

Fig. 2

3. Influența variației numărului Re asupra scurgerii fiind insensibilă, se poate reduce valoarea lui în special prin micșorarea scării (adîncimii curentului) favorabil atît din punct de vedere economic cît și din punct de vedere al variației epurei vitezelor pe verticală.

4. În cazul în care nu se urmărește o problemă a pierderilor de sarcină și se urmărește o reproducere cît mai bună a epurei vitezelor din natură, se poate obține aceasta prin mărirea raportului $\frac{\Delta}{H}$.

b) **Studiul pierderilor de sarcină în canale închise.** Reducerea scării și deci a numărului Re este limitată însă de păstrarea regimului turbulent de automo-

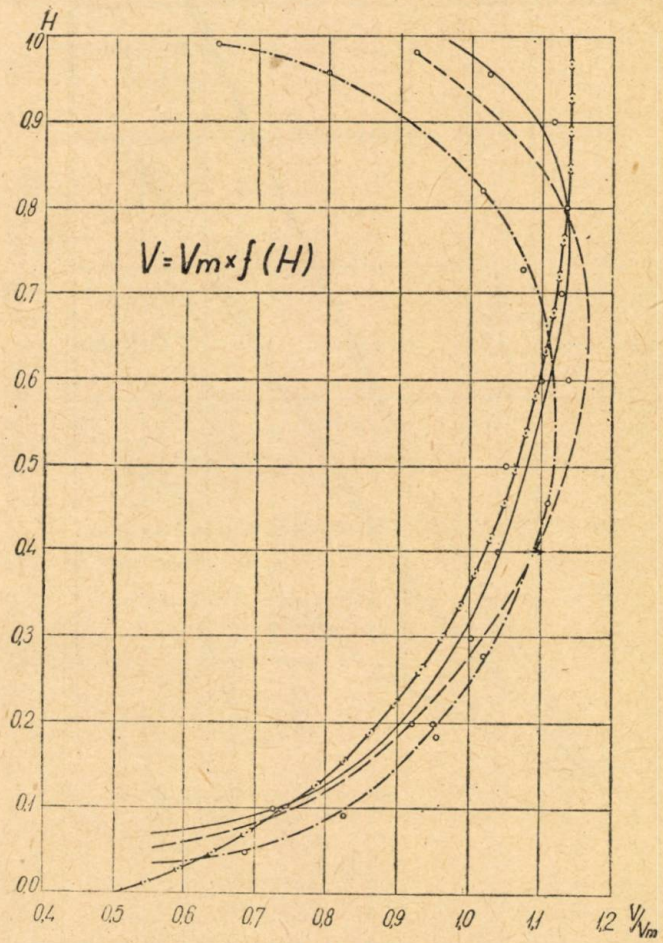


Fig. 3

—— H = 2 cm; — — — H = 5 cm; —·—·— H = 11 cm.

delare. Acest lucru a condus în primul rînd la necesitatea studierii pierderilor de sarcină, ele însești constituind un capitol important în studiul construcțiilor hidrotehnice.

Prin natura lor, modelele construcțiilor hidrotehnice se găsesc în zona de început a scurgerii, deci în zona de formare a stratului limită. Studiul formării

stratului limită în canalele închise l-am efectuat pe baza pierderilor de sarcină într-un canal de studiu de $400 \times 40 \times 4$ cm.

Rezultatele obţinute au fost reproduse în figura 5. Studiul a fost făcut pentru viteze de 11,5; 15,0 şi 17,8 m/s şi pentru numere Re (scrise cu raza hidraulică a curentului) de 15 000, 20 000, 22 500. Gradul de turbulenţă nu a putut fi stabilit în laborator, lipsind aparatajul necesar.

În prezentul grafic s-a exclus zona de început de 30 cm, în care nu au fost făcute măsurătorile intermediare. Pentru această zonă s-a măsurat pierderea de

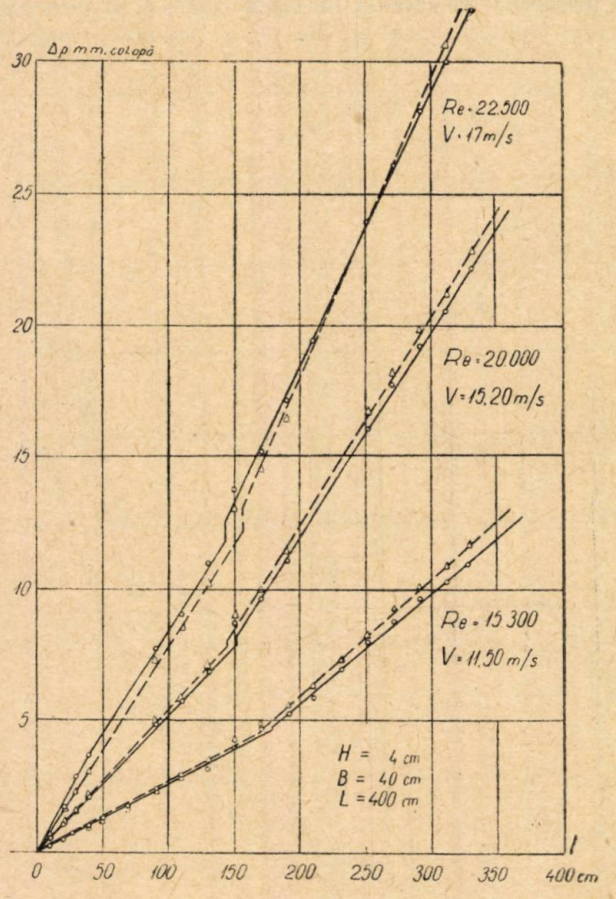


Fig. 5

sarcină totală care include atît pierderea de sarcină locală la intrarea în canal, cît şi în prima porţiune de formare a stratului limită.

Pentru restul porţiunii de canal, măsurătorile ne permit să delimităm zona de tranziţie de la stratul limită laminar la cel turbulent.

Pentru fiecare caz în parte, zona de trecere se evidenţiază printr-o pierdere de sarcină locală (din cauza ruperii de vîrtejuri) şi variaţia bruscă a gradientului pierderii de sarcină. Din datele obţinute rezultă că zona de tranziţie în cazul canalelor

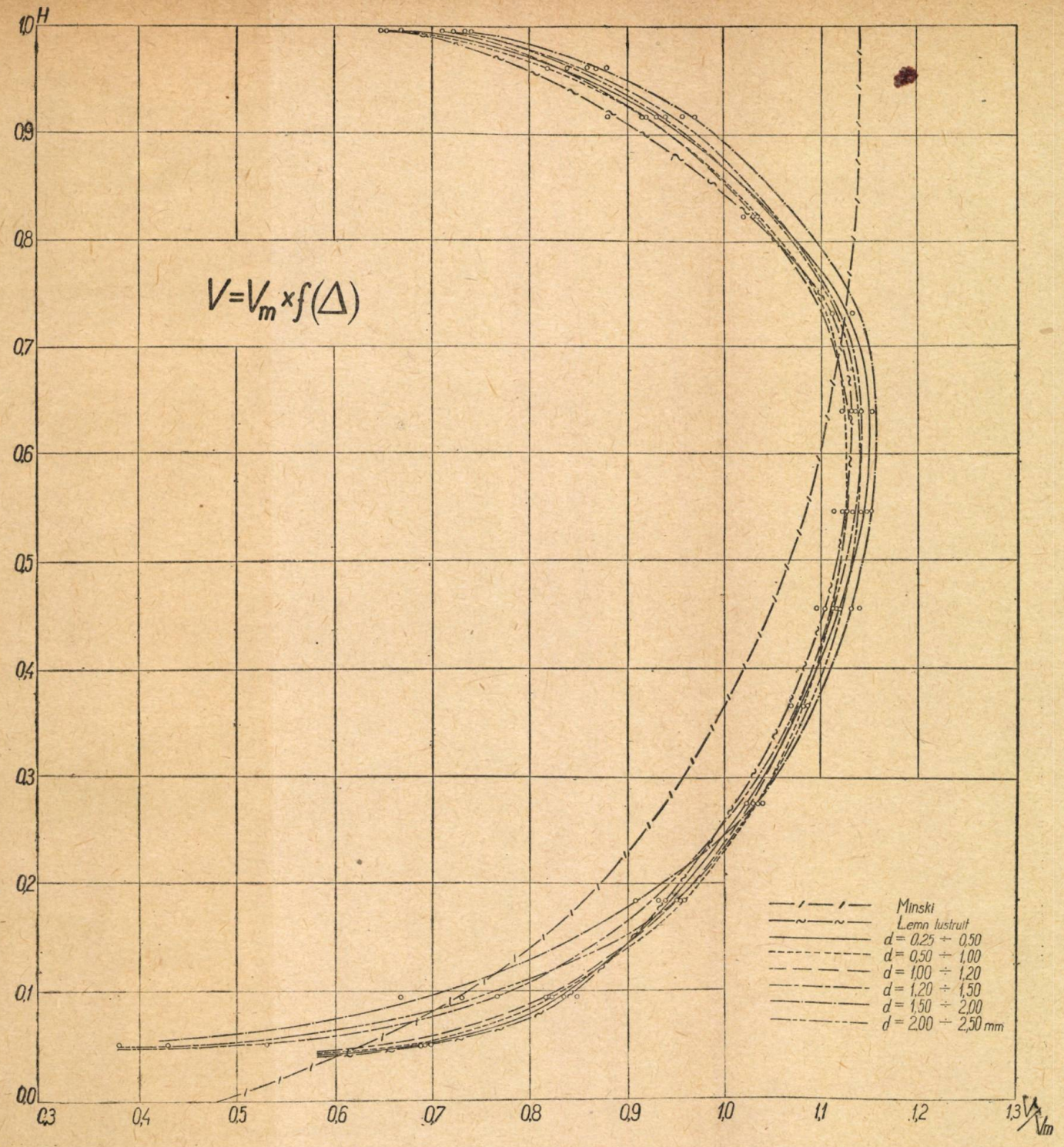

H
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
V=Vm x f(Δ)
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
V/Vm
Minski
Lemn lustruit
d = 0,25 ÷ 0,50
d = 0,50 ÷ 1,00
d = 1,00 ÷ 1,20
d = 1,20 ÷ 1,50
d = 1,50 ÷ 2,00
d = 2,00 ÷ 2,50 mm

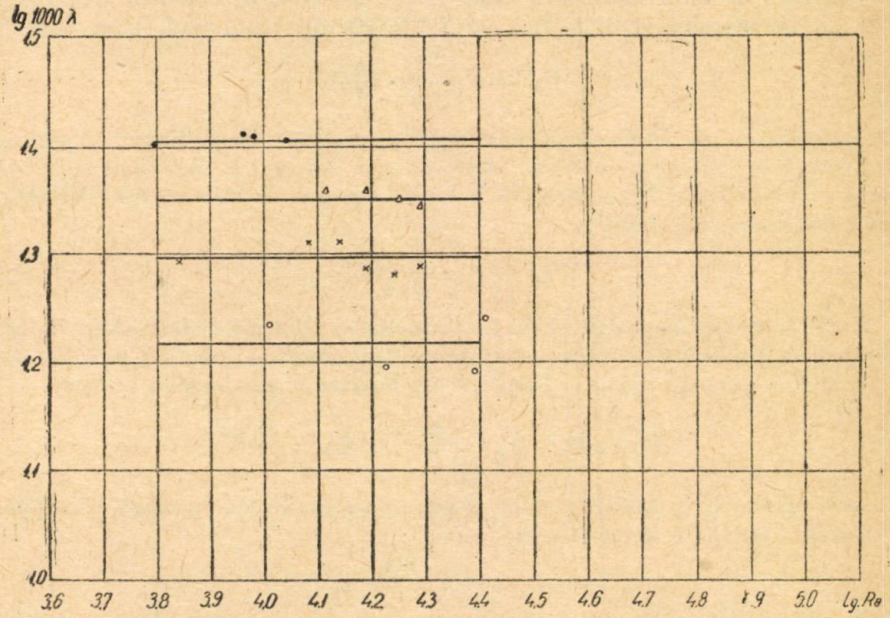
Fig. 4

închise, cu suprafețe perfect netede și pentru cazul unui curent de aspirație, se găsește la circa (90...100) R.

Această valoare a fost verificată și optic cu ajutorul unei pelicule fine de apă lansată pe suprafața cristalului. Această peliculă de apă, antrenată de curentul de aer, se rupe la aceeași distanță de (90...100) R marcînd clar punctul de tranziție de la stratul limită laminar la cel turbulent.

În aceste condiții rezultă că modelele construcțiilor hidrotehnice se găsesc în această zonă și cuprind regimuri de scurgere diferite. Pentru a evita acest lucru, în scopul unificării fenomenului studiat și apropierii de natură se impune micșorarea distanței de început a stratului laminar, fie prin modificarea condițiilor la intrare, fie prin mărirea rugozității fundului sau prin modelarea cu curent de refulare, sau toate acestea la un loc.

Pentru studiul pierderilor de sarcină în regim turbulent, unde este recomandabil să se lucreze cu curent de aspirație și condiții pe contur la intrare cît mai



$\cdot \frac{\Delta}{H} = \frac{1}{35}$; $\Delta \frac{\Delta}{H} = \frac{1}{45}$; $\times \frac{\Delta}{H} = \frac{1}{55}$; $\circ \frac{\Delta}{H} = \frac{1}{95}$.

Fig. 6

perfecte, rezultă că este necesar ca acest studiu să se facă în afara zonei de (90...100) R.

Un studiu preliminar (fig. 6) a arătat că se poate obține un regim de scurgere turbulent în zona de automodelare pentru rugozități mari, chiar la numere Re mici (pînă la Re = 6 000). În lucrarea lui Averkiev s-a obținut această limită inferioară la circa 3 000.

c) **Studiul modelării aluviunilor în canale închise.** Pentru punerea la punct a metodei modelării cu nisip trebuie atacată problema modelării aluviunilor. Această problemă credem că poate fi rezolvată pe baza vitezelor de antrenare în aer a particulelor solide, și anume în modul următor: practic avem compoziția granulometrică a

aluviunilor din albia naturală ce urmează a fi modelată. Se cunoaşte deci procentul p% al unei granulaţii de diametru dat d_N; se poate determina pentru acest diametru, viteza de pornire în apă u_{0N} (de exemplu) după lucrarea lui I. I. Levi [3]; cunoscînd că viteza din natură se reproduce pe model în raportul $\frac{U_{0M}}{U_{0N}} = \lambda^2 \frac{Q_M}{Q_N}$ (în care λ = scara de modelare) şi dacă determinăm diametrul particulei de nisip antrenată în aer de această viteză, se poate alcătui granulometria pe model în procentele corespunzătoare din natură. În aceste condiţii a părut necesar să determinăm vitezele de antrenare în aer a granulelor de nisip de diverse diametre. Relaţia dintre granule şi viteza de antrenare am determinat-o pentru sorturile de nisip:

0,25—0,50; 0,50—0,75; 0,75—1; 1—1,2; 1,2—1,5 mm.

Avînd în vedere că s-a lucrat cu un curent de aer în regim turbulent, iar numărul Re este mult mai mare decît 1, efortul frontal, conform experienţelor lui M. A. Dementiev de la Institutul VNIIG din Leningrad, l-am considerat

$$P_{fr} = K_1 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot u_0^2 d^2$$

unde s-a notat cu u_0, viteza de pornire medie pe secţiune, iar d, diametrul particulei.

Efortul de ridicare, conform experienţelor lui A. I. Losievski de la Institutul ŢNIVT din Moscova şi M. Z. Abramov de la Institutul VNIIG din Leningrad, l-am considerat

$$P_{rid} = K_2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot u_0^2 d^2.$$

Avînd în vedere dispoziţia haotică a particulelor şi variaţia eforturilor P_{fr} şi P_{rid} în timp şi spaţiu, toată relaţia şi rezultatele obţinute au fost calculate în valori medii.

În aceste condiţii avem la limita de stabilitate a particulelor relaţia

$$f\left(a\gamma_1 d^3 - K_2 \frac{\gamma}{g} u_0^2 d^2\right) = K_1 \frac{\gamma}{g} u_0^2 d^2$$

unde s-a notat cu f, coeficientul de frecare, γ_1, greutatea specifică a nisipului şi γ, greutatea specifică a aerului, de unde

$$u_0 = K\sqrt{gd}.$$

Rezultatele experienţelor au confirmat premisele de calcul. După cum se vede din graficul alăturat (fig. 7), ele se pot înscrie pe o parabolă de forma

$$u_0^2 = K^2 gd,$$

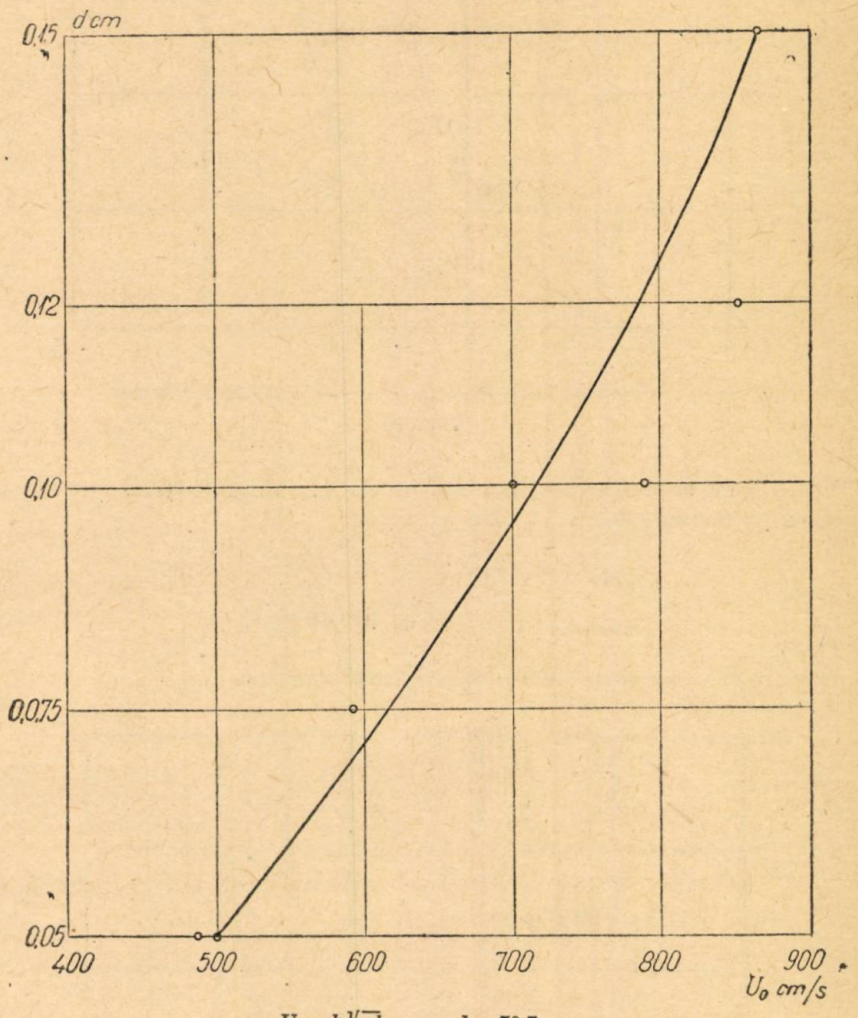
în care constanta medie K a rezultat că se poate lua $K = 70,7$.

Subliniem că rezultatele obţinute se apropie de concluziile trase de I. I. Levi asupra antrenării particulelor în apă. I. I. Levi deduce viteza de pornire ca o funcţie de forma

$$u_0 = a\sqrt{gd} \cdot f_1(\lambda), \qquad a = \sqrt{\frac{\gamma'}{\gamma} f \cdot m}$$

în care s-a notat cu γ', greutatea specifică a aluviunilor în fluidul respectiv; γ, greutatea specifică a fluidului; f, coeficientul de frecare pentru nisip (care poate fi considerat acelaşi în apă sau în aer); m, coeficientul de compactitate care, într-o primă aproximaţie, poate fi considerat acelaşi în apă şi în aer.

În ceea ce privește funcția f_1, pentru cazul în care particulele de nisip depășesc stratul laminar și ne găsim în regimul turbulent de automodelare, f_1 este funcție numai de $\frac{\Delta}{H}$ și nu de numărul Re. Deci f_1 nu este funcție de natura fluidului și depinde numai de natura granulelor, adică de rugozitate.



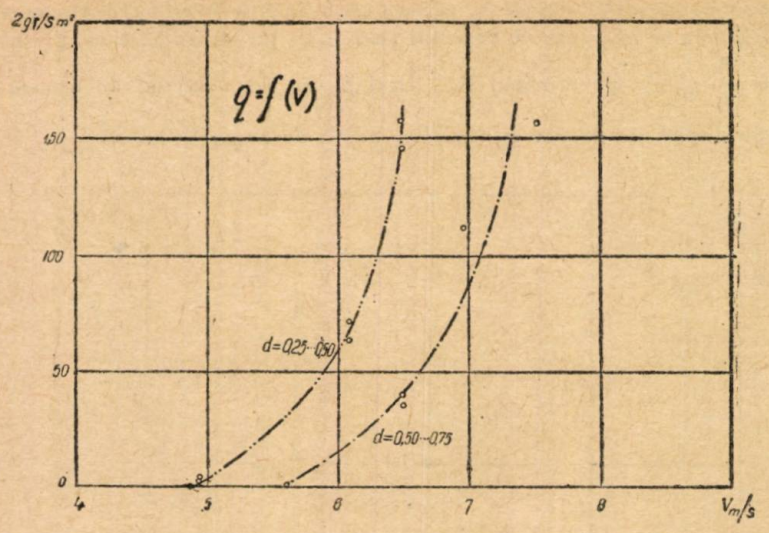
$U_0 = k\sqrt{gd}$ $k = 70,7$

Fig. 7

În aceste condiții, viteza de pornire a aceleraşi aluviuni în apă și în aer este funcție numai de γ', γ, f și m, iar raportul

$$\frac{u_{0\,\text{aer}}}{u_{0\,\text{apă}}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{al}}^{\text{aer}}}{\gamma_{\text{aer}}}}\sqrt{\frac{\gamma_{\text{apă}}}{\gamma_{\text{al}}^{\text{apă}}}} = \sqrt{770}\ \sqrt{\frac{2,6}{1,6}} = 35,5$$

în care s-a luat cu $\gamma_{\text{al}}^{\text{aer}} = 2,60$ t/m³ $\gamma_{\text{al}}^{\text{apă}} = 1,60$ t/m³ deci $u_{0\,\text{aer}} = 35,5 \times u_{0\,\text{apă}}$ -



— ·· — $d = 0{,}25 \div 0{,}50$ mm; — · — · — $d = 0{,}50 \div 0{,}75$ mm.

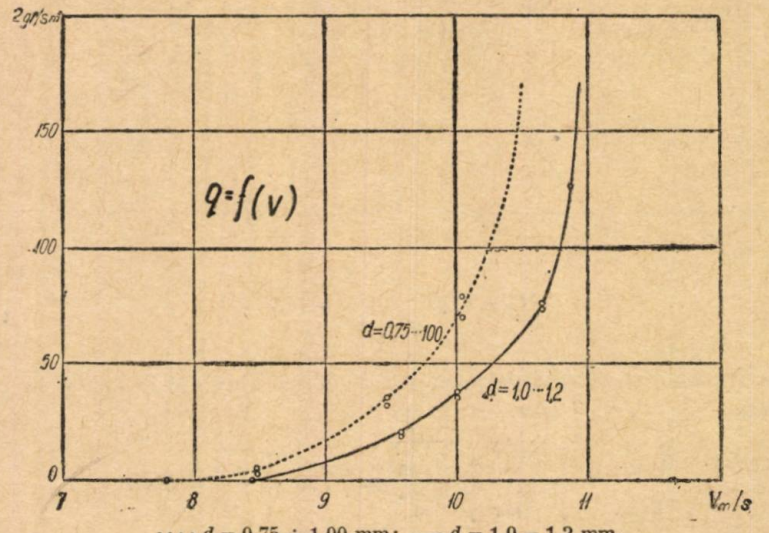
Fig. 8

Pentru zona în care stratul laminar nu are nici o influenţă asupra vitezei de pornire, după lucrarea lui I. I. Levi avem

$$u_{0\,\text{apă}} = 1{,}9\sqrt{gd}$$

$$u_{0\,\text{aer}} = 35{,}5 \times 1{,}9\sqrt{gd} = 67{,}5\sqrt{gd},$$

ceea ce verifică valoarea obţinută experimental mai sus.



···· $d = 0{,}75 \div 1{,}00$ mm; — $d = 1{,}0 - 1{,}2$ mm.

Fig. 9

În continuarea acestui studiu s-a determinat relația dintre viteza de antrenare, debitul solid și diametrul particulelor.

Aceste relații sînt importante în special în problema capacității de antrenare a debitului solid. Ele apar la studiul prizelor de apă sau, în general, la devierea unui debit de apă din albia unui rîu.

Rezultatele obținute au fost trecute în graficul alăturat (fig. 8 și 9) și pot servi la determinarea parametrilor de calcul ale debitului solid. Curbele obținute sînt asemănătoare celor obținute de I. I. Levi pentru antrenarea aluviunilor în apă,. ceea ce dovedește încă odată similitudinea fenomenului de antrenare a particulelor solide în aer și apă.

Cele cîteva rezultate obținute pînă acum arată că modelarea cu aer reproduce într-o măsură satisfăcătoare fenomenele hidraulice și că se poate obține o îmbunătățire a acestei reproduceri, în special printr-o modificare corespunzătoare a condițiilor pe contur.

Metoda poate da rezultate bune, iar în perioada actuală rămîne ca sarcină, desigur, punerea la punct a tehnicii experimentale.

CONCLUZII

1. Studiul liniilor de curent, al variației epurei vitezelor în plan orizontal și vertical, al pierderilor de sarcină și antrenării aluviunilor în condițiile modelării cu aer, arată o similitudine perfectă cu fenomenele din natură, în condițiile construcțiilor hidrotehnice. Concluziile ce se degajă constituie o justificare teoretico-experimentală bună a metodei.

2. Din studiile teoretico-experimentale efectuate se degajă următoarele concluzii cantitative:

a) Se poate obține domeniul de automodelare turbulent pînă la valori ale numărului $\mathrm{Re} \geqslant 6\,000$; iar scările de modelare se pot reduce în consecință.

b) Zona de tranziție de la regimul de scurgere laminar la cel turbulent, în cazul canalelor închise cu suprafețe perfect netede și pentru cazul unui curent de aspirație se găsește la circa (90...100) R de la intrarea în canal.

c) Vitezele de pornire ale particulelor solide în aer pot fi determinate prin relația

$$u_0 \approx 70{,}7 \sqrt{gd}$$

d) Relațiile care s-au stabilit pentru determinarea debitului solid antrenat, în funcție de viteze și diametrul particulelor sînt analoge cu cele stabilite pentru antrenarea în apă.

3. Consecințele imediate ce decurg din cele de la punctul de mai sus, sînt arătate în cadrul lucrării.

4. Metoda propusă a vizualizării cu un strat fin de nisip pe suprafața modelului este fructuoasă și este comodă în experimentare.

Considerăm lucrarea de față ca un studiu preliminar al metodei de cercetare a construcțiilor hidrotehnice cu ajutorul aerului, urmînd ca să continuăm, în cadrul unui studiu sistematic, problema similitudinii de scurgere în aer și în apă, problema pierderilor de sarcină în lung și locale, și toate celelalte aspecte particulare ale metodei.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВОЗДУХОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор ставит себе задачу ввести в РНР новый советский метод исследования в области гидротехнического строительства и подробно исследовать некоторые вопросы, связанные с этим методом.

Сущность этого метода заключается в том, что безнапорные потоки рассматриваются как напорные. Метод состоит в изготовлении моделей гидротехнических сооружений в очень малом масштабе (1/1000—1/2500), ограничении свободной поверхности потока при помощи стекла и воспроизведении гидравлических явлений, происходящих в натуре при помощи воздушного потока, направляемого между моделью и стеклом.

Автор дает методу теоретические, техническое, и экономическое обоснование и указывает области его применения.

В рамках настоящего сообщения рассматриваются нижеследующие вопросы:

а) Влияние изменения граничных условий на картину течения (вследствие ограничения свободной поверхности потока);

б) Потери напора в напорных каналах;

в) Моделирование наносов в напорных каналах.

В заключение автор указывает, следующее.

1. Предлагаемый метод визуального исследования, путем нанесения на поверхность модели тонкого слоя песка, дает хорошие результаты и удобен при проведении опытов.

2. Исследование линий тока, изменения эпюра скоростей в горизонтальной и вертикальной плоскости, потерь напора и движения наносов в условиях моделирования их воздухом указывают на полное сходство с натурой.

3. Можно воспроизвести турбулентное автомоделирование натурой при $Re \gg 6000$, а масштабы моделирования могут быть уменьшены.

4. Длина разгонного участка потока при турбулентном режиме в напорных каналах с совершенно гладкими поверхностями равна $(90 — 100)\,R$.

5. Скорости трогания твердых частиц в воздухе могут быть определены отношением

$$u_0 \approx 70{,}7\,\sqrt{gd}.$$

CONTRIBUTIONS À LA MÉTHODE D'ÉTUDE DES CONSTRUCTIONS HYDROTECHNIQUES À L'AIDE DE L'AIR

(RÉSUMÉ)

L'Auteur se propose d'introduire une nouvelle méthode soviétique de recherches dans le domaine des constructions hydrotechniques et de développer quelques-uns des problèmes posés par cette méthode.

L'essence de cette méthode consiste à traiter les écoulements à surface libre comme des écoulements sous pression. Elle consiste à modeler les constructions hydrotechniques à très petite échelle (1/1000÷1/2500), à limiter la surface libre

de l'eau à l'aide d'un cristal et à reproduire les phénomènes hydrauliques de la nature à l'aide d'un courant d'air soufflé entre le modèle et le cristal.

On justifie cette méthode au point de vue théorique, technique et économique et l'on indique le domaine de valabilité.

Les problèmes suivants sont abordés dans le cadre de cette étude:

a) influence de la modification des conditions de contour sur l'écoulement (par limitation de la surface libre d'écoulement);

b) les pertes de charge dans les canaux sous-pression et

c) le modelage des alluvions dans les canaux, sous pression.

En conclusion, on indique que:

1. La méthode proposée: la visualisation de l'écoulement à l'aide d'une couche fine de sable, appliqué sur la sourface du modèle, est fructueuse et commode à expérimenter.

2. L'étude des lignes de courant, de la variation de l'épure des vitesses, dans le plan horizontal et vertical, des pertes de charge et de l'entraînement des alluvions dans les conditions du modelage à l'air, démontre une bonne similitude avec les phénomènes de la nature, dans les conditions des constructions hydrotechniques.

3. On peut obtenir le domaine de la turbulence quadratique, jusqu'à des valeurs de $n\,\mathrm{Re} \gg 6\,000$; et les échelles de modelage peuvent être réduites en conséquence.

4. Dans le cas des canaux sous pression à surfaces parfaitement lisses et pour le cas d'un courant d'aspiration, la zone de transition du régime d'écoulement laminaire à celui d'écoulement turbulent, se trouve à environ $(90 \div 100)$ R de l'entrée du canal.

5. Les vitesses d'entrainement des particules solides en l'air peuvent être déterminées par la relation: $u_0 \approx 70{,}7\,\sqrt{gd}$.

BIBLIOGRAFIE

1. A. G. Averkiev, Izvestia, VNIIG, 1951, t. 47, p. 89.
2. E. M. Minski, *Turbulentnost ruslovovo potoka*. Ghidrometeoizdat, Moscova, 1952.
3. I. I. Levi, *Dinamika ruslovih, potokov*. Gosenerghizdat, Moscova, 1949.
4. E. V. Kudriavțev, *Modelirovanie ventilaționih sistem*. Ghidrometoizdat, Moscova, 1952.
5. M. A. Velikanov, *Dinamica ruslovih potokov*. Ghidrometoizdat, Moscova, 1949.
6. V. N. Goncearov, *Ravnomerni turbulentni patok*. Gosenergoizdat, Moscova, 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3–4, 1954

HIDROTEHNICĂ

ASUPRA BARAJELOR DE GREUTATE CU ROSTURI LĂRGITE

DE

R. PRIŞCU

A. GENERALITĂŢI

Barajele de greutate cu rosturi lărgite au început să fie aplicate încă de acum două decenii, ca o consecinţă a preocupării de a îmbunătăţi condiţiile statice şi economice care caracterizează barajele de greutate obişnuite. Rămînînd tot construcţii masive, realizate din betonuri simple, ele reprezintă o formă intermediară între barajele de greutate şi barajele cu goluri (evidate) sau cele cu pile groase. Conform experienţei de pînă acum, înălţimile pentru care se pot aplica aceste baraje variază între 20 şi 130 m.

Barajele de greutate cu rosturi lărgite constau în principiu (fig. 1) din blocuri triunghiulare de lăţime L (maximum 18,00 m), în ale căror feţe laterale se practică respectiv goluri de lăţime redusă $l/2 = \alpha L/2$ (practic pînă la 1,50 m). La barajele ce se construiesc în condiţii geologice normale, rosturile lărgite merg pînă în suprafaţa de fundaţie; la barajele ce se construiesc în condiţii geologice mai puţin favorabile, rosturile lărgite se opresc pe un radier general de grosime $r = \rho H$ (de ordinul metrilor). Fundînd construcţia pe acest radier, se realizează o încărcare uniformă a rocii de fundaţie şi se înlătură posibilitatea unor infiltraţii concentrate, prin rocă, la baza rostului. Pentru limitarea subpresiunilor, consolele radierului sînt prevăzute cu o serie de orificii drenante, care pătrund pînă în roca de fundaţie.

Lărgirea rosturilor, care din punct de vedere constructiv reprezintă o operaţie indiferentă, crează în corpul barajului o serie de fenomene fizice care îmbunătăţesc în mod substanţial comportarea barajului. Aceste fenomene, care aduc după sine tot atîtea avantaje faţă de barajele de greutate obişnuite, sînt pe scurt următoarele:

1. Reducerea subpresiunilor

În ipoteza simplificatoare că infiltraţia apei prin blocurile componente ale unui baraj de greutate cu rosturi lărgite se produce în planuri orizontale, liniile respective de curent sînt dirijate în majoritatea lor spre feţele laterale ale blocurilor, unde acţionează presiunea atmosferică. Ca urmare a acestui fenomen, presiunile

corespunzătoare scad puternic de la valoarea presiunii hidrostatice amonte p_a la valoarea zero.

Examinînd teoretic problema repartiției presiunilor într-o secțiune orizon-

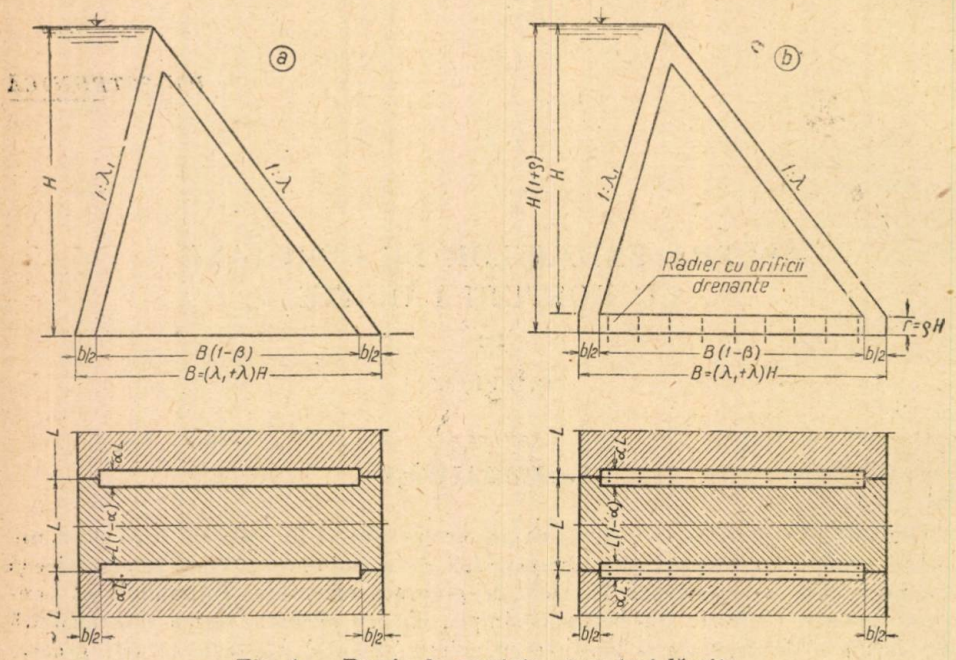


Fig. 1. — Baraje de greutate cu rosturi lărgite,
a) fără radier și *b)* cu radier.

tală de formă dreptunghiulară, prin corpul unui baraj, F. T ö l k e a determinat valoarea presiunii în orice punct de coordonate x, y

$$p = p_a \left[1 - \frac{x}{B} - \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{ch \frac{n\pi y}{B}}{ch \frac{n\pi L}{2B}} \sin \frac{n\pi x}{B} \right].$$

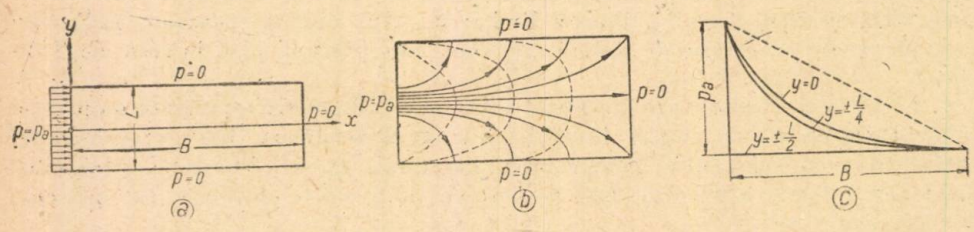


Fig. 2. — Calculul presiunilor într-o secțiune dreptunghiulară (după T ö l k e).

În expresia de mai sus, s-a notat cu p_a presiunea hidrostatică amonte, cu L lățimea și cu B lungimea secțiunii dreptunghiulare (fig. 2 *a*). În figura 2 *b* sînt trasate liniile de curent într-o secțiune avînd raportul $L/B = 1/2$, iar în figura 2 c, pentru aceeași secțiune, variația presiunii pentru $y = 0$, $y = \pm L/4$ și $y = \pm L/2$.

Pentru calcule practice se dă şi expresia presiunii medii $\overline{p}$ în diverse secţiuni x, definită ca

$$\overline{p} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{p\,dy}{L} = p_a \left[1 - \frac{x}{B} - \sum_1^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{B}{L} \operatorname{th} \frac{n\pi L}{2B} \sin \frac{n\pi x}{B} \right].$$

În legătură cu cele de mai sus sînt de remarcat următoarele:

— presiunile medii $\overline{p}$ scad mult în regiunea paramentului amonte după o lege de gen hiperbolic, tinzînd spre zero la paramentul aval. Pentru valori date ale presiunii hidrostatice amonte p_a, totalul lor pe întreaga secţiune este cu atît mai redus cu cît raportul L/B este mai mic;

— condiţiile marginale ale problemei (presiunea nulă de-a lungul rosturilor) se realizează cu stricteţă în cazul barajelor cu rosturi lărgite şi numai cu oarecare aproximaţie în cazul barajelor de greutate obişnuite. Rosturile acestora din urmă, late de 1—2—3 cm, sînt umplute de regulă cu un material inert ce este puternic presat în timpul turnării blocurilor vecine; în această situaţie este greu de presupus că de-a lungul feţelor laterale ale blocurilor, acţionează presiunea atmosferică. Din acest punct de vedere, barajele cu rosturi lărgite, unde reducerea subpresiunilor constituie un fenomen real, pot fi considerate net avantajate.

Ţinînd seama de cele expuse mai sus, cît şi de rezultatele a numeroase măsurători de subpresiuni efectuate pe baraje de acelaşi tip sau asemănătoare cu cele cu rosturi lărgite, se pot schiţa diagramele de repartiţie ale subpresiunilor reale în secţiunile de fundaţie ale barajelor pe care le studiem.

În figura 3 sînt reprezentate diagramele subpresiunilor care acţionează la baza unui baraj fără radier. Variaţia lor din amonte spre aval este aproximativ hiperbolică, iar în planuri normale pe axele blocurilor componente, parabolică. Remarcăm diferenţa între subpresiunile reale (haşurate) şi între cele ce ar acţiona în cazul unui baraj de greutate obişnuit (trasate cu linii întrerupte).

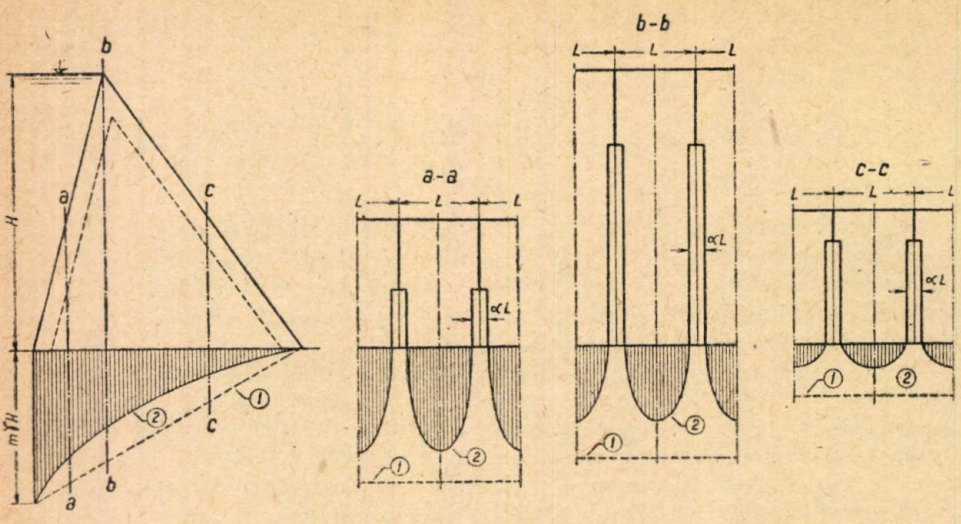
În figura 4 sînt reprezentate diagramele subpresiunilor care acţionează la baza unui baraj cu radier. În acest caz, prin acţiunea de descărcare a rostului dintre două blocuri vecine şi a orificiilor drenate, subpresiunile care se exercită pe consolele radierului nu pot depăşi valoarea γr (r = grosimea radierului). Remarcăm şi în acest caz diferenţa între subpresiunile reale şi cele ce ar acţiona în cazul unui baraj de greutate obişnuit.

Rosturile lărgite reduc subpresiunile nu numai în secţiunea de fundaţie ci şi în orice altă secţiune situată mai sus. Prin aceasta, cea mai mare parte din corpul barajului se menţine uscată şi deci ferită de acţiunea apei de infiltraţie şi a îngheţului.

Din punct de vedere static, reducerea subpresiunilor joacă un rol important. Dacă în calculele de dimensionare se ţine seama de această reducere, se obţin profile mai svelte, deci mai economice; dacă dimensionarea se face introducînd în calcul subpresiunile nereduse, ca în cazul barajelor de greutate obişnuite, se obţin profile cu coeficienţi de siguranţă măriţi, atît la răsturnare, cît şi la alunecare.

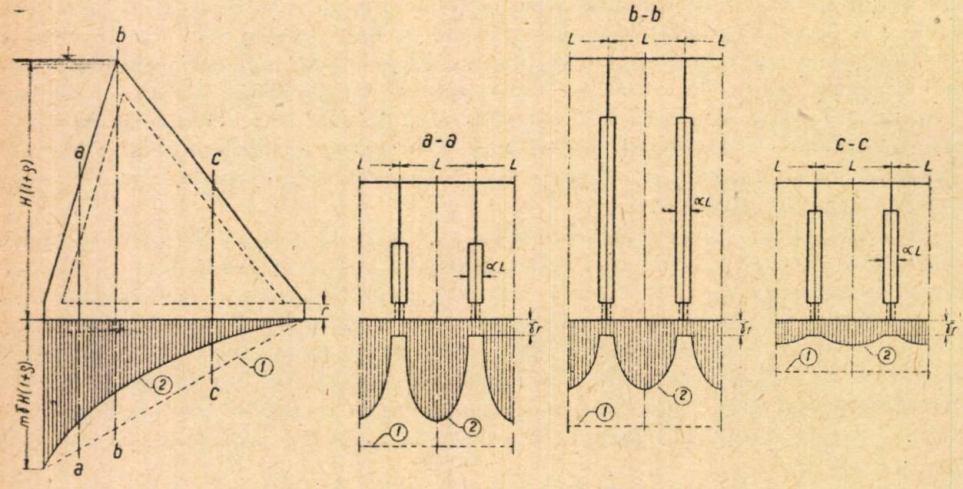
2. Răcirea betonurilor

În general sînt cunoscute fenomenele de exotermie care apar în timpul prizei cimenturilor din betonuri, însoţite apoi în perioada de răcire de apariţia eforturilor de contracţie. Cînd betonurile sînt masive şi degajarea căldurii de priză nu se poate face uşor, fisurile create de eforturile de tensiune aduc mari neplăceri. Adeseori, acestea pot periclita siguranţa întregei construcţii.



① Subpresiuni în barajul de greutate obișnuit
② Subpresiuni în barajul de greutate cu rosturi lărgite fără radier

Fig. 3. — Repartiția subpresiunilor la baza unui baraj cu rosturi lărgite, fără radier.



① Subpresiuni în barajul de greutate obișnuit
② Subpresiuni în barajul de greutate cu rosturi lărgite cu radier

Fig. 4. — Repartiția subpresiunilor la baza unui baraj cu rosturi lărgite, cu radier.

Pentru a reduce efectele acestor fenomene s-au pus în practică diferite sisteme de răcire artificială, cum sînt: răcirea cu apă care circulă printr-o rețea de tuburi îngropate în masa de beton, răcirea prin adaus de particule de ghiață la fabricarea betonului etc.

În domeniul construcției barajelor s-a aplicat cu succes, pe lîngă aceste metode, care au ridicat prețul de cost cu cîteva procente, metoda răcirii prin fante verticale (de lățimi cuprinse între 0,50 și 1,50 m). Aceste fante, lăsate în corpul barajelor la distanțe variind între 10 și 15 m, se betonează ulterior, după ce betonurile turnate în blocurile vecine s-au contractat în mare măsură. Este evident că în cazul barajelor cu rosturi lărgite, rolul fantelor este luat de rosturi, care de data aceasta își exercită funcția de răcitori pe timp nelimitat.

Cele expuse mai sus s-au verificat, atît pe cale teoretică cît și prin măsurători directe, cu ocazia construirii recente a două mari baraje, înalte de 92 m, respectiv de 100 m.

În figura 5 *a*, se indică secțiunea cea mai periculoasă din punctul de vedere al temperaturii, în barajul de 92 m, iar în figura 5 *b*, repartiția eforturilor calcu-

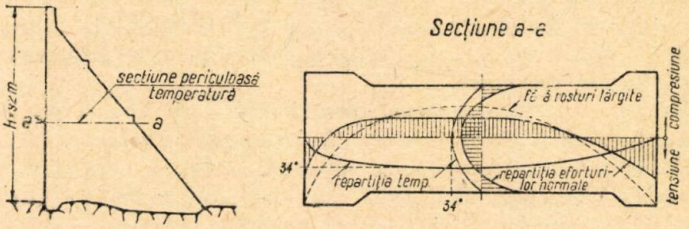


Fig. 5. — Repartiția eforturilor produse de căldura de priză într-o secțiune orizontală a unui baraj cu rosturi lărgite (după Bächtold).

late. Fără a insista asupra valorilor absolute, a căror determinare depinde de prea mulți factori, se observă diferența apreciabilă între comportarea barajului cu rosturi lărgite și a celui de tip obișnuit.

Barajul cu rosturi lărgite rezolvă deci fără cheltuieli suplimentare problema eforturilor produse de căldura de priză. În corpul barajului temperaturile se ridică în mai mică măsură în timpul prizei, iar repartiția și mărimea eforturilor provocate de acest fenomen sînt cu mult mai favorabile decît în cazul unui baraj de greutate obișnuit, nerăcit artificial.

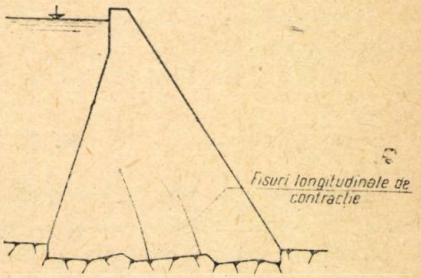


Fig. 6. — Fisuri provocate de contracția betonului într-un baraj de greutate.

3. Supravegherea și întreținerea

Unul din marile avantaje ale barajelor cu rosturi lărgite constă în posibilitatea de a ține sub observație cu ușurință fețele laterale ale blocurilor componente. Este cunoscut faptul că, în majoritatea cazurilor, barajele avînd lățimea, la bază, mai mare de 20—30 m au fisurat în sens longitudinal, din cauza contracției betonului. Aceste fisuri, orientate aproximativ după direcția liniilor izostatice de ordinul I (fig. 6), periclitează serios stabilitatea generală. De fapt acest fenomen, aproape inevitabil, a constrîns, printre altele, pe construc-

tori să renunțe la barajele de greutate obișnuite și să adopte formele lamelare, mai clare din punct de vedere static și mai ușor controlabile. Se poate afirma, că față de supravegherea efectuată prin aparatajul de măsură instalat în corpul unui baraj obișnuit, posibilitatea suplimentară de a supraveghea în voie regiunile expuse fisurării constituie un avantaj pe cît de simplu pe atît de eficace.

La constatarea unor asemenea fisuri, accesul direct în rosturi servește în același timp și lucrărilor de întreținere și consolidare prin injecții. Pe aceeași cale se pot face cu ușurință operațiile de regenerare ale voalului de etanșeizare de sub piciorul amonte al barajului. Transportul utilajului și al materialelor necesare la punctele de lucru nu mai constituie o problemă, ca în cazul barajelor obișnuite.

4. Execuția

Examinînd formele constructive ale barajelor cu rosturi lărgite, se constată că ele prezintă aceeași simplitate ca și cele ale barajelor de greutate obișnuite. Faptul că pentru realizarea unui rost lărgit se cofrează o suprafață dublă față de cazul unui rost obișnuit, ar părea că scumpește execuția. În realitate, costul pentru cofrarea suprafeței suplimentare este egal sau mai redus decît costul plăcilor de asfalt, azbest, plută sau lemn, care rămîn înglobate pentru totdeauna în rosturile barajelor de greutate obișnuite.

Nici betonurile din care se construiesc barajele cu rosturi lărgite nu diferă de cele din barajele obișnuite și aceasta din următoarele motive:

1. după cum se va arăta în cele ce urmează, eforturile care acționează în corpul lor, în condiții normale, sînt egale sau mai mari numai cu cîteva procente față de eforturile din barajele obișnuite; acest lucru nu reprezintă decît o mai bună utilizare a betonului, care și așa are o capacitate de rezistență mult mai mare;

2. rosturile lărgite, menținînd uscată cea mai mare parte a corpului barajului, favorizează buna comportare în timp a betonurilor, ferindu-le de acțiunea apei de infiltrație și a înghețului.

Cele două baraje recent construite, s-au executat, spre exemplu, din betonuri cu un dozaj de 180 kg ciment la m^3, protejate la cele două paramente cu cîte un strat de 1,50—1,80 m de beton cu un dozaj de 280 kg ciment la m^3. Dozajul redus de ciment precum și acțiunea de răcire a betonurilor, asigurată de rosturile lărgite, au făcut să nu mai fie necesară o răcire artificială.

Rezultă deci, că din punctul de vedere al execuției și al materialelor de construcție, barajele cu rosturi lărgite nu diferă de cele de greutate obișnuite. Posibilitatea de a răci betonurile fără instalații speciale, constituie un real avantaj.

B. CONDIȚII DE BAZĂ

În lucrarea de față se examinează mai îndeaproape cele două tipuri de baraje cu rosturi lărgite: fără radier și cu radier. Scopul urmărit este acela de a determina, pe baza unor criterii generale, profilele optime, apoi modul în care acestea se comportă din punct de vedere static și economia lor în raport cu barajele de greutate obișnuite.

Într-o lucrare anterioară asupra profilului optim al barajelor de greutate [1], s-a arătat care sînt criteriile generale care stau la baza dimensionării acestor baraje, precum și ce se înțelege prin denumirea de profil optim.

Primul criteriu constă în condiția ce se pune pentru ca profilul să fie stabil la răsturnare, în secțiunea de fundație. Acest lucru este echivalent,

la limită, cu condiţia ca efortul normal vertical de la piciorul amonte să fie nul

$$\sigma_{am} = \frac{\Sigma V}{\Omega} + \frac{M}{W} = 0.$$

Al doilea criteriu constă în condiţia ce se pune pentru ca profilul să fie stabil la alunecare, în secţiunea de fundaţie. Acest lucru este echivalent la limită cu condiţia ca coeficientul de alunecare (raportul între suma forţelor orizontale ΣH şi suma forţelor verticale ΣV) să fie egal cu coeficientul de frecare statică f al materialului din care este construit barajul, cu roca de fundaţie

$$\frac{\Sigma H}{\Sigma V} = f.$$

Scriind aceste condiţii pentru barajele de greutate obişnuite, s-au obţinut două ecuaţii avînd ca necunoscute panta aval (λ) şi panta amonte (λ_1) a profilului. Rezolvînd sistemul de ecuaţii, au rezultat pantele profilului triunghiular, care în acelaşi timp este stabil la răsturnare şi la alunecare, profil care s-a denumit optim. Expresiile obţinute pentru λ şi λ_1 sînt

$$\lambda = \frac{\gamma - \lambda_1 f(\gamma + \gamma_b')}{f\gamma_b'}, \tag{1}$$

$$(1 - m)\lambda_1^2 + \frac{1}{f}\frac{\gamma_b}{\gamma}\lambda_1 - \frac{1}{f^2} + \frac{\gamma_b'}{\gamma} = 0. \tag{2}$$

Pentru efortul normal vertical de la piciorul aval al aceluiaşi tip de baraj, s-a dedus expresia

$$\sigma_{av} = \frac{H}{(\lambda_1 + \lambda)^2}[\gamma_b \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda) + \gamma (1 - \lambda\lambda_1)]. \tag{3}$$

În formulele date s-au făcut următoarele notaţii, care se vor păstra şi în continuare

γ = greutatea specifică a apei
γ_b = greutatea specifică a betonului
m = coeficientul de reducere al subpresiunilor
$\gamma_b' = \gamma_b - m\gamma$

În cele ce urmează se notează (fig. 1):

L = lăţimea frontală a unui bloc (distanţă între două rosturi)
$\alpha = l/L$ = raportul între lăţimea unui rost lărgit şi lăţimea blocului
$\beta = b/B$ = raportul între lăţimea totală a proeminenţelor laterale (după orizontală) şi baza blocului
$\rho = r/H$ = raportul între grosimea radierului şi înălţimea barajului, cuprinsă între vîrf şi faţa superioară a radierului.

Pentru a obţine expresiile pantelor paramentelor amonte şi aval ale celor două tipuri de baraje cu rosturi lărgite, se va proceda aşa cum s-a arătat mai sus pentru barajele de greutate obişnuite. Se vor determina deci profilele care în acelaşi timp sînt stabile la răsturnare şi la alunecare.

Se subliniază faptul că asupra mărimii şi repartiţiei subpresiunilor se vor face ipoteze cu totul acoperitoare, admiţîndu-se repartiţia liniară (fig. 7 şi fig. 10), ca în cazul barajelor obişnuite şi nu repartiţia reală schiţată în figura 3 şi figura 4. Această rezervă va face ca, pentru barajele astfel dimensionate, coeficienţii de siguranţă să fie în realitate mai mari decît unitatea.

C. BARAJE DE GREUTATE CU ROSTURI LĂRGITE, FĂRĂ RADIER

1. Anularea tensiunilor amonte

Considerînd forțele care acționează asupra barajului în ipoteza lacului plin (fig. 7), se pune condiția ca efortul normal vertical de la piciorul amonte să fie nul.

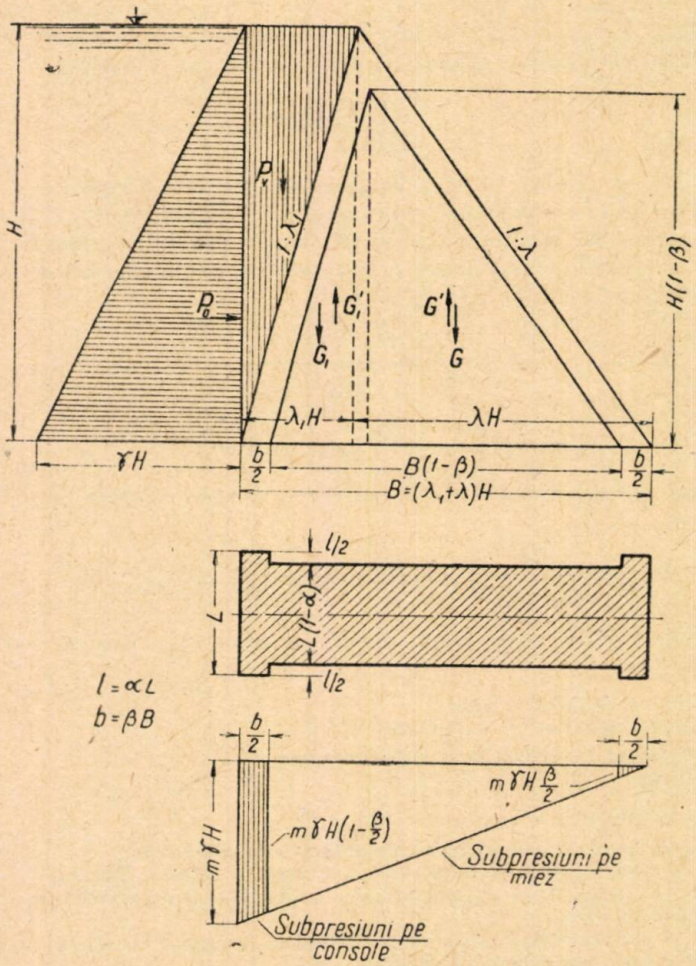


Fig. 7. — Forțele care acționează asupra unui baraj de greutate cu rosturi lărgite, fără radier.

Forțele care acționează și brațele lor de pîrghie față de centrul secțiunii de fundație sînt:

— presiunea orizontală a apei

$$P_0 = \frac{1}{2}\gamma H^2 L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad \frac{H}{3}$$

— presiunea verticală a apei

$$P_v = \frac{1}{2}\gamma\lambda_1 H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \quad (\lambda_1 + 3\lambda)\frac{H}{6}$$

— subpresiunea

$$S = \frac{1}{2} m\gamma (\lambda_1 + \lambda)[1-\alpha(1-\beta)] H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \frac{1-\alpha(1-\beta)^3}{1-\alpha(1-\beta)} \frac{\lambda_1+\lambda}{6} H$$

— greutatea proprie

$$G = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \quad (\lambda - 3\lambda_1)\frac{H}{6}$$

$$G_1 = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda_1 H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \quad (3\lambda - \lambda_1)\frac{H}{6}$$

din care se scad golurile

$$G' = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda\alpha (1-\beta)^2 H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \quad (1-\beta)(\lambda - 3\lambda_1)\frac{H}{6}$$

$$G_1' = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda_1\alpha (1-\beta)^2 H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \quad (1-\beta)(3\lambda - \lambda_1)\frac{H}{6}$$

Suma forţelor verticale este

$$\Sigma V = G + G_1 - G' - G_1' + P_v - S,$$

$$\Sigma V = \frac{1}{2} H^2 L \left\{ \gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda)\left[\gamma_b' + \alpha m\gamma (1-\beta) - \alpha\gamma_b (1-\beta)^2\right]\right\},$$

sau, notînd

$K_1 = \gamma_b' + \alpha m\gamma (1-\beta) - \alpha\gamma_b (1-\beta)^2$, se obţine

$$\Sigma V = \frac{1}{2} H^2 L \left[\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda) K_1\right].$$

Momentul forţelor faţă de centrul secţiunii este

$$M = \frac{1}{12} H^3 L \left\{ \gamma_b (\lambda^2 - \lambda_1^2)\left[1 - \alpha(1-\beta)^3\right] - m\gamma (\lambda_1 + \lambda)^2 \left[1 - \alpha(1-\beta)^3\right] + \right.$$

$$\left. + \gamma\lambda_1 (\lambda_1 + 3\lambda) - 2\gamma \right\}$$

sau, notînd

$$K_2 = 1 - \alpha(1-\beta),$$

$K_3 = 1 - \alpha(1-\beta)^3$, se obţine

$$M = \frac{1}{12} H^3 L \left[\gamma_b (\lambda^2 - \lambda_1^2) K_3 - m\gamma (\lambda_1 + \lambda)^2 K_2 + \gamma\lambda_1 (\lambda_1 + 3\lambda) - 2\gamma\right].$$

Eforturile normale verticale la picioarele barajului sînt

$$\sigma = \frac{\Sigma V}{LH(\lambda_1+\lambda)\left[1-\alpha(1-\beta)\right]} \pm \frac{M}{\frac{1}{6}LH^2(\lambda_1+\lambda)^2\left[1-\alpha(1-\beta)^3\right]},$$

$$\sigma_{av}^{am} = \frac{H}{2(\lambda_1+\lambda)}\left[\frac{\gamma\lambda_1+(\lambda_1+\lambda)K_1}{K_2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{\gamma_b(\lambda^2-\lambda_1^2)K_3 - m\gamma(\lambda_1+\lambda)^2K_3 + \gamma\lambda_1(\lambda_1+3\lambda) - 2\gamma}{(\lambda_1+\lambda)K_3}\right].$$

Anulînd efortul amonte, se obţine ecuaţia

$$(\lambda_1+\lambda)K_3\left[\gamma\lambda_1+(\lambda_1+\lambda)K_1\right] + K_2\left[\gamma_b(\lambda^2-\lambda_1^2)K_3 - m\gamma(\lambda_1+\lambda)^2K_3 + \right.$$

$$\left. + \gamma\lambda_1(\lambda_1+3\lambda) - 2\gamma\right] = 0.$$

2. Asigurarea unui coeficient de alunecare f

Punînd condiţia astfel încît coeficientul de alunecare să fie egal cu coeficientul de frecare statică f

$$\frac{\Sigma H}{\Sigma V} = f = \frac{\gamma}{\gamma\lambda_1+(\lambda_1+\lambda)K_1},$$

se obţine

$$\boxed{\lambda = \frac{\gamma - \lambda_1 f(\gamma+K_1)}{fK_1}} \tag{4}$$

3. Profilul optim

Înlocuind pe λ cu expresia lui (4) în ecuaţia dedusă la punctul 1, prin anularea efortului amonte, se obţine, după multe transformări, ecuaţia care îl dă pe λ_1 optim (valabilă soluţia cu semnul +)

$$\boxed{\left[\frac{2}{\gamma}\frac{K_1}{K_3}\left(\frac{3}{2}\gamma+K_1-\gamma_b K_3\right)-\gamma_b'\right]\lambda_1^2 + \frac{1}{f}\left[K_1\left(2\frac{\gamma_b'}{\gamma}+\frac{1}{K_2}-\frac{3}{K_3}\right)+2\gamma_b'\right]\lambda_1 - \frac{1}{f^2}\left[K_1\left(\frac{1}{K_2}-2\frac{f^2}{\gamma}\frac{K_1}{K_3}\right)+\gamma_b'\right] = 0} \tag{5}$$

Remarcăm că dacă în expresiile constantelor se face $\alpha = 0$, acestea devin: $K_1 = \gamma_b'$, $K_2 = 1$ şi $K_3 = 1$, iar ecuaţiile (4) şi (5) devin identice respectiv cu (1) şi (2), deduse pentru barajele de greutate obişnuite.

4. Comparaţie între barajele cu rosturi lărgite, fără radier, şi barajul de greutate obişnuit

Pentru a se putea compara cele două tipuri de baraje, s-au efectuat o serie de calcule numerice, cu următoarele date de bază: $\gamma = 1{,}0$ t/m^3, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3, $m = 0{,}75$ şi $f = 0{,}65$. Pentru cifre $\alpha = 0{,}000$ (barajul de greutate obişnuit), $\alpha = 0{,}166$, $\alpha = 0{,}200$ şi $\alpha = 0{,}250$, s-a luat β variabil de la 0,05 la 0,30.

În afară de λ_1 şi λ, s-au mai calculat:

— volumele de beton pe metru liniar de baraj, după formula

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)\,[1 - \alpha\,(1 - \beta)^2]\,H^2,$$

respectiv rapoartele $V/V_{\alpha=0}$;

— eforturile normale verticale la piciorul aval, după formula dedusă mai înainte

$$\sigma_{av} = \frac{H}{2\,(\lambda_1 + \lambda)}\left[\frac{\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda)\,K_1}{K_2} - \frac{\gamma_b(\lambda^2 - \lambda_1^2)\,K_3 - m\gamma(\lambda_1+\lambda)^2 K_3 + \gamma\lambda_1(\lambda_1+3\lambda) - 2\gamma}{(\lambda_1+\lambda)\,K_3}\right].$$

respectiv rapoartele $\dfrac{\sigma_{av}}{\sigma_{av_{\alpha=0}}}$;

— rapoartele eforturilor principale aval, prin înmulţire cu

$$(1 + \lambda^2) \,/\, (1 + \lambda^2)_{\alpha=0}.$$

Examinînd cifrele cuprinse în tabloul nr. 1, se pot trage următoarele concluzii:

a) Raportul între volumele barajului cu rosturi lărgite şi volumul barajului obişnuit este subunitar (coloana 6); economia de material, care creşte cu α, se ridică în medie, pentru cazurile practice ($\beta = 0{,}10$—$0{,}15$), la 10%.

b) Raportul între eforturile normale verticale la picioarele aval ale celor două baraje este supraunitar (coloana 8); sporul procentual, care creşte cu α, variază între 12% şi 18%.

c) Raportul între eforturile principale la picioarele aval ale celor două baraje este supraunitar (coloana 10); faţă de raportul eforturilor verticale, el este mai redus deoarece şi pantele paramentului aval sînt mai mici decît 0,618 768.

Rezultă că, în condiţii normale ($f = 0{,}65$ şi $m = 0{,}75$), barajele cu rosturi lărgite, fără radier, satisfăcînd cele două condiţii de stabilitate la răsturnare şi alunecare, realizează o economie de material de circa 10% faţă de barajele obişnuite, fără ca eforturile maxime să crească sensibil.

5. Exemplu de calcul

În cele ce urmează se dau dimensiunile şi cifrele caracteristice ale unui baraj cu rosturi lărgite, fără radier, cu $H = 100$ m. Admiţînd datele de bază menţionate la punctul 4, găsim în tabloul nr. 1 pentru $\alpha = 3/18$ şi $\beta = 0{,}15$: $\lambda_1 = 0{,}316\,596$ şi $\lambda = 0{,}569\,268$. Baza barajului rezultă că este de $0{,}885\,864 \times 100 \simeq 88{,}59$ m, iar grosimea proeminenţelor laterale $b/2 = 0{,}15 \times 88{,}59/2 \simeq 6{,}60$ m (fig. 8). Efortul vertical la piciorul aval este $\sigma_{av} = 2{,}023\,309 \times 100 = 202{,}33$ t/m^2.

Tabloul nr. 1

Baraj de greutate cu rosturi lărgite, fără radier

Valori calculate cu:

Greutatea specifică apă $\gamma = 1{,}0$ t/m³ Coeficient reducere subpresiuni $m = 0{,}75$

Greutatea specifică beton $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³ Coeficient de alunecare $f = 0{,}65$

$\alpha = \frac{l}{L}$	$\beta = \frac{b}{B}$	Panta amonte λ_1	Panta aval λ	Suma $\lambda_1 + \lambda$	Raport volume $V/V_{\alpha=0}$	Efort vertical aval σ_{av}/H	Raport eforturi $\sigma_{av}/\sigma_{av\,\alpha=0}$	$\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda^2)_{\alpha=0}}$	Raport eforturi principale-aval
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha = 0$	—	0,227205	0,618768	0,845973	1,000000	1,818565	1,000000	1,000000	1,000000
$\alpha = \frac{3}{18} =$ 0,166	0,05	0,337641	0,570151	0,907792	0,911666	2,013471	1,107175	0,958202	1,060897
	0,10	0,326829	0,569351	0,896180	0,916336	2,019623	1,110558	0,957542	1,063405
	0,15	0,316596	0,569268	0,885864	0,921058	2,023309	1,112585	0,957474	1,065271
	0,20	0,306925	0,569822	0,876747	0,925829	2,024686	1,113342	0,957931	1,066504
	0,25	0,297789	0,570952	0,868741	0,930640	2,023891	1,112905	0,958863	1,067123
	0,30	0,289170	0,572609	0,861779	0,935490	2,020989	1,111309	0,960233	1,067115
$\alpha = \frac{3}{15} =$ 0,200	0,05	0,363217	0,556849	0,920066	0,891273	2,064329	1,135141	0,947361	1,075388
	0,10	0,349500	0,556445	0,905945	0,897405	2,070950	1,138782	0,947036	1,078467
	0,15	0,336644	0,556801	0,893445	0,903505	2,074624	1,140802	0,947322	1,080706
	0,20	0,324582	0,557854	0,882436	0,909583	2,075505	1,141287	0,948171	1,082135
	0,25	0,313257	0,559552	0,872809	0,915651	2,073709	1,140299	0,949543	1,082762
	0,30	0,302630	0,561830	0,864460	0,921709	2,069391	1,137925	0,951390	1,082610
$\alpha = \frac{3}{12} =$ 0,250	0,05	0,403992	0,534216	0,938208	0,858802	2,150536	1,182545	0,929504	1,099180
	0,10	0,385407	0,534828	0,920235	0,867505	2,157175	1,186196	0,929976	1,103133
	0,15	0,368207	0,536207	0,904414	0,875977	2,160073	1,187789	0,931045	1,105885
	0,20	0,352237	0,538322	0,890559	0,884269	2,159401	1,187420	0,932688	1,107492
	0,25	0,337380	0,541125	0,878505	0,892421	2,155353	1,185194	0,934876	1,108009
	0,30	0,323544	0,544564	0,868108	0,900458	2,148121	1,181217	0,937576	1,107480

Folosind formulele lui Tölke, citate la începutul acestei lucrări, s-au calculat de asemenea subpresiunile în secţiunea de fundaţie a barajului, făcînd aproximaţia că forma ei este dreptunghiulară ($L = 15{,}00$ m şi $B = 88{,}59$ m). În figura 9 sînt reprezentate subpresiunile pentru diverse valori ale lui y, precum şi subpresiunile

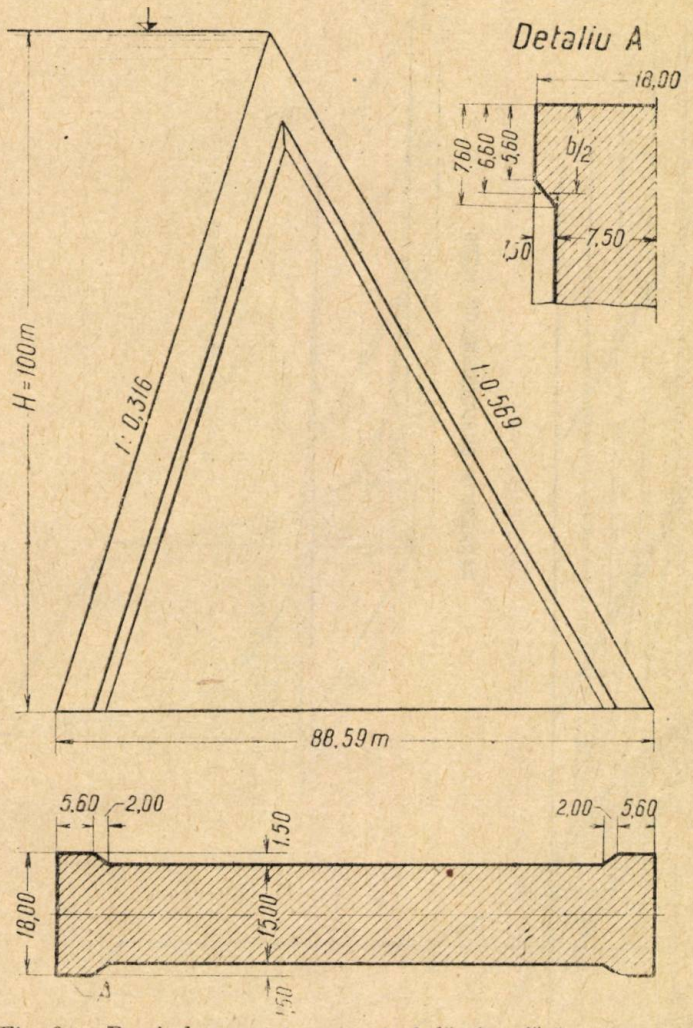


Fig. 8. — Baraj de greutate cu rosturi lărgite, fără radier, cu $H = 100$ m, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³, m = 0,75, f = 0,65.

medii. Pentru calculul valorii totale a subpresiunii, acestea din urmă s-au extins, în mod cu totul acoperitor, şi sub proeminenţele amonte. Calculînd coeficientul de alunecare real, acesta a rezultat $f' = 0{,}489$, sau un coeficient de siguranţă la alunecare $s = f/f' = 0{,}650/0{,}489 = 1{,}329$. Chiar dacă, din cauza a numeroşi factori asupra cărora nu ne oprim, această cifră nu s-ar realiza întocmai pe profilul unui baraj construit, ea indică totuşi o îmbunătăţire substanţială a condiţiilor statice în care acţionează construcţia.

REPARTIȚIA SUBPRESIUNILOR PE SUPRAFAȚA DE FUNDAȚIE

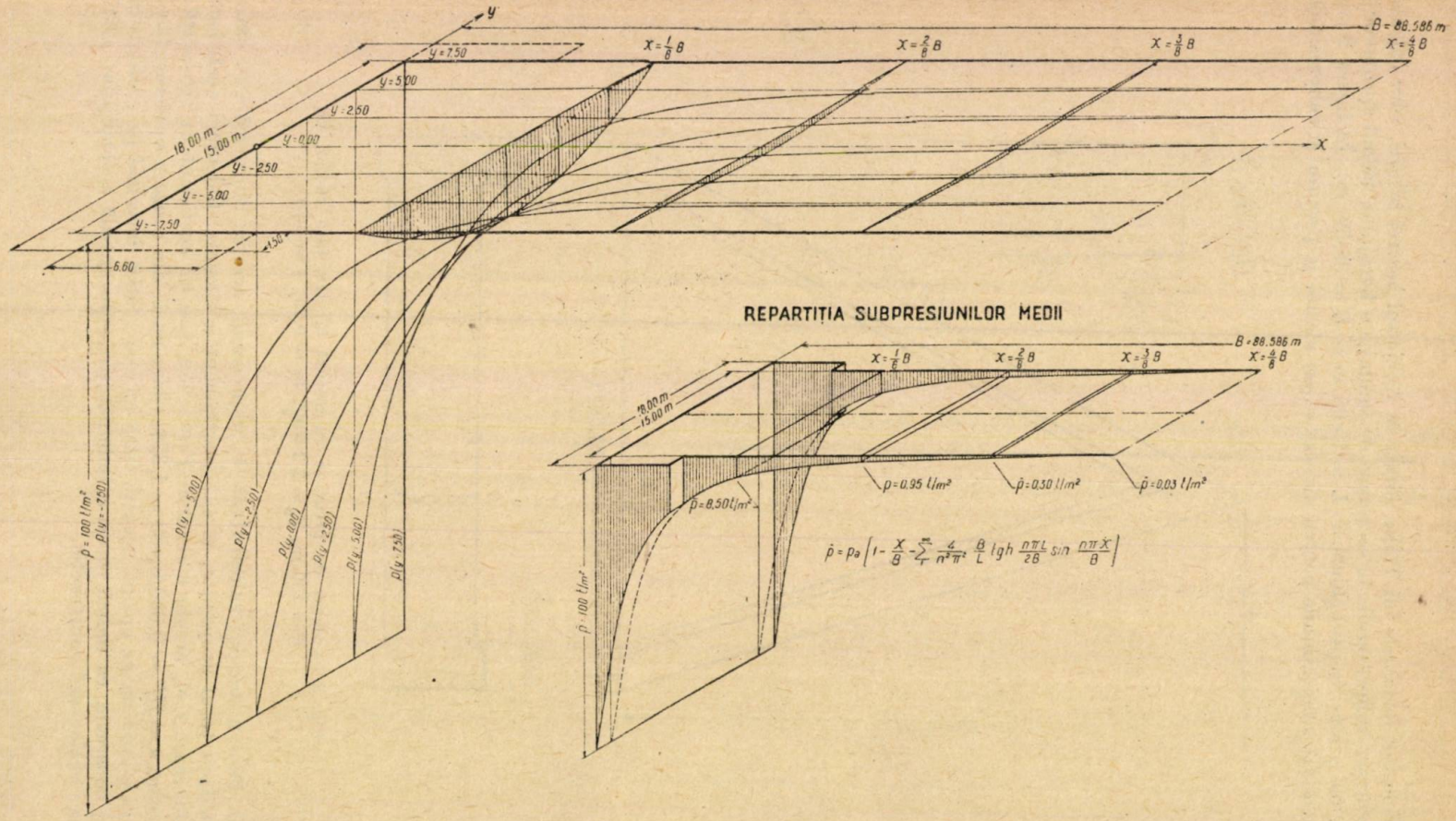


Fig. 9. — Repartiția subpresiunilor în secțiunea de fundație a unui baraj cu rosturi lărgite, fără radier, cu $H = 100$ m.

D. BARAJE DE GREUTATE CU ROSTURI LĂRGITE, CU RADIER

1. Anularea tensiunilor amonte

Considerînd forţele care acţionează asupra barajului de înălţime $H + r \cong H$ $(1 + \rho)$ în ipoteza lacului plin (fig. 10), se pune condiţia ca efortul normal vertical de la piciorul amonte să fie nul.

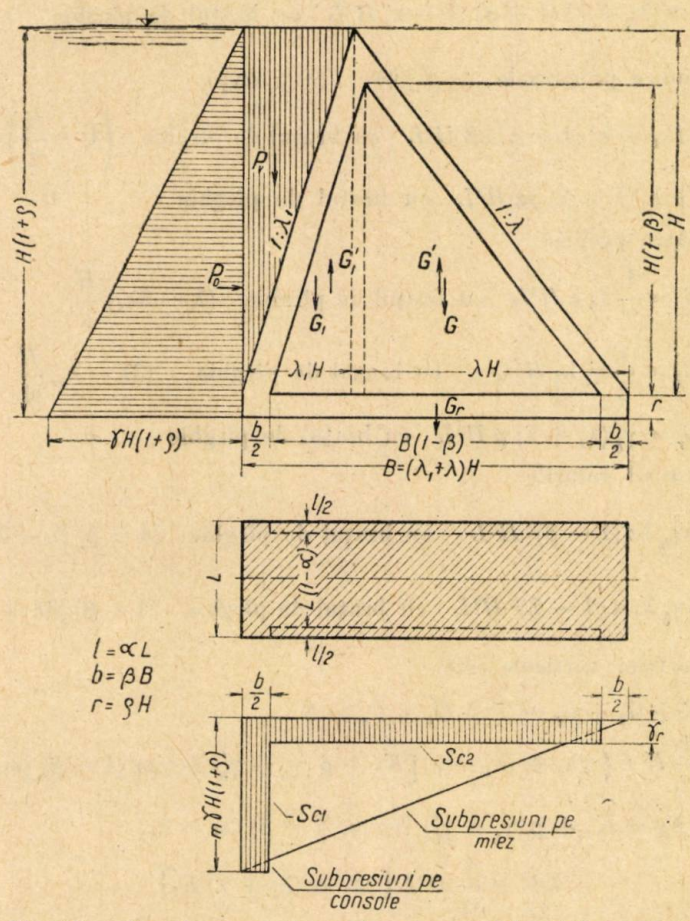


Fig. 10. — Forţele care acţionează asupra unui baraj de greutate cu rosturi lărgite, cu radier.

Forţele care acţionează şi braţele lor de pîrghie faţă de centrul secţiunii de fundaţie sînt:

— presiunea orizontală a apei

$$P_0 = \frac{1}{2}\gamma (1 + \rho)^2 H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \quad (1 + \rho)\frac{H}{3}$$

— presiunea verticală a apei

$$P_\varphi = \frac{1}{2}\gamma \lambda_1 H^2 L \quad \text{cu braţul de pîrghie} \quad (\lambda_1 + 3\lambda)\frac{H}{6}$$

— subpresiunea totală

$$S = \frac{1}{2}\gamma(\lambda_1 + \lambda)[m(1+\rho)(1-\alpha+\alpha\beta) + 2\rho\alpha(1-\beta)]H^2L,$$

compusă din:

subpresiunea pe miez

$$S_m = \frac{1}{2} m\gamma(\lambda_1 + \lambda)(1+\rho)(1-\alpha)H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad (\lambda_1 + \lambda)\frac{H}{6}$$

subpresiunea pe console

$$S_{c1} = \frac{1}{2} m\gamma(\lambda_1 + \lambda)(1+\rho)\alpha\beta H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)(\lambda_1 + \lambda)\frac{H}{2}$$

$$S_{c2} = \gamma(\lambda_1 + \lambda)(1-\beta)\rho\alpha H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad 0$$

— greutatea proprie

$$G = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad (\lambda - 3\lambda_1)\frac{H}{6}$$

$$G_1 = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda_1 H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad (3\lambda - \lambda_1)\frac{H}{6}$$

$$G_r = \gamma_b(\lambda_1 + \lambda)\rho H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad 0$$

din care se scad golurile

$$G' = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda\alpha(1-\beta)^2 H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad (1-\beta)(\lambda - 3\lambda_1)\frac{H}{6}$$

$$G_1' = \frac{1}{2}\gamma_b \lambda_1 \alpha(1-\beta)^2 H^2L \quad \text{cu brațul de pîrghie} \quad (1-\beta)(3\lambda - \lambda_1)\frac{H}{6}$$

Suma forțelor verticale este

$$\Sigma V = G + G_1 + G_r - G' - G_1' + P_v - S$$

$$\Sigma V = \frac{1}{2} H^2L\left\{\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda)[K_1 + \rho(\gamma_b + \gamma_b') + \gamma\rho\alpha(1-\beta)(m-2)]\right\}$$

sau, notînd $K_1' = K_1 + \rho(\gamma_b + \gamma_b') + \gamma\rho\alpha(1-\beta)(m-2)$,

$$\Sigma V = \frac{1}{2} H^2L[\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda)K_1'].$$

Momentul forțelor față de centrul secțiunii este

$$M = \frac{1}{12} H^3L\left\{\gamma_b(\lambda^2 - \lambda_1^2)K_3 - m\gamma(1+\rho)(\lambda_1 + \lambda)^2\left[1 - \alpha + 3\alpha\beta\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \gamma\lambda_1(\lambda_1 + 3\lambda) - 2\gamma(1+\rho)^3\right\}$$

sau, notînd $R = 1 + \rho$, $K_4 = 1 - \alpha + 3\alpha\beta\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)$,

$$M = \frac{1}{12} H^3L[\gamma_b(\lambda^2 - \lambda_1^2)K_3 - m\gamma RK_4(\lambda_1 + \lambda)^2 + \gamma\lambda_1(\lambda_1 + 3\lambda) - 2\gamma R^3]$$

Eforturile normale verticale la picioarele barajului sînt:

$$\sigma = \frac{\Sigma V}{LH(\lambda_1 + \lambda)} \pm \frac{M}{\frac{1}{6} LH^2 (\lambda_1 + \lambda)^2},$$

$$\sigma_{av}^{am} = \frac{H}{2(\lambda_1 + \lambda)} \left[\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda) K_1' \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{\gamma_b (\lambda^2 - \lambda_1^2) K_3 - m\gamma RK_4 (\lambda_1 + \lambda)^2 + \gamma\lambda_1 (\lambda_1 + 3\lambda) - 2\gamma R^3}{\lambda_1 + \lambda} \right].$$

Anulînd efortul amonte, se obţine ecuaţia

$$(\lambda_1 + \lambda)^2 (K_1' - m\gamma RK_4) + \gamma_b (\lambda^2 - \lambda_1^2) K_3 + 2\gamma\lambda_1 (\lambda_1 + 2\lambda) - 2\gamma R^3 = 0$$

care ordonată după puterile lui λ, devine

$$K_5 \lambda^2 + 2 K_6 \lambda_1 \lambda + K_7 \lambda_1^2 - 2\gamma R^3 = 0.$$

În această ecuaţie s-a notat

$$K_5 = K_1' + \gamma_b K_3 - m\gamma RK_4,$$

$$K_6 = 2\gamma + K_1' - m\gamma RK_4,$$

$$K_7 = K_6 - \gamma_b K_3.$$

2. Asigurarea unui coeficient de alunecare f

Punînd condiţia astfel încît coeficientul de alunecare să fie egal cu coeficientul de frecare statică f

$$\frac{\Sigma H}{\Sigma V} = f = \frac{\gamma (1 + \rho)^2}{\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda) K_1'}$$

se obţine

$$\boxed{\lambda = \frac{\gamma R^2 - \lambda_1 f (\gamma + K_1')}{f K_1'}} \tag{6}$$

3. Profilul optim

Înlocuind pe λ cu expresia lui (6) în ecuaţia dedusă la punctul 1, prin anularea efortului amonte, se obţine, după multe transformări, ecuaţia care îl dă pe λ_1 optim (valabilă soluţia cu semnul +):

$$\boxed{\left(2K_1' K_6 K_8 - K_1'^2 K_7 - K_5 K_8^2\right) \lambda_1^2 + 2\frac{\gamma}{f} R \left(K_5 K_8 - K_1' K_6\right) \lambda_1 - \frac{\gamma}{f^2} R^3 \left(\gamma RK_5 - 2f^2 K_1'^2\right) = 0} \tag{7}$$

În ecuaţia (7) s-a notat $K_8 = \gamma + K_1'$.

Remarcăm că dacă în expresiile constantelor se face $\alpha = 0$ şi $\rho = 0$, acestea devin: $K_1 = K_1' = \gamma_b'$, $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, $K_4 = 1$, $K_5 = 2\gamma_b'$, $K_6 = \gamma_b + 2(1-m)\gamma$, $K_7 = 2(1-m)\gamma$ şi $K_8 = \gamma + \gamma_b'$, iar ecuaţiile (6) şi (7) devin identice respectiv cu (1) şi (2), deduse pentru barajele de greutate obişnuite.

4. Comparaţie între barajele cu rosturi lărgite, cu radier şi barajul de greutate obişnuit

Pentru a se putea compara cele două tipuri de baraje de înălţime $H(1+\rho)$, s-au efectuat o serie de calcule numerice, cu aceleaşi date de bază luate pentru barajele fără radier: $\gamma = 1{,}0$ t/m^3, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3 $m = 0{,}75$ şi $f = 0{,}65$. Pentru cifre $\alpha = 0{,}000$ (barajul de greutate obişnuit), $\alpha = 0{,}166$, $\alpha = 0{,}200$ şi $\alpha = 0{,}250$, s-a luat β variabil de la 0,05 la 0,30. Cifra ρ s-a considerat constantă şi egală cu 0,05.

În afară de λ_1 şi λ, s-au mai calculat:

— volumele de beton pe metru liniar de baraj, după formula

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)(1+\rho)^2 H^2,$$

pentru barajul de greutate obişnuit, şi

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)[1 + 2\rho - \alpha(1-\beta)^2] H^2,$$

pentru barajul cu rosturi lărgite, cu radier; s-au calculat de asemenea şi rapoartele respective;

— eforturile normale verticale la piciorul aval, după formula

$$\sigma_{av} = \frac{H(1+\rho)}{(\lambda_1+\lambda)^2}[\gamma_b \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda) + \gamma(1 - \lambda_1\lambda)],$$

pentru barajul de greutate obişnuit, şi

$$\sigma_{av} = \frac{H}{2(\lambda_1+\lambda)^2}\left[(\lambda_1+\lambda)^2 K_1' - 2\gamma\lambda_1\lambda - \gamma_b(\lambda^2 - \lambda_1^2) K_3 + m\gamma R K_4 (\lambda_1+\lambda)^2 + 2\gamma R^3\right],$$

pentru barajul cu rosturi lărgite, cu radier; s-au calculat de asemenea şi rapoartele respective;

— rapoartele eforturilor principale aval, prin înmulţire cu $(1+\lambda^2)/(1+\lambda^2)\alpha = 0$.

Examinînd cifrele cuprinse în tabloul nr. 2, se pot trage următoarele concluzii:

a) Raportul între volumele barajului cu rosturi lărgite şi volumul barajului obişnuit este subunitar (coloana 6); economia de material, care creşte cu α, se ridică în medie, pentru cazurile practice ($\beta = 0{,}10 \ldots 0{,}15$), la 5 %.

b) Raportul între eforturile normale verticale la picioarele aval ale celor două baraje este subunitar (coloana 8); reducerea procentuală, care creşte cu α, variază între 4 % şi 8 %.

c) Raportul între eforturile principale la picioarele aval ale celor două baraje este mai mic sau egal cu unitatea (coloana 10); reducerea procentuală, care creşte cu α, se ridică pînă la 5 %.

Rezultă că, în condiţii normale ($f = 0{,}65$ şi $m = 0{,}75$), *barajele cu rosturi lărgite, cu radier, satisfăcînd cele două condiţii de stabilitate la răsturnare şi alunecare,*

Tabloul nr. 2

Baraj de greutate cu rosturi lărgite, cu radier

Valori calculate cu:

Greutate specifică apă $\gamma = 1{,}0$ t/m³ Coeficient reducere subpresiuni $m = 0{,}75$ $\rho = \frac{r}{H} = 0{,}05$

Greutate specifică beton $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³ Coeficient de alunecare $f = 0{,}65$

$\alpha = \frac{l}{L}$	$\beta = \frac{b}{B}$	Panta amonte λ_1	Panta aval λ	Suma $\lambda_1 + \lambda$	Raport volume $V/V_{\alpha=0}$	Efort vertical aval σ_{av}/H	Raport eforturi $\sigma_{av}/\sigma_{av\alpha=0}$	$\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda^2)\alpha=0}$	Raport eforturi principale-aval
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha = 0$	—	0,227205	0,618768	0,845973	1,000000	1,909493	1,000000	1,000000	1,000000
$\alpha = \frac{3}{18} =$ 0,166	0,05	0,284812	0,652710	0,937522	0,954507	1,809184	0,947467	1,031208	0,977035
	0,10	0,269728	0,659463	0,929191	0,961385	1,825408	0,955963	1,037615	0,991921
	0,15	0,255909	0,665559	0,921468	0,967802	1,840749	0,963998	1,043456	1,005889
	0,20	0,243250	0,671197	0,914447	0,973909	1,854836	0,971375	1,048906	1,018880
	0,25	0,231662	0,676374	0,908036	0,979657	1,867929	0,978232	1,053951	1,031008
	0,30	0,221080	0,681175	0,902255	0,985108	1,879900	0,984501	1,058664	1,042256
$\alpha = \frac{3}{15} =$ 0,200	0,05	0,309626	0,641371	0,950997	0,937552	1,783548	0,934042	1,020596	0,953279
	0,10	0,290589	0,650438	0,941027	0,946389	1,802445	0,943938	1,029067	0,971375
	0,15	0,273294	0,658492	0,931786	0,954578	1,820323	0,953300	1,036690	0,988277
	0,20	0,257566	0,665730	0,923296	0,962214	1,837064	0,962068	1,043621	1,004034
	0,25	0,243264	0,672303	0,915567	0,969375	1,852569	0,970188	1,049981	1,018679
	0,30	0,230276	0,678317	0,908593	0,976117	1,866790	0,977636	1,055854	1,032240
$\alpha = \frac{3}{12} =$ 0,250	0,05	0,349255	0,621948	0,971203	0,910484	1,746447	0,914612	1,002853	0,917220
	0,10	0,323600	0,635264	0,958864	0,922690	1,768913	0,926378	1,014959	0,940235
	0,15	0,300580	0,646756	0,947336	0,933816	1,790446	0,937657	1,025613	0,961673
	0.20	0,279945	0,656702	0,936647	0,943992	1,811072	0,948456	1,034988	0,981640
	0,25	0,261252	0,665705	0,926957	0,953482	1,829893	0,958313	1,043597	1,000092
	0,30	0,244426	0,673773	0,918199	0,962317	1,847259	0,967407	1,051412	1,017143

realizează o economie de material de circa 5 % față de barajele obișnuite; eforturile verticale precum și eforturile principale care apar la piciorul aval sînt practic egale cu cele din barajele obișnuite.

5. Exemplu de calcul

În cele ce urmează se dau dimensiunile și cifrele caracteristice ale unui baraj cu rosturi lărgite, cu radier, cu $H(1+\rho) = 100$ m. Admițînd datele de bază menționate la punctul 4, găsim în tabloul nr. 2 pentru $\alpha = 3/18$, $\beta = 0{,}15$ și $\rho = 0{,}05$:

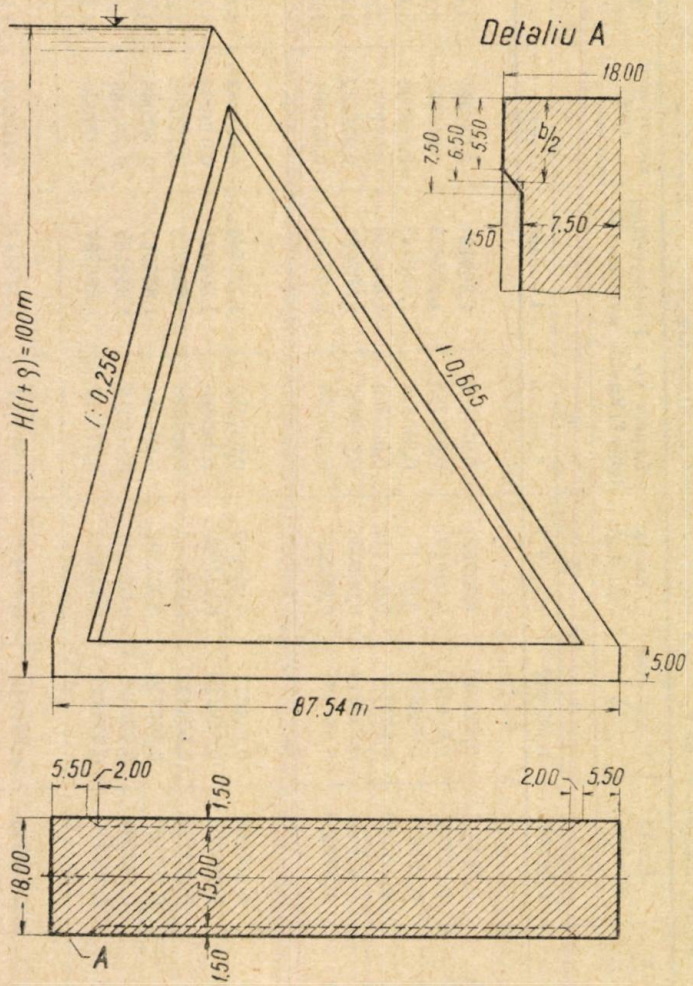


Fig. 11. — Baraj de greutate cu rosturi lărgite, cu radier, cu $H(1+\rho) = 100$ m, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³, $m = 0{,}75$, $f = 0{,}65$.

$\lambda_1 = 0{,}255\,909$ și $\lambda = 0{,}665\,559$. Grosimea radierului rezultă $r = 0{,}05 \times 100 = 5{,}00$ m, baza barajului de $0{,}921\,468 \times 95{,}00 \simeq 87{,}54$ m, iar grosimea proeminențelor laterale $b/2 = 0{,}15 \times 87{,}54/2 = 6{,}50$ m (fig. 11). Efortul vertical la piciorul aval este $\sigma_{av} = 1{,}840\,749 \times 95{,}00 = 174{,}87$ t/m².

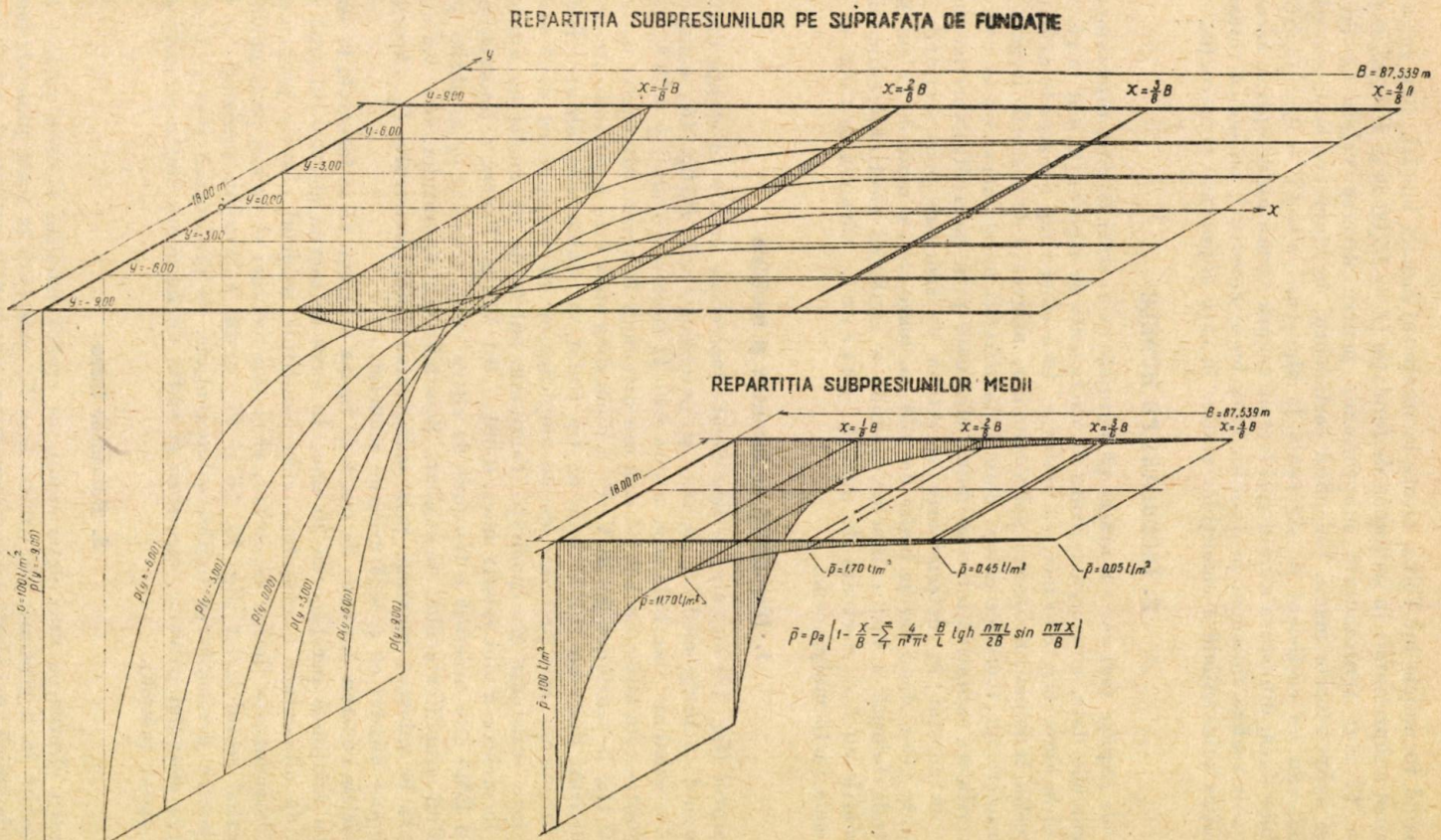


Fig. 12. — Repartiția subpresiunilor în secțiunea de fundație a unui baraj cu rosturi lărgite, cu radier, cu $H(1+\rho) = 100$ m.

Folosind formulele lui Tölke, citate la începutul acestei lucrări, s-au calculat de asemenea subpresiunile în secţiunea de fundaţie ($L = 18{,}00$ m şi $B = 87{,}54$ m). În figura 12 sînt reprezentate subpresiunile pentru diverse valori ale lui y, precum şi subpresiunile medii. Calculînd coeficientul de alunecare real, s-a găsit $f' = 0{,}483$, sau un coeficient de siguranţă la alunecare $s = f/f' = 0{,}650/0{,}483 = 1{,}346$. Chiar dacă, din cauza a numeroşi factori asupra cărora nu ne oprim, această cifră nu s-ar realiza întocmai pe profilul unui baraj construit, ea indică totuşi o îmbunătăţire substanţială a condiţiilor statice în care acţionează construcţia.

E. ÎNCERCĂRI PE MODELE

În cele expuse mai sus s-a arătat că barajele cu rosturi lărgite, dimensionate după formulele date, sînt caracterizate de coeficienţi de siguranţă, atît la răsturnare cît şi la alunecare, mai mari ca unitatea. În acelaşi timp s-a scos în evidenţă cauza acestui fenomen: reducerea subpresiunilor, asigurată de rosturile lărgite. Pe lîngă consideraţiile teoretice citate, care demonstrează acest lucru, s-a considerat utilă o verificare calitativă a fenomenului, efectuată prin încercări experimentale. Acestea au constat în determinarea spectrelor de scurgere prin secţiunile de fundaţie ale celor două baraje înalte de 100 m, luate ca exemplu de calcul mai sus. Metoda folosită a fost cunoscuta metodă a analogiei electrohidrodinamice. Determinările au fost efectuate de ing. R. Literat, căruia i se aduc şi pe această cale toate mulţumirile.

1. Dispozitivul de încercare şi modelele

Aparatul (fig. 13) cu care au fost făcute încercările constă în esenţă dintr-o punte, avînd ca braţe modelul electric şi potenţiometrul P_1(fig. 14), constituit din 20 de rezistenţe fixe bobinate, a cîte 440 Ω fiecare, cu cîte $\pm 0{,}25\,\%$ toleranţă. Puntea este alimentată după una din diagonale în curent alternativ de frecvenţă 50 Hz, la tensiunea de 20 V. Pe a doua diagonală este legat indicatorul de nul, constituit dintr-un tub catodic de tip treflă, cu dublă sensibilitate (EM4). Acesta din urmă este precedat de un amplificator de tensiune cu două etaje, cuplate prin rezistenţe şi capacităţi. Tensiunile culese de pe model cu ajutorul vîrfului încercător x sînt relativ mici: 0,001...0,1 V/mm. Pentru acţionarea indicatorului EM4 este necesară o tensiune de cîţiva volţi, tensiune ce se obţine prin intermediul amplificatorului menţionat. Sensibilitatea aparatului este variabilă de la zero la valoarea maximă, prin manevrarea potenţiometrului P_2. Aparatul este complet blindat ca şi legăturile cu modelul.

Modelele constau din cuve de sticlă de forma secţiunii ce se încearcă, la scara 1/100, cu înălţimea pereţilor de 20 mm. În cuve se toarnă electrolitul (apă din reţeaua de alimentare a oraşului), care constituie modelul electric propriu-zis. Pentru determinarea liniilor de curent, electrozii metalici se aşează pe segmentele reprezentînd rostul izolat (fig. 15, 16 şi 17), restul conturului realizîndu-se din sticlă; pentru determinarea liniilor echipotenţiale, se procedează invers. Pentru eliminarea efectului galvanic, electrozii şi vîrful de încercare sînt constituiţi din acelaşi metal (alamă).

2. Metoda de lucru

Pentru efectuarea unei determinări, se aşează modelul electric perfect orizontal astfel încît grosimea electrolitului să fie constantă în toate punctele (circa 5 mm). Se aplică apoi electrozii şi se conectează aparatul la reţeaua electrică. După

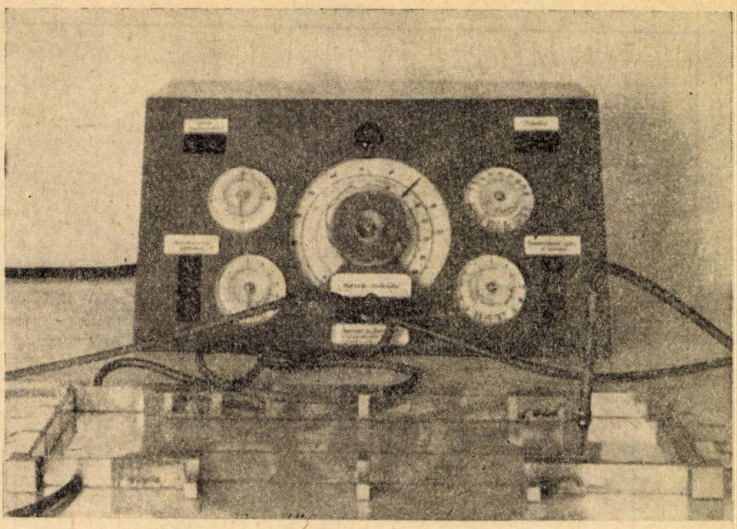


Fig. 13. — Dispozitivul de încercare.

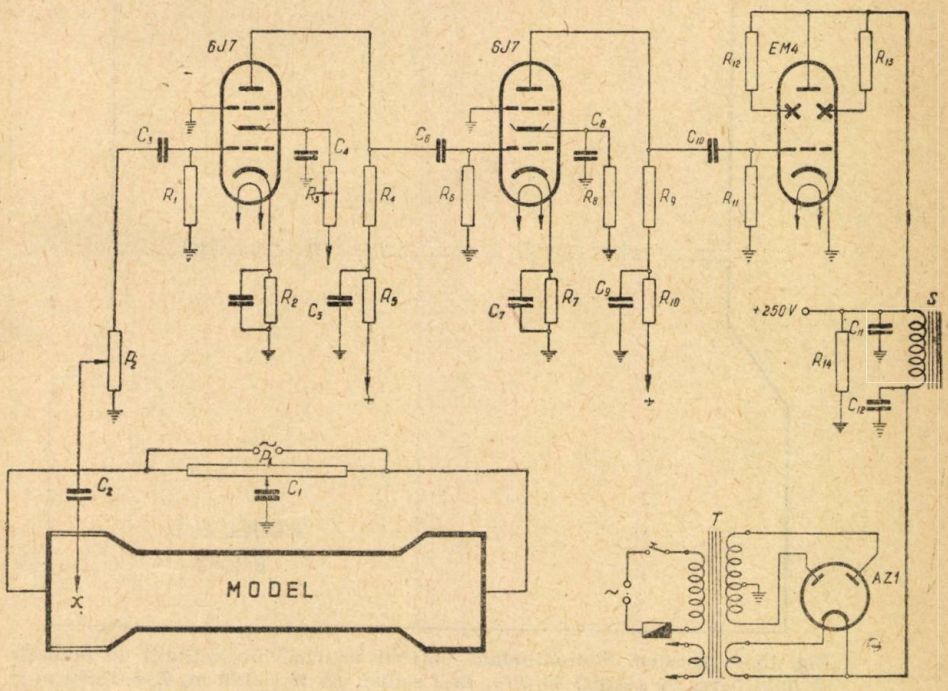


Fig. 14. — Schema electrică a dispozitivului de încercare.

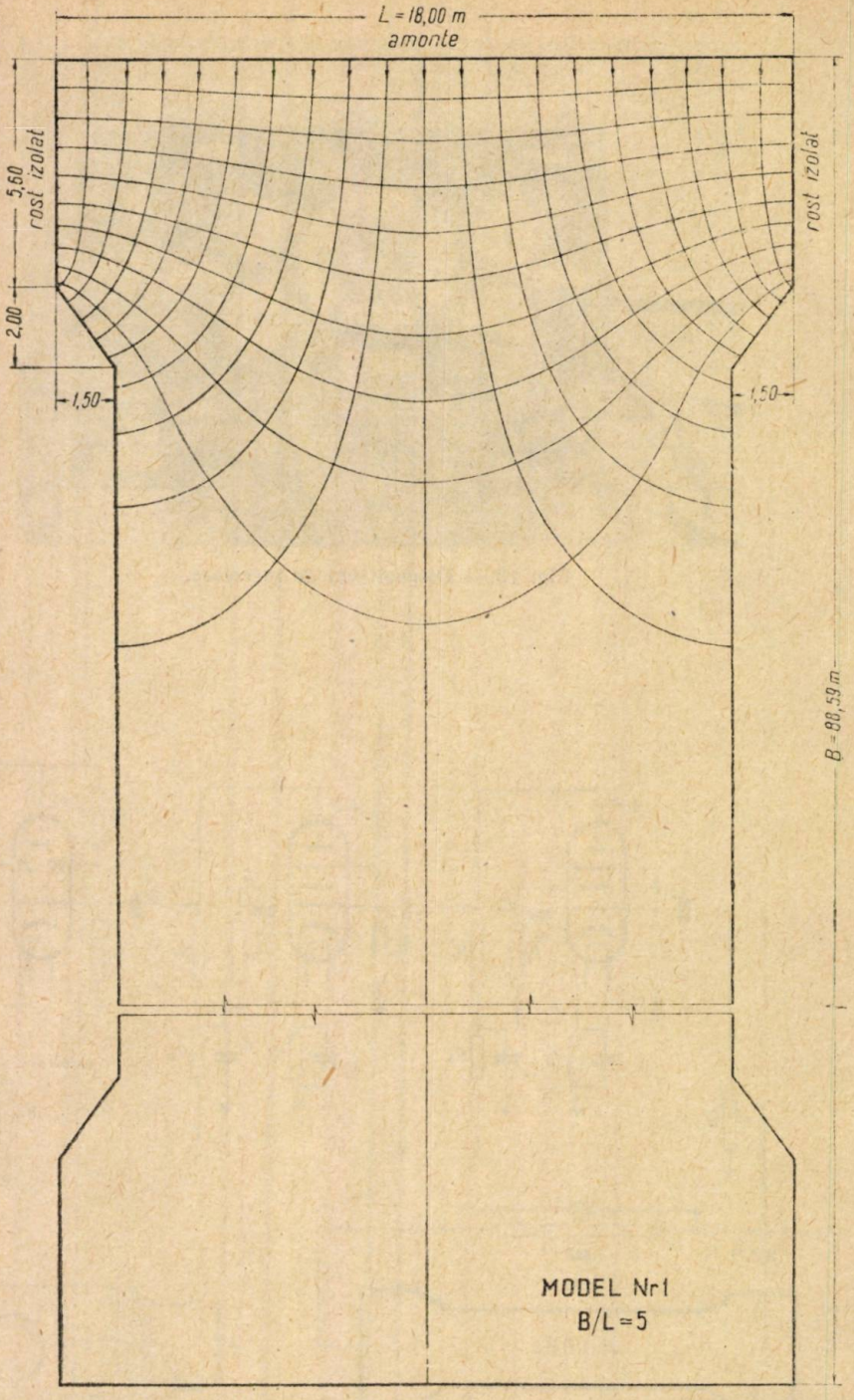


Fig. 15. — Spectrul hidrodinamic obținut pe modelul secțiunii de fundație al unui baraj cu rosturi lărgite, fără radier, cu $H = 100$ m, $L = 18{,}00$ m și $B = 88{,}59$ m.

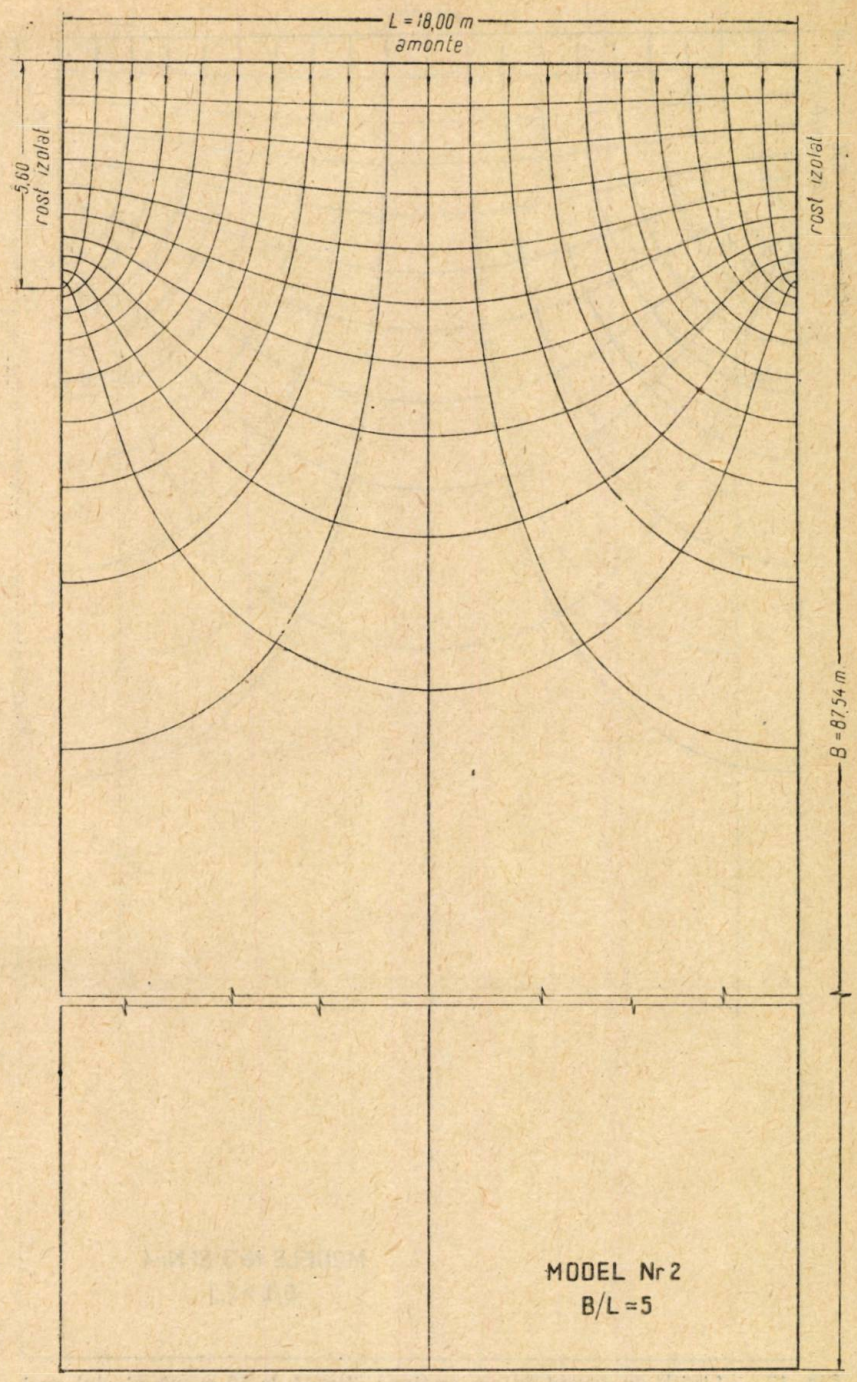


Fig. 16. — Spectrul hidrodinamic obținut pe modelul secțiunii de fundație al unui baraj cu rosturi lărgite, cu radier, cu $H(1 + p) = 100$ m, $L = 18{,}00$ m; $B = 87{,}54$ m.

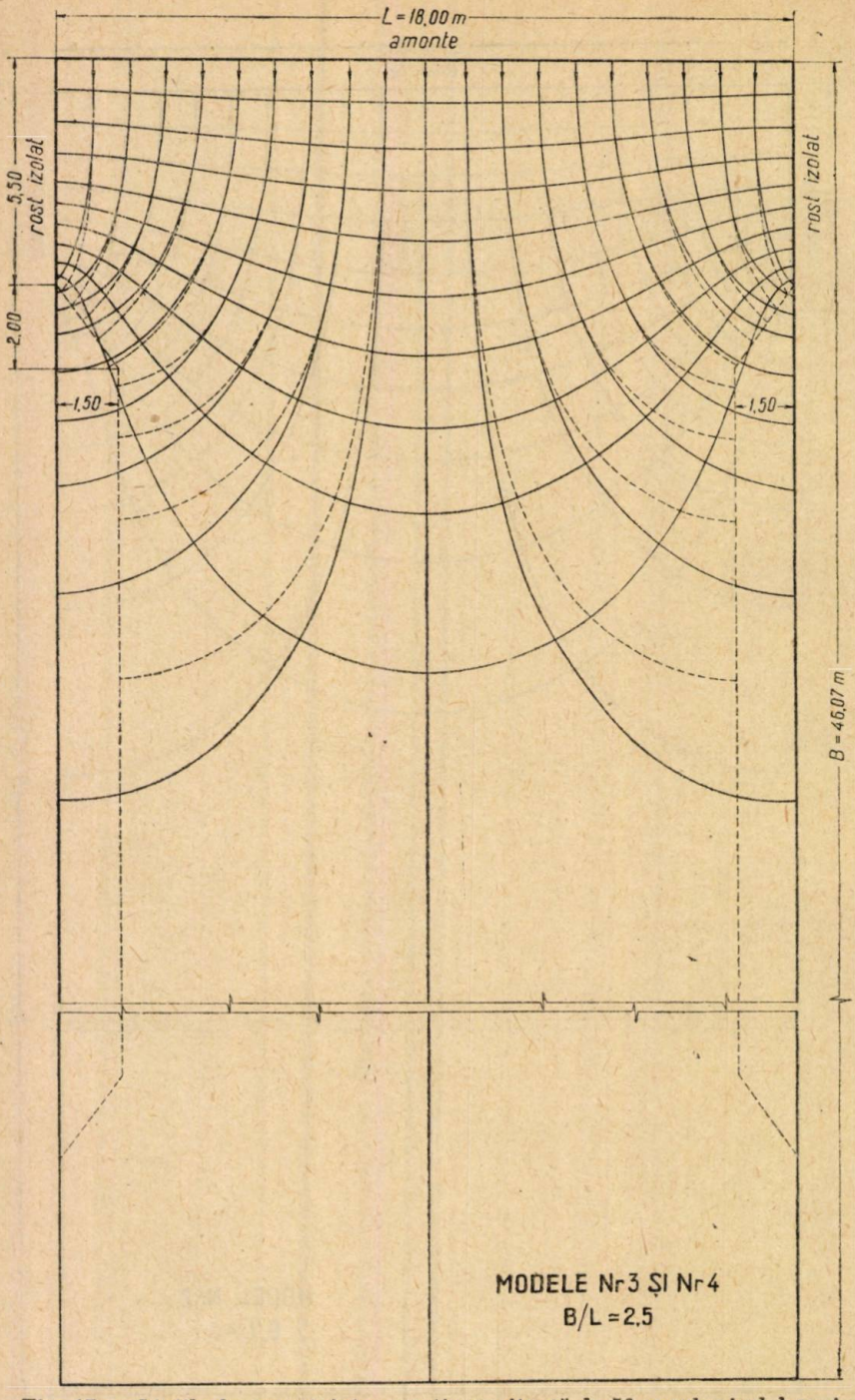


Fig. 17. — Liniile de curent într-o secțiune situată la 50 m sub nivelul apei ($L = 18{,}00$ m și $B = 46{,}07$ m) printr-un baraj de greutate obișnuit (trasate plin, inclusiv liniile echipotențiale) și printr-un baraj cu rosturi lărgite (trasate întrerupt).

cîteva minute, se face prima determinare. Pentru aceasta, se aşează potenţiometrul P_1 într-o anumită poziţie şi se caută pe model seria de puncte care alcătuiesc, spre exemplu, o linie echipotenţială. Punctele determinate se raportează la un sistem de axe şi se transcriu pe hîrtie milimetrică. În acelaşi mod se determină toate liniile spectrului.

3. Rezultate

S-au făcut determinări pe patru modele, ale căror spectre de scurgere sînt trasate în figurile 15, 16 şi 17. Examinînd aspectul lor, se pot trage următoarele concluzii:

a) În secţiunile de fundaţie ale celor două baraje (cu raportul $B/L \simeq 5$), cîmpurile de scurgere se concentrează în regiunea amonte, liniile de curent ieşind la zi imediat după porţiunile izolate ale rosturilor. Nu se observă concentrări locale supărătoare.

b) Evident că presiunile corespunzătoare au valori maxime amonte, tinzînd repede spre valoarea zero, existentă pe feţele laterale şi aval.

c) În secţiuni cu raportul B/L mai redus (în cazul modelelor nr. 3 şi nr. 4 $B/L \simeq 2{,}5$), cîmpurile de scurgere ocupă o suprafaţă proporţional mai mare, fără a depăşi în mod practic jumătatea secţiunilor. Şi în acest caz presiunile corespunzătoare scad puternic în regiunea amonte.

d) Între spectrele ce caracterizează o secţiune dreptunghiulară şi o secţiune cu rosturi lărgite, diferenţele sînt minime. Acest fapt arată că lărgirea unui rost obişnuit nu atrage după sine o accentuare a infiltraţiilor, prin corpul barajului

ПО ВОПРОСУ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПЛОТИН С РАСШИРЕННЫМИ ШВАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В разделе *А* изложено описание гравитационных плотин с расширенными швами с указанием на преимущества этих плотин по сравнению с обычными гравитационными плотинами, а именно: понижение противодавления, чему способствуют расширенные швы, в которых действует атмосферное давление; лучшие условия для охлаждения бетона во время укладки и уменьшение усадочных напряжений; возможность более легкого доступа для осмотра боковых стен блоков; простые конструктивные формы и бетоны, не отличающиеся от бетонов обычных плотин.

В разделе *Б* изложены критерии, которые были учтены в расчете этих плотин, а именно: устойчивость на опрокидывание, выраженная предельным условием, чтобы вертикальное усилие у основания напорграни было равным нулю и устойчивость на скольжение, выраженное условием равенства в пределе коэффициента скольжения и коэффициента статического трения. Профили, удовлетворяющие одновременно вышеуказанным условиям, были названы оптимальными. В расчетах разделов *В* и *Г* было принято полное противодавление, как и при обычных гравитационных плотинах.

В разделах *В* и *Д* выведены формулы подбора размеров для плотин с расширенными швами без плиты основания (4) и (5) и для таких же плотин с плитой основания (6) и (7). Выведены также и выражения напряжений, действующих в обоих типах плотин. В таблицах 1 и 2

приведены численные результаты сравнительных расчетов, ход которых привел к следующим выводам:

1. В нормальных условиях плотины с расширенными швами без плиты основания приводят к экономии материалов приблизительно в 10% по сравнению с обычными гравитационными плотинами, без заметного повышения максимальных напряжений.

2. В нормальных условиях плотины с расширенными швами с плитой основания приводят к экономии материалов примерно в 5%, по сравнению с обычными гравитационными плотинами; максимальные напряжения практически те же, что и в обычных плотинах.

3. Оба типа плотин с размерами, подобранными по приведенным формулам, имеют в действительности коэффициент запаса больше единицы. Это объясняется тем, что величина противодавления меньше, принятой с запасом в расчете.

В разделе *Д* приведены результаты испытаний на моделях, проведенных по методу электрогидродинамической аналогии. Были произведены определения на 4 моделях, представляющих собой горизонтальные сечения по двум плотинам, принятым в качестве расчетных примеров. Картина гидродинамического спектра, практически сосредоточенного у верхней грани сечения, подчеркивает роль расширенных швов в снятии противодавления.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Гравитационные плотины с расширенными швами: а — без плиты основания и б — с плитой основания.

Рис. 2. — Расчет давлений в прямоугольном сечении (по Телке).

Рис. 3. — Распределение противодавления у основания плотины с расширенными швами — без плиты основания.

Рис. 4. — Распределение противодавления у основания плотины с расширенными швами — с плитой основания.

Рис. 5. — Распределение напряжений от тепловыделения в горизонтальном сечении плотины с расширенными швами (по Бахтольду).

Рис. 6. — Трещины, вызванные усадкой бетона в гравитационной плотине.

Рис. 7. — Силы, действующие на гравитационную плотину с расширенными швами — без плиты основания.

Рис. 8. — Гравитационная плотина с расширенными швами — без плиты основания, с $H = 100$ м, $\gamma_b = 2{,}3$ т/м^3, $m = 0{,}75$, $f = 0{,}65$.

Рис. 9. — Распределение противодавления в сечении основания плотины с расширенными швами — без плиты основания, с $H = 100$ м.

Рис. 10. — Силы, действующие на плотину с расширенными швами — с плитой основания.

Рис. 11. — Гравитационная плотина с расширенными швами — с плитой основания, с $H(1 + \rho) = 100$ м, $\gamma_b = 2{,}3$ т/м^3, $m = 0{,}75$ $f = 0{,}65$.

Рис. 12. — Распределение противодавления в сечении основания плотины с расширенными швами — с плитой основания, с $H(1 + \rho) = 100$ м.

Рис. 13. — Установка для испытаний.

Рис. 14. — Электрическая схема установки.

Рис. 15. — Гидродинамический спектр, полученный на модели сечения основания плотины с расширенными швами — без плиты основания, с $H = 100$ м, $L = 18{,}00$ м и $B = 88{,}59$ м.

Рис. 16. — Гидродинамический спектр, полученный на модели сечения основания плотины с расширенными швами — с плитой основания, с $H(1 + \rho) = 100$ м, $L = 18{,}00$ м и $B = 87{,}54$ м.

Рис. 17. — Линии тока в сечении, расположенном на 50 м ниже горизонта воды ($L = 18{,}00$ м и $B = 46{,}07$ м) обычной гравитационной плотины (сплошные линии, включая эквипотенциальные линии) и плотины с расширенными швами (пунктирные линии).

SUR LES BARRAGES-POIDS À JOINTS CREUX

(RÉSUMÉ)

Le chapitre A présente les barrages-poids à joints creux et relève leurs avantages sur les barrages-poids usuels: la réduction des sous-pressions, assurée par les joints creux, dans lesquels agit la pression atmosphérique; le refroidissement plus rapide du béton au cours du bétonnage et la diminution des efforts de contraction; la possibilité d'un contrôle facile des surfaces latérales des blocs composants; la simplicité des formes de construction et le béton qui ne diffère pas de celui des barrages usuels.

Le chapitre B expose les critériums considérés pour le calcul de ces barrages: la stabilité au renversement, exprimée par la condition limite que l'effort vertical au pied amont soit nul, et la stabilité au glissement, exprimée par la condition d'égalité à la limite entre le coefficient de glissement et celui de frottement statique. Les profils qui satisfont en même temps aux deux conditions ont été dénommés profils optimes. Pour les calculs effectués dans les chapitres C et D on a considéré la valeur intégrale des sous-pressions tout comme pour le cas des barrages-poids usuels.

Dans les chapitres C et D, on établit les formules servant à déterminer les dimensions des barrages à joints creux, sans radier, (4) et (5) et avec radier, (6) et (7). On déduit également les expressions des efforts qui sollicitent les deux types de barrages. Les tableaux 1 et 2 présentent les résultats de certains calculs numériques comparatifs, qui ont conduit aux conclusions suivantes:

1. Dans des conditions normales, les barrages-poids à joints creux, sans radier, réalisent une économie de matériel d'environ 10 % par comparaison aux barrages-poids usuels, sans augmentation sensible des efforts maximums.

2. Dans des conditions normales, les barrages-poids à joints creux, à radier, réalisent une économie de matériel d'environ 5 % par comparaison aux barrages-poids usuels; les efforts maximums sont pratiquement égaux à ceux des barrages-poids usuels.

3. Les deux types de barrages, dont les dimensions sont déterminées d'après les formules indiquées, possèdent en réalité des coefficients de sécurité supérieurs à l'unité. Ceci du fait que les sous-pressions ont des valeurs inférieures aux valeurs admises dans le calcul.

Le chapitre E expose les résultats de certaines expériences sur modèles, effectuées d'après la méthode de l'analogie électro-hydrodynamique. Des déterminations ont été faites sur quatre modèles qui représentent des sections horizontales à travers deux barrages, pris pour exemples de calcul. Les images des spectres hydrodynamiques, pratiquement concentrés dans la région amont des sections, mettent en évidence le rôle de décharge de pression des joints creux.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Barrages-poids à joints creux: *a)* sans radier, *b)* à radier.
Fig. 2. — Calcul des pressions dans une section rectangulaire (selon T ö l k e).
Fig. 3. — Répartition des sous-pressions à la base d'un barrage à joint creux, sans radier.
Fig. 4. — Répartition des sous-pressions à la base d'un barrage à joints creux, à radier.
Fig. 5. — Répartition des efforts provoqués par la chaleur de prise dans une section horizontale de barrage à joints creux (selon B ä c h t o l d).
Fig. 6. — Fissures dues à la contraction du béton dans un barrage-poids.
Fig. 7. — Les forces qui agissent sur un barrage-poids à joins creux, sans radier.

Fig. 8. — Barrage-poids à joints creux, sans radier, pour lequel $H = 100$ m, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3, $m = 0{,}75$, $f = 0{,}65$.

Fig. 9. — Répartition des sous-pressions dans la section de fondation d'un barrage à joints creux, sans radier, pour lequel $H = 100$ m.

Fig. 10. — Les forces qui agissent sur un barrage-poids à joints creux, à radier.

Fig. 11. — Barrage-poids à joints creux, à radier, pour lequel $H(1 + \rho) = 100$ m, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3, $m = 0{,}75$, $f = 0{,}65$.

Fig. 12. — Répartition des sous-pressions dans la section de fondation d'un barrage à joints creux, à radier, pour lequel $H(1 + \rho) = 100$ m.

Fig. 13. — Le dispositif d'expérimentation.

Fig. 14. — Le schéma électrique du dispositif d'expérimentation.

Fig. 15. — Spectre hydrodynamique obtenu sur le modèle de la section de fondation d'un barrage-poids à joints creux sans radier, avec $H = 100$ m, $L = 18{,}00$ m et $B = 88{,}59$ m.

Fig. 16. — Spectre hydrodynamique obtenu sur le modèle de la section de fondation d'un barrage-poids à joints creux à radier, avec $H(1 + \rho) = 100$ m, $L = 18{,}00$ m et $B = 87{,}54$ m.

Fig. 17. — Lignes de courant dans une section située à 50 m sous le niveau de l'eau ($L = 18{,}00$ m et $B = 46{,}07$ m): dans un barrage-poids usuel (tracés continus, y compris les lignes équipotentielles) et dans un barrage à joints creux (tracés interrompus).

BIBLIOGRAFIE

1. R. Prişcu, Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 101.
2. F. Tölke, *Talsperren*. Berlin, 1938.
3. J. Bächtold, Schweizerische Bauzeitung, 1952, nr. 40, p. 583.
4. H. Juillard, Schweizerische Bauzeitung, 1952, nr. 35, p. 495; 1952, nr. 48, p. 677.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

TERMOCINETICĂ

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI DE VARIABILE ÎN LEGĂTURĂ CU ECUAŢIA CĂLDURII

DE

L. HAMBURGER

I

1. Considerăm ecuaţia omogenă a conducţiei căldurii prin medii omogene însă anizotrope şi lipsite de mişcări relative ale elementelor lor. În spaţiul n-dimensional ecuaţia are forma

$$c \cdot \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \tag{1}$$

Am notat aici cu u, temperatura mediului în punctul $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ la momentul t; c, căldura specifică a mediului raportată la unitatea de greutate şi la presiune constantă; γ, greutatea specifică a mediului; λ_i, coeficientul de conducţie termică în direcţia axei i.

Punînd aici

$$\frac{\lambda_i}{c \cdot \gamma} = a_i \tag{2}$$

şi făcînd substituţia

$$\frac{x_i}{\sqrt{a_i}} = x_i', \tag{3}$$

dar scriind, pentru simplitate, x_i în loc de x_i', ecuaţia (1) ia forma, simetrică în coordonatele (x_i) şi independentă de natura mediului

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \tag{4}$$

Pentru ecuaţia unidimensională se cunoaşte o transformare

$$x' = \frac{x}{t}\,; \quad t' = -\frac{1}{t}\,; \quad u = \frac{u'}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{5}$$

care alături de transformarea afină

$$x' = kx + \alpha; \quad t' = k^2 t + \beta, \tag{6}$$

lasă invariantă forma ecuației căldurii. P a u l A p p e l a arătat că orice altă transformare care lasă neschimbată ecuația unidimensională a căldurii, modificînd covariant variabila u, se poate alcătui din combinări ale acestor două transformări.

2. În cele ce urmează, vom căuta să determinăm transformări analoge care lasă neschimbată ecuația căldurii pentru spațiul n — dimensional.

În acest scop punem

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \varphi_i(x_j, t); \qquad i, j = 1, 2 \ldots n, \\ \tau &= \psi(x_j, t) \\ u &= \rho(y_i, \tau) \cdot \sigma(x_j, t). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Această transformare a ecuației (4) trebuie să ne conducă la ecuația

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \sum_1^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_i^2}. \tag{8}$$

Pentru a determina transformarea (7) formăm expresiile

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \cdot \rho + \sigma \cdot \left\{ \sum_k \frac{\partial \rho}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\} \tag{8'}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2} \cdot \rho + 2 \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \left\{ \sum_k \frac{\partial \rho}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\} + \\ + \sigma \left\{ \sum_k \sum_j \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_k \partial y_j} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial \rho}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i^2} + \right. \end{aligned} \tag{8''}$$

$$\left. + 2 \sum_k \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_k \partial \tau} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \cdot \rho + \sigma \left\{ \sum_k \frac{\partial \rho}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} \tag{8'''}$$

Cu ajutorul expresiilor (8'') și (8''') formăm expresia corespunzătoare ecuației (4)

$$\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Pentru ca transformata acestei expresii să aibă forma

$$f(x_j, t) \cdot \left\{ \sum_i \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_i^2} - \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right\},$$

este necesar ca următoarele condiţii să fie satisfăcute

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \sum_i \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{2}{\sigma}\sum_i \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \\
&2)\ \sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0 \\
&3)\ \sum_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \\
&4)\ \sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 \\
&5)\ \sum_i \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\
&6)\ \sum_i \left\{\sigma \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right\} = \sigma \cdot \frac{\partial y_k}{\partial t} \cdot
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

3. Din condiţia (9—3)

$$\sum_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2 = 0,$$

rezultă că ψ poate fi o funcţie reală numai dacă

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots n, \quad (10)$$

astfel că funcţia ψ nu depinde de (x_i). Ca urmare condiţia (9—4) este satisfăcută identic, iar condiţia (9—1) devine

$$\sum_i \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \quad (11)$$

Cum în stînga avem o sumă de pătrate, iar în dreapta o funcţie independentă de (x_i), rezultă că variabilele (y_k) sînt funcţii liniare de (x_i), cu coeficienţii funcţii de timp.

În consecinţă

$$y_k = \sum_i c_{ik}\, x_i + d_k. \quad (12)$$

Introducînd aceste valori în condiţiile (9—2) şi (11), rezultă:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \sum_i c_{ik}^2 = \frac{\partial \psi}{\partial t} \\
&2)\ \sum_i c_{ik} \cdot c_{ij} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Făcînd substituţiile

$$\left.\begin{aligned} z_i &= x_i \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{1/2} \\ c_{ik} &= \alpha_{ik} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

relaţiile (12) iau forma

$$y_k = \sum_i \alpha_{ik} \cdot z_i + d_k \tag{15}$$

iar relaţiile (13) se reduc la

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \alpha_{ik}^2 &= 1 \\ \sum_i \alpha_{ik} \cdot \alpha_{ij} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ceea ce arată că (α_{ik}) reprezintă o rotaţie a axelor de coordonate. Pe de altă parte, prima relaţie (14) reprezintă o dilataţie uniformă a coordonatelor (x_i) cu coeficientul $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{1/2}$. În consecinţă, transformarea de coordonate (12) împreună cu condiţiile (13) reprezintă:

— o dilataţie uniformă (omotetie) combinată cu
— o rotaţie a axelor de coordonate şi
— o mutare a originii în punctul (d_k).

4. Relaţiile (12) arată că

$$\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i^2} = 0,$$

şi în consecinţă ecuaţiile de condiţie (9—6) se reduc la următoarele:

$$2 \sum_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sigma \cdot \frac{\partial y_k}{\partial t}, \tag{17}$$

care reprezintă un sistem liniar neomogen în variabilele $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\right)$, al cărui determinant este

$$|c_{ki}| = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \neq 0.$$

Sistemul (17) poate fi deci rezolvat în raport cu variabilele $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\right)$, sub forma

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \sigma \cdot Q_i, \tag{18}$$

unde Q_i reprezintă un polinom de gradul întîi în (x_i), cu coeficienţii funcţii de timp.

Cum funcţia $\sigma(x_i, t)$ trebuie să satisfacă condiţia (9—5), adică ecuaţia căldurii, rezultă că această funcţie este continuă $(D - 2)$ şi deci putem forma

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \, \partial x_k} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \cdot Q_i + \sigma \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial x_k} = \sigma \left\{ Q_k Q_i + \frac{\partial Q_i}{\partial x_k} \right\}$$

şi în mod analog

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_k\,\partial x_i} = \sigma\left\{Q_i\,Q_K + \frac{\partial Q_k}{\partial x_i}\right\}.$$

Aceste două expresii fiind identice, rezultă

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_i}, \tag{19}$$

ceea ce arată că există un polinom R, de gradul al doilea în variabilele (x_i), cu coeficienţii funcţii de variabila t, astfel încît

$$Q_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} \tag{20}$$

Cu această valoare obţinem

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} = \sigma\cdot\frac{\partial R}{\partial x_i}\cdot \tag{21}$$

Înmulţind ambii membri cu dx_i şi sumînd în raport cu indicele i, obţinem

$$\frac{1}{\sigma}\cdot d\sigma = dR \tag{22}$$

şi prin integrare

$$\sigma = \varphi(t)\cdot e^R \tag{23}$$

Soluţia aceasta conţine un factor încă nedeterminat $\varphi(t)$. Ea trebuie să satisfacă ecuaţia căldurii. Ori din derivarea expresiei (21) în raport cu x_i, rezultă

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial R}{\partial x_i} + \sigma\cdot\frac{d^2R}{\partial x_i^2} = \sigma\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2}\right\}.$$

De asemenea, derivînd expresia (23) în raport cu timpul, obţinem:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \left\{\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t}\right\}\cdot\sigma$$

şi în consecinţă

$$\sum_i\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_i\frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t}, \tag{24}$$

ecuaţie care trebuie satisfăcută de polinomul $R(x_i,t)$.

Scris explicit, acest polinom are forma

$$R = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k a_{ik}\,x_i\,x_k + \sum_i b_i\,x_i + c\,. \tag{25}$$

La termenul liber c putem renunţa, întrucît el poate fi cuprins în funcţia arbitrară $\varphi(t)$. Dacă introducem această expresie în ecuaţia (24) şi identificăm coeficienţii termenilor în x_i şi termenii liberi, obţinem

$$\left.\begin{aligned} 1)\ & \dot{a}_{ij} = 2\sum_k a_{ik}\cdot a_{kj} \\ 2)\ & \dot{b}_i = 2\,b_i\sum_j a_{ij} \\ 3)\ & \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \sum_i \left(a_{ii} + b_i^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Din relaţia (25) rezultă că putem considera, fără a pierde din generalitate

$$a_{ik} = a_{ki},$$

astfel încît ecuaţiile (26—1) reprezintă un sistem de $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaţii de ordinul întîi însă neliniare, în tot atîtea variabile.

5. Rezolvarea directă a sistemului este foarte greoaie. Vom căuta deci să-l soluţionăm pe cale matricială.

În acest scop considerăm matricea simetrică

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

derivata ei în raport cu timpul

$$\dot{A} = \| \dot{a}_{ik} \|.$$

Relaţiile (26—1) se scriu cu ajutorul acestor matrice, sub forma unei ecuaţii tip Riccati

$$\dot{A} = 2\,A^2 \tag{27}$$

care se mai poate pune şi sub forma

$$\dot{A}\,A^{-2} = 2\,E, \tag{28}$$

înţelegînd prin E matricea diagonală unitară. Ecuaţia (28) se integrează imediat sub forma

$$A^{-1} = -\,2\,(Et + G), \tag{29}$$

unde G reprezintă o matrice constantă, încă nedeterminată.

În consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei (27) va fi

$$A_1 = -\frac{1}{2}(Et + G)^{-1} \tag{30}$$

precum şi

$$A_1(Et+G) = -\frac{1}{2}E \tag{31}$$

Ultima relaţie ne va servi la determinarea efectivă a matricei A_1.

Observăm că alături de soluţia (30), ecuaţia (27) mai admite, ca orice ecuaţie Riccati cu coeficienţi constanţi şi două soluţii particulare constante, care în cazul de faţă se confundă

$$A_2 = 0 \tag{30'}$$

Asupra acestei soluţii particulare vom reveni. Deocamdată să determinăm soluţia A_1. Fie g_{ik} termenul generic al matricei G şi δ_{ik} simbolul lui Kronecker-Weierstrass ($\delta_{ik}=0,\ i\neq k;\ \delta_{ii}=1$).

Termenul generic al matricei $(Et+G)$ va fi $(\delta_{ik}t+g_{ik})$ şi este deci liniar în t.

Relaţia (31) scrisă explicit în funcţie de termenii matricelor componente este

$$\sum_i a_{ij}(g_{jk}+\delta_{jk}t) = -\frac{1}{2}\delta_{ik}, \tag{32}$$

adică un sistem liniar de ecuaţii în a_{ij}. Pentru ca sistemul să fie compatibil, trebuie ca

$$\Delta = \left| g_{jk}+\delta_{jk}\cdot t \right|,$$

determinantul coeficienţilor (care este de fapt polinomul matricei G, dacă în loc de t se pune $(-t)$), să fie diferit de zero. Acest determinant se scrie şi sub forma

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n}(t-t_i),$$

t_i fiind rădăcinile ecuaţiei $\Delta = 0$.

Aplicînd regula lui Kramer avem

$$a_{ik} = \frac{P_{ik}}{\Delta}, \tag{33}$$

cu P_{ik} polinom de gradul $(n-1)$ în t. În consecinţă, putem descompune membrul al doilea într-o sumă de fracţii simple

$$a_{ik} = \sum_l \frac{\beta_{ik}^l}{t-t_l}, \tag{34}$$

în ipoteza, care după cum se va vedea, nu diminuează generalitatea că toate rădăcinile ecuaţiei $\Delta=0$ sînt simple. Expresia (34) pentru a_{ik} arată că matricial putem scrie

$$A_1 = \sum_l \frac{B_l}{t-t_l}, \tag{35}$$

unde $B_l = \| \beta_{ik}^l \|$ reprezintă matricile alcătuite din coeficienţii β_{ik}^l.

Această expresie introdusă în relaţia (31) conduce la relaţia

$$\sum_l \frac{B_l}{t-t_l}(Et+G) = -\frac{1}{2}E, \tag{36}$$

care se mai poate scrie şi sub forma

$$\sum_l \frac{B_l}{t - t_l} [E(t - t_l) + Et_l^2 + G] = -\frac{1}{2} E$$

sau încă

$$\sum_l B_l + \sum_l \frac{B_l (Et_l + G)}{t - t_l} = -\frac{1}{2} E$$

De aici prin identificarea termenilor corespunzători din ambii membri ai relaţiei obţinem

$$\left.\begin{aligned} &1) \quad \sum_l B_l = -\frac{1}{2} E \\ &2) \quad B_l [Et_l + G] = 0, \quad l = 1,2 \ldots n \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Cum datorită relaţiei (37—1) nu toate matricele B_l sînt nule, rezultă că

$$Et_l + G = 0 \quad , \quad l = 1,2 \ldots n, \tag{38}$$

relaţie valabilă pentru orice t_l. Deci

$$t_1 = t_2 \ldots = t_n = t_0 \tag{39}$$

şi

$$G = -Et_0 \tag{40}$$

Introducînd relaţiile (37—1) şi (39) în (35) obţinem

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{E}{t - t_0}, \tag{41}$$

sau explicit

$$\left.\begin{aligned} a_{ii} &= -\frac{1}{2(t - t_0)} \\ a_{ik} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{41'}$$

Dacă am fi presupus că determinantul Δ are rădăcini multiple, ceea ce este de fapt cazul, am fi avut o ecuaţie de forma

$$\sum_l \left[\frac{B_l}{t - t_l} + \frac{C_l}{(t - t_l)^2} + \ldots\right](Et + G) = -\frac{1}{2} E, \tag{36'}$$

care conduce la acelaşi rezultat, pe o cale cu totul analogă.

Cu aceste valori, ecuaţii (26—2) devin

$$\dot{b}_i = 2b_i \cdot a_{ii} = -\frac{b_i}{t - t_0}, \tag{42}$$

de unde

$$b_i = \frac{k_i}{t - t_0}. \tag{43}$$

În sfîrşit, ecuaţia (26—3) devine

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = -\frac{n}{2(t-t_0)} + \frac{\Sigma k_i^2}{(t-t_0)^2}$$

şi prin integrare

$$\varphi = \frac{A_0}{(t-t_0)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\Sigma k_i^2}{t-t_0}\right). \tag{44}$$

Acum dispunem de toate elementele necesare determinării polinomului R şi funcţiei σ

$$R_1 = -\frac{\sum\limits_i x_i^2}{4(t-t_0)} + \frac{\Sigma k_i x_i}{t-t_0} \tag{45}$$

şi în consecinţă

$$\sigma_1 = \frac{A_0}{(t-t_0)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum\limits_i x_i^2}{4(t-t_0)} + \frac{\sum\limits_i k_i (x_i - k_i)}{t-t_0}\right) \tag{46}$$

6. Înainte de a trece mai departe, să revenim şi la soluţia particulară (30′)

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ a_{ik} = 0 \end{cases} \qquad i,\ k,\ = 1, 2, \ldots n.$$

Cu ajutorul ei ecuaţiile (26—2) devin

$$\begin{cases} \dot{b}_i = 0 \\ b_i = k_i \end{cases} \tag{47}$$

De asemenea ecuaţia (26—3):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} &= \sum_i k_i^2 \\ \varphi &= A_0 \exp\left[(t-t_0)\cdot \sum_i k_i^2\right], \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

astfel încît

$$\left.\begin{aligned} R_2 &= \sum_i k_i x_i \\ \sigma_2 &= A_0 \exp\left[\sum_i k_i x_i + \sum_i k_i^2 (t=t_0)\right] \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

7. Cu aceste date putem determina transformarea (12). În acest scop revenim la ecuaţiile (17) care în baza transformării (12) iau forma

$$2\sum_i c_{ik} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \sigma\left[\sum_i \dot{c}_{ik} x_i + \dot{d}_k\right]. \tag{50}$$

Pe de altă parte, ecuaţiile (18)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \sigma \frac{\partial R}{\partial x_i},$$

iau pentru valorile (45) şi (49) ale lui R, respectiv formele

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_i} &= \sigma_1 \cdot \frac{-(x_i - 2k_i)}{2(t - t_0)} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_i} &= \sigma_2 \cdot k_i \end{aligned}\right\}$$

şi, în consecinţă, în primul caz avem

$$2 \sum_i c_{ik} \frac{-(x_i - 2k_i)}{2(t - t_0)} = \sum \dot{c}_{ik} x_i + \dot{d}_k$$

şi prin identificare

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_{ik} &= -\frac{c_{ik}}{t - t_0} \\ \dot{d}_k &= 2 \sum_i \frac{k_i c_{ik}}{t - t_0}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

de unde prin integrare obţinem

$$\left.\begin{aligned} 1)\ c_{ik} &= \frac{m_{ik}}{t - t_0} \\ 2)\ d_k &= -2 \frac{\sum_i k_i m_{ik}}{(t - t_0)} + n_k \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Aici m_{ik} reprezintă constante de integrare. Relaţiile (52—1) trebuie însă să satisfacă relaţiile de condiţie (13). De aici din (13—1)

$$\frac{\sum_i (m_{ik})^2}{(t - t_0)^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{53}$$

şi prin integrare

$$\psi = -\frac{1}{(t - t_0)} \sum_i m_{ik}^2 + c_0, \tag{54}$$

relaţie valabilă pentru orice valoare a lui k deci

$$\sum_i m_{ik}^2 = c^2, \qquad k = 1, 2 \ldots n \tag{55}$$

Pe de altă parte, din condiţiile (13—2) rezultă

$$\sum_i m_{ik} \cdot m_{ij} = 0 \tag{56}$$

Aceasta arată că punînd

$$m_{ik} = c \cdot \alpha_{ik}$$

matricea $\|\alpha_{ik}\|$ reprezintă o rotaţie a axelor iar matricea $\|m_{ik}\|$ o rotaţie însoţită de o dilataţie cu coeficientul c. În consecinţă vom avea transformarea

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c \cdot \frac{\sum_i \alpha_{ik}(x_i - 2k_i)}{t - t_0} + n_k \\ \tau &= -\frac{c^2}{t - t_0} + c_0 \\ u &= \frac{A_0}{(t-t_0)^{\frac{n}{2}}} \cdot \varphi \cdot \exp\left[\frac{-\sum_i x_i^2 + 4\sum_i k_i (x_i - k_i)}{4(t - t_0)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Cum era de aşteptat, soluţia (57) este obţinută cu aproximaţia unei dilataţii de coeficient c şi a unei rotaţii de matrice $\|\alpha_{ik}\|$, ambele arbitrare.

8. Să revenim acum la soluţia a doua. Cum aici în baza relaţiei (49) $\frac{\partial R}{\partial x_i} = k_i$ în locul ecuaţiei (50) avem,

$$2\sum_i c_{ik} \cdot k_i = \sum_i \dot{c}_{ik} x_i + \dot{d}_k$$

de unde, prin identificare, se obţine sistemul

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_{ik} &= 0 \\ \dot{d}_k &= 2\sum_i c_{ik} \cdot k_i , \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

care integrat dă

$$\left.\begin{aligned} c_{ik} &= m_{ik} \\ d_k &= 2\sum_i m_{ik} k_i (t - t_0) + n_k . \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Făcînd ca mai sus

$$m_{ik} = c \cdot \alpha_{ik} ,$$

observăm că şi aici $\|\alpha_{ik}\|$ reprezintă o rotaţie a axelor, iar c o dilataţie omogenă. Transformarea căutată devine deci

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c \cdot \sum_i \alpha_{ik}\left[x_i + 2k_i (t - t_0)\right] + n_k \\ \tau &= c^2 \cdot (t - t_0) + c_0 \\ u &= A_0 \varphi \cdot \exp\left[\sum_i k_i x_i + \sum_i k_i^2 (t - t_0)\right] \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

II

9. Rezultatele de mai sus se pot obține și numai pe cale matricială.
În acest scop vom exprima vectorul

$$\bar{x} = \sum_i x_i \cdot \bar{\varepsilon}_i,$$

cu ajutorul matricei cu o coloană

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| \tag{61}$$

și cu matricea transpusă

$$\widetilde{X} = \| x_1 x_2 \ldots . x_n \|. \tag{62}$$

Produsul scalar al unui vector prin el însuși va fi

$$\widetilde{X} X = \sum_i x_i^2.$$

Operatorul lui Hamilton se va scrie

$$D_x = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \tag{63}$$

și sub forma contravariantă (transpusă)

$$\widetilde{D}_x = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|, \tag{63'}$$

astfel că operatorul lui Laplace ia înfățișarea

$$(\widetilde{D}_x D_x) = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta. \tag{64}$$

Observăm că produsul acestor operatori nu este comutativ, întrucît prin inversarea succesiunii, în locul laplacianului, apare hessianul.

Ecuația căldurii ia forma

$$\widetilde{D}_x D_x u = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{65}$$

Operatorul lui Laplace aplicat unui produs de funcții $\varphi \cdot \psi$ este, folosind această scriere,

$$\widetilde{D}_x D_x (\varphi \cdot \psi) = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\varphi\psi) = (\widetilde{D}_x D_x \varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot (\widetilde{D}_x D_x \psi) + 2 (\widetilde{D}_x \varphi)(D_x \psi),$$

în baza relației de simetrie,

$$(\widetilde{D}_x \varphi)(D_x \psi) = (\widetilde{D}_x \psi) D_x \varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i}.$$

Relaţia (12) se scrie matricial

$$Y = CX + D, \tag{66}$$

unde

$$C = \| c_{ik} \| \quad \text{şi} \quad D = \left\| \begin{matrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{matrix} \right\|$$

Relaţia liniară (66) dintre Y şi X atrage după sine o relaţie liniară între hamiltonieni

$$\left.\begin{aligned} D_y &= D_x C^{-1} = C^{-1} D_x \\ \widetilde{D}_y &= \widetilde{D}_x C^{-1} = C^{-1} \widetilde{D}_x \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

şi analog

$$\left.\begin{aligned} C D_y &= D_y C = D_x \\ C \widetilde{D}_y &= \widetilde{D}_y C = \widetilde{D}_x. \end{aligned}\right\} \tag{67'}$$

Aceasta întrucît operatorul D_x care se referă la variabilele (x_i) nu afectează multiplicatorii care nu conţin aceste variabile, ori care ar fi natura lor.

10. Aplicînd laplacianul expresiei

$$u(x_i, t) = \varphi(y_i, \tau) \cdot \sigma(x_i, t)$$

în scriere matricială obţinem

$$\widetilde{D}_x D_x u = (\widetilde{D}_y C)(C D_y)\varphi \cdot \sigma + \varphi \cdot (\widetilde{D}_x D_x)\sigma + 2(\widetilde{D}_y C)\varphi \cdot D_x \sigma. \tag{68}$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \sigma + \widetilde{D}_y \varphi \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} \cdot \sigma. \tag{68'}$$

Pentru ca după egalarea membrilor din dreapta ai relaţiilor (68') să obţinem în variabilele (φ, y_i, τ) tot ecuaţia căldurii, trebuie să avem

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (\widetilde{D}_y C)(\widetilde{C D}_y) \cdot \varphi = \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right) \\ &2)\ (\widetilde{D}_x D_x)\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &3)\ 2(\widetilde{D}_y C)\varphi \cdot D_x \sigma = \widetilde{D}_y \varphi \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} \cdot \sigma. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Relaţia (69—1) conduce la

$$C^2 = \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot E \tag{70}$$

care rezolvată dă

$$C = B\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^{1/2} \quad \text{cu} \quad B^2 = E, \tag{71}$$

B fiind o rotaţie arbitrară.

Relaţia (69—3), cu observaţia că

$$(\widetilde{D}_y C)\,\varphi = (\widetilde{D}_y \varphi)\cdot C,$$

devine

$$2C\cdot D_x\sigma = \frac{\partial Y}{\partial t}\cdot\sigma \tag{72}$$

sau încă

$$\frac{1}{\sigma} D_x\sigma = \frac{1}{2} C^{-1}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t}, \tag{72'}$$

Cum însă în baza relaţiei (66)

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \dot{C}X + \dot{D},$$

ecuaţia (72') ia forma

$$\frac{1}{\sigma}\cdot D_x\sigma = \left(\frac{1}{2} C^{-1}\dot{C}\right) X + \frac{1}{2} C^{-1}\dot{D}\ . \tag{73}$$

Dacă aici punem

$$\left.\begin{aligned} 1)\ \frac{1}{2} C^{-1}\dot{C} &= H \\ 2)\ \frac{1}{2} C^{-1}\dot{D} &= G, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

ecuaţia (73) se mai poate scrie

$$\frac{1}{\sigma}\cdot D_x\sigma = HX + G\,. \tag{75}$$

Observăm că punînd pentru simplitate $a = \left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^{1/2}$.

rezultă:

$$H = \frac{1}{2} C^{-1}\dot{C} = \frac{1}{2} B^{-1} B\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\cdot E = b\,E,$$

ceea ce arată că matricea H este o matrice diagonală cu termenii identici. Trebuie reţinut că am făcut notaţia

$$b = \frac{\dot{a}}{a},$$

asupra căreia vom reveni.

Cu aceste notaţii relaţia (74—2) se scrie

$$G = \frac{1}{2} C^{-1}\dot{D} = \frac{1}{2a} B^{-1}\dot{D}\ ,$$

de unde rezultă că G păstrează caracterul vectorial al matricei $\dot{D}$. În consecinţă, ecuaţia (75) este o relaţie între vectori (matrice cu o singură coloană). Putem deci transpune concomitent toţi vectorii şi scrie

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \widetilde{D}_x \sigma = H \widetilde{X} + \widetilde{G} \cdot$$

Această ecuaţie o înmulţim scalar (în dreapta) cu vectorul

$$dX = \left\| \begin{matrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{matrix} \right\|$$

şi obţinem

$$E \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot d\sigma = H(\widetilde{X} dX) + (\widetilde{G} dX)\, E = b \cdot E \cdot (\widetilde{X} dX) + (\widetilde{G} dX) \cdot E \cdot$$

Această ultimă ecuaţie se reduce la ecuaţia scalară

$$\frac{1}{\sigma} d\sigma = b \sum_i x_i \, dx_i + \sum_i g_i \, dx_i \tag{76}$$

care integrată dă

$$\sigma = A_0 \cdot \exp \left\{ \frac{b \cdot \Sigma x_i^2}{2} + \sum_i g_i \, x_i + f \right\} \tag{77}$$

în care b, g_i şi f sînt funcţii de timp.

Introducînd în ecuaţia căldurii această valoare a funcţiei σ, obţinem prin identificare

$$\left.\begin{aligned} 1)\ \dot{b} &= 2b^2 \\ 2)\ \dot{G} &= 2\, bG \\ 3)\ \dot{f} &= nb + (\widetilde{G} G). \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Din prima ecuaţie, (78) de timp Riccati, cu coeficienţi constanţi, rezultă cuplul de soluţii

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{2(t - t_0)} \\ b_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

cu ajutorul acestor soluţii relaţia

$$\frac{\dot{a}}{a} = b$$

conduce la valorile

$$a_1 = c\,(t - t_0)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^{\frac{1}{2}}_{a_1 = c} \tag{79'}$$

şi în consecinţă la

$$H_1 = -\frac{1}{4\,(t - t_0)} \cdot E \,;\ H_2 = 0 \cdot \tag{80}$$

Vectorul G rezultă din relaţiile (78—2) şi (79)

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{K}{t-t_0} \\ G_2 &= K, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

K fiind un vector constant arbitrar.

Analog

$$\left.\begin{aligned} \dot{f}_1 &= -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{t-t_0} + \frac{\Sigma k_2^2}{(t-t_0)^2} \\ \dot{f}_2 &= \Sigma k_i^2 \end{aligned}\right\}$$

şi prin urmare

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= ln\,(t-t_0)^{-\frac{n}{2}} - \frac{\Sigma k_i^2}{t-t_0} + ln\,A_0 \\ f_2 &= \mathrm{D}\,k_i^2(t-t_0) + ln\,A_0, \end{aligned}\right\}$$

A_0 fiind o constantă arbitrară.

În acest fel funcţia σ este pe deplin determinată:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{A_0}{(t-t_0)^{n/2}}\cdot\exp\left[\frac{-\Sigma x_i^2}{H\,(t-t_0)} + \sum\frac{k_i\,(x_i-k_i)}{(t-t_0)}\right] \\ \sigma_0 &= A_0\cdot\exp\left[\Sigma k_i x_i + \Sigma k_i^2\,(t-t_0)\right], \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

adică aceleaşi valori ca mai sus (46) şi (49).

Determinarea coeficienţilor c_{ik} şi d_k se face în mod analog.

Relaţiile (71), (74) şi (80) conduc imediat la valorile

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{c\cdot B}{t-t_0} \\ \tau_1 &= -\frac{c^2}{t-t_0} + c_0 \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

respectiv

$$\left.\begin{aligned} C^2 &= c\cdot B \\ \tau_2 &= c^2\,(t-t_0) + c_0 \end{aligned}\right\} \tag{83'}$$

iar relaţiile (74—2) şi (81) valorile

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= -\frac{2BK}{t-t_0} + N \\ D_2 &= 2BK\,(t-t_0) + N \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

N având caracterul unui vector arbitrar.

Cu aceste valori obţinem aceleaşi rezultate ca cele obţinute mai sus sub (57) şi (60).

III

11. Soluţiile (57) şi (60) conţin o dilataţie, o rotaţie a axelor şi o deplasare a originii noilor axe de coordonate.

Funcţia multiplicatoare σ, care este şi o soluţie a ecuaţiei căldurii, conţine factori exponenţiali, depinzînd de un vector arbitrar $K(k_1, k_2 \ldots k_n)$. Pentru a studia proprietăţile soluţiei, toate aceste elemente sînt neesenţiale.

Deci, dacă lăsăm să subziste dilataţia, însă facem rotaţia identică E, care lasă neschimbate axele, renunţăm la deplasarea originii şi suprimăm termenii conţinînd vectorul arbitrar K, cele două transformări iau formele simplificate şi uşor de urmărit

$$\left.\begin{aligned} y_k &= \frac{c \cdot x_k}{t - t_0} \\ \tau &= -\frac{c^2}{t - t_0} \\ u &= \frac{A_0}{(t-t_0)^{n/2}} \cdot v \cdot \exp\left[-\frac{\Sigma x_i^2}{4\,(t - t_0)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{57'}$$

şi în mod analog

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c \cdot x_k \\ \tau &= c^2\,(t - t_0) \\ u &= A_0\, v \end{aligned}\right\} \tag{60'}$$

Asemănarea cu transformările cazului unidimensional este evidentă sub această formă.

Prima soluţie pentru $v = \text{const.}$ dă

$$u = \sigma = \frac{A_0}{(t - t_0)^{n/2}} \cdot \exp\left\{\frac{-\Sigma x_i^2}{4\,(t - t_0)}\right\} \tag{85}$$

aşa numita *soluţie fundamentală* care stă la baza integrării după P o i s s o n a ecuaţiei neomogene a căldurii.

A doua soluţie reprezintă o similitudine termică. Aceasta nu trebuie să surprindă, întrucît principiul similitudinii nu face decît să afirme că ecuaţia căldurii rămîne invariantă la o schimbare afină de coordonate. Or, ipoteza de la care am pornit cerea tocmai invarianţa ecuaţiei căldurii şi obţinerea soluţiei (60′) confirmă exactitatea principiului în cazul acestei ecuaţii.

IV

12. Ecuaţia căldurii, în anumite condiţii, se poate reduce la o ecuaţie diferenţială ordinară. Dacă facem în acest scop transformarea de coordonate, simetrică în raport cu x_i,

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi\,(r, t) \quad ; \quad r^2 = \sum_1^n (x_i - x_{i0})^2 \\ \tau &= \psi\,(t), \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

îngrădim voit domeniul de aplicare a ecuației ce va rezulta. Pe de altă parte, introducerea lui r, reduce la cazul unidimensional, cilindric sau sferic, posibilitățile de aplicație a soluțiilor.

Datorită transformării (86), avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y_i}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2},$$

precum și

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Cum însă

$$r^2 = \sum_1^n (x_i - x_{i0})^2,$$

rezultă că

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_{i0}}{r} \quad ; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x_i - x_{\theta})^2}{r^3}.$$

Introducînd aceste valori în ecuația căldurii obținem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{87}$$

Pentru ca ecuația să nu depindă decît de variabila y, este suficient ca una din următoarele condiții să fie satisfăcută

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= 0\\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Prima condiție exprimă că variabila u este independentă de noua variabilă τ; a doua că această variabilă τ se reduce la o constantă, ceea ce indirect revine tot la prima condiție.

În supoziția că una din aceste condiții este satisfăcută, ecuația (87) se reduce la

$$\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 \cdot u'' + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial t}\right) u' = 0 \tag{89}$$

13. Determinarea variabilei y în raport cu r și t se poate obține printr-un calcul dimensional cu aplicarea legilor similitudinii termice. Este totuși posibil, fără a recurge la aceste legi, ca printr-un calcul asemănător calculului divizorilor, cunoscut din aritmetică, să se obțină același rezultat.

În acest scop este necesară supoziția, mai puțin particulară decît o cere calculul dimensional, că în funcția y variabilele r și t sînt separabile sub forma

$$y = R(r) \cdot T(t) \tag{90}$$

Drept modul vom lua chiar mărimea y, astfel că prin

$$[F] = a,$$

vom înţelege că a reprezintă ultimul cît al diviziunii succesive a mărimii F prin puterile crescătoare ale lui y. Cu această notaţie avem evident

$$[y] = 1$$

sau ceea ce este echivalent

$$[\mathrm{R} \cdot \mathrm{T}] = 1. \tag{91}$$

Examinîd sub acest aspect diferiţii termeni din coefcienţii ecuaţiei (89), ajungem la următoarele relaţii modulare

$$\left[\frac{\partial y}{\partial r}\right]^2 = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\right] = \left[\frac{n-1}{r}\,\frac{\partial y}{\partial r}\right] = \left[-\,\frac{\partial y}{\partial t}\right] \tag{92}$$

Din comparaţia primului termen cu al treilea rezultă

$$\left[\frac{dy}{\partial r}\right] = \frac{n-1}{r},$$

sau folosind relaţia (91)

$$[R' \cdot T] = \frac{n-1}{r}$$

sau încă

$$\left[\frac{R'}{R} \cdot RT\right] = \left[\frac{R'}{R}\right] = \frac{n-1}{r}. \tag{93}$$

De aici prin integrare în raport cu r

$$[R] = c \cdot r \tag{94}$$

c fiind o constantă de integrare.

Comparînd acum primul cu ultimul termen al relaţiilor (92)

$$\left[\frac{\partial y}{\partial r}\right]^2 = \left[-\,\frac{\partial y}{\partial t}\right],$$

avem, în baza relaţiei (90),

$$[\dot{R}T]^2 = [-\,R\dot{T}]. \tag{95}$$

Însă derivînd relaţia (94) în raport cu r obţinem

$$[\dot{R}] = c$$

şi deci (95) devine

$$c^2[T]^2 = -\left[RT\frac{\dot{I}}{T}\right] = -\left[\frac{\dot{I}}{T}\right],$$

sau

$$\left[\frac{\dot{I}}{T^3}\right] = -\,c^2, \tag{96}$$

de unde prin integrare

$$\left[\frac{1}{2}\frac{1}{T^2}\right] = c^2\,(t - to),$$

sau

$$[T] = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\,(t - to)}} \tag{97}$$

Relaţiile (94) şi (97) permit să scriem

$$y = RT = \frac{r}{\sqrt{2\,(t - to)}}. \tag{98}$$

şi astfel obţinem noua variabilă cautată.

14. Cu această valoare, ecuaţia (89) capătă forma

$$u'' + \left(\frac{n-1}{y} + \frac{y}{2}\right) \cdot u' = 0 \tag{99}$$

şi nu depinde decît de y, cum era de aşteptat.

O primă integrare dă

$$u' = \frac{A_0}{y^{n-1}} \cdot e^{-y^2/4}$$

iar a doua integrare soluţia aşteptată

$$u = A_0 \int \frac{1}{y^{n-1}} \cdot e^{-y^2/4} \cdot dy + B_0 \tag{100}$$

unde A_0 şi B_0 se determină în funcţie de condiţiile particulare ale fiecărei probleme examinate. Valorificarea integralei se face cu ajutorul tabelelor.

Dacă revenim la transformarea de coordonate (3) şi ne mărginim la medii omogene şi izotrope, constatăm că variabila y este de fapt

$$y = \frac{r}{\sqrt{2a\,(t - to)}} \quad ; \quad a = \frac{\lambda}{C\gamma}$$

Or, această expresie se poate exprima simplu cu ajutorul unui criteriu adimensional cunoscut din teoria conducţiei prin solide

$$Fo = \frac{a\,(t - to)}{r^2},$$

cunoscut sub denumirea de criteriul lui Fourier, deoarece

$$y = (2Fo)^{-\frac{1}{2}} \tag{101}$$

astfel că ecuaţia (99) este de fapt o formă criterială particulară a ecuaţiei căldurii. Mărginirea la un singur parametru restrînge simţitor posibilităţile acestei ecuaţii, Totuşi, soluţiile date se aplică avantajos la studiul unui semispaţiu, al unui gol cilindric sau sferic într-un masiv indefinit etc., cînd se dau temperaturile pe suprafaţa de delimitare şi la infinit.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПЕРЕМЕННЫХ, ОТНОСЯЩИХСЯ К УРАВНЕНИЯМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Цель настоящего сообщения состоит в том, чтобы найти преобразования координат, не изменяющих в n-мерном пространстве уравнения теплопроводности, но производящих ковариантное преобразование функции температуры.

Применяя классический анализ и матричное исчисление, находим следующие преобразования

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c\,\frac{\sum_i \alpha_{ik}\,(x_i - 2k_i)}{t - t_0} + n_k \\ \tau &= -\frac{c^2}{t - t_0} + c_0 \\ u &= \frac{A_0}{(t - t_0)}\, n/_2 \cdot \varphi \cdot \exp.\left[\frac{-\sum_i x_i^2 + 4\sum_i k_i\,(x_i - k_i)}{4\,(t - t_0)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c\sum_i \alpha_{ik}\,[x_i + 2k_i\,(t - t_0)] + n_k \\ \tau &= c^2\,(t - t_0) + c_0 \\ u &= A_0 \cdot \varphi \cdot \exp.\left[\sum_i k_i\,x_i + \sum_i k_i^2\,(t - t_0)\right], \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

первое из которых выявляет существование «фундаментального решения» Пуассона, а второе представляет обобщенное подобие.

В этих формулах (x_i, t) представляют первоначальные переменные, относящиеся к функции температуры u и (y_i, τ), а новые переменные соответствуют новой функции температуры v.

α_{ik} представляют направляющие косинусы произвольного, но постоянного вращения осей координат, k_i — составляющие произвольного вектора, n_i — то же, а t_0 и c_0 — произвольные постоянные. В дальнейшем автор развивает простой метод, основанный на расчете делителей, для отыскания преобразования, превращающего n-мерное уравнение теплопроводности в обычное дифференциальное уравнение, интегралы которого получаются простыми и квадратурами.

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DE VARIABLES RELATIVES À L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

(RÉSUMÉ)

Le but de cet article est de trouver les transformations des coordonnées qui, dans l'espace n-dimensionnel, laissent inchangée l'équation de la chaleur, tout en faisant une transformation covariante de la fonction de température.

En employant l'analyse classique et le calcul matriciel, on trouve les transformations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c\,\frac{\sum_i \alpha_{ik}\,(x_i - 2k_i)}{t - t_0} + n_k \\ \tau &= -\frac{c^2}{t - t_0} + c_0 \\ u &= \frac{\Delta_0}{(t - t_0)}\, n/_2 \cdot \varphi \cdot \exp.\left[\frac{-\sum_i x_i^2 + 4\sum_i k_i\,(x_i - k_i)}{4\,(t - t_0}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

et

$$\left.\begin{aligned} y_k &= c\sum_i \alpha_{ik}\,[x_i + 2k_i\,(t - t_0)] + n_k \\ \tau &= c^2\,(t - t_0) + c_0 \\ u &= A_0 \cdot \varphi \cdot \exp.\left[\sum_i k_i\,x_i + \sum_i k_i^2\,(t - t_0)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

dont la première met en évidence l'existence de la « solution fondamentale » de Poisson et la deuxième représente une similitude généralisée.

Dans ces formules $(x_i,\ t)$ représentent les variables initiales, relatives à la fonction de température u, et $(y_i,\ \tau)$ les nouvelles variables correspondant à la nouvelle fonction de température φ.

Les α_{ik} représentent les cosinus directeurs d'une rotation arbitraire mais constante des axes de coordonnées, les k_i sont les composantes d'un vecteur arbitraire, les n_i, de même, et t_0 et c_0 des constantes arbitraires.

On développe ensuite une méthode simple, basée sur le calcul des diviseurs, pour trouver la transformation qui change l'équation n-dimensionnelle de la chaleur en une équation différentielle ordinaire, dont les intégrales s'obtiennent par de simples quadratures.

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. Gantmaher, *Teoria matrif.* Gostehizdat, Moscova, 1953.
2. I. M. Ghelfand, *Lekfii po lineinoi alghebre.* Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1951.
3. Ed. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique.* Tome III, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
4. A. N. Tihonov i A. A. Samarski, *Uravnenia Matematiceskoi Fiziki.* Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul V, nr. 3—4, 1954

REFERATE

În această rubrică se publică lucrările de nivel ştiinţific superior, în care se expun:
— stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se totodată aspectul nou;
— generalizări asupra dezvoltărilor matematice în probleme de cercetări de mecanică aplicată,
— descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.

MIJLOACE DE PROTECŢIE COLECTIVĂ CONTRA ZGOMOTULUI DIN INDUSTRIE

DE

A. NECŞULEA

1. INTRODUCERE

Acţiunea de combatere a zgomotului în industrie, în special în cazangerie, se poate întreprinde nu numai prin mijloace de protecţie individuală, ci şi prin mijloace de protecţie colectivă.

Protecţia individuală constă în împiedicarea pătrunderii zgomotului în urechile unui muncitor, prin intercalarea între timpanul urechii şi aerul înconjurător a unui dispozitiv de izolare numit audioprotector. Cu toate că procedeul acesta dă rezultate satisfăcătoare, el trebuie completat ori de cîte ori este posibil şi cu mijloace de protecţie colectivă care au drept scop reducerea densităţii de energie sonoră în totalitatea spaţiului în care se află muncitorii.

Pentru muncitori, protecţia colectivă este superioară protecţiei individuale, deoarece îi dispensează de a mai purta un audioprotector, care nu este plăcut în ureche oricît de puţin supărător ar fi. Protecţia colectivă poate fi necesară chiar ca un auxiliar al protecţiei individuale, spre a-i mări eficacitatea.

Reducerea densităţii energiei sonore în spaţiul în care se produce zgomotul constituie acţiunea de bază a protecţiei colective şi se poate realiza prin următoarele două procedee:

— Absorbţia unei mari cantităţi de energie sonoră din spaţiul perturbat de zgomot.

— Izolarea sursei de zgomot.

Deşi ultima din aceste două modalităţii este mult mai eficace decît prima, dificultăţile de a o aplica fac adesea să se folosească mai mult cea dintîi. În cele ce urmează ne vom ocupa pe scurt de amîndouă.

2. TEORIA DIFUZĂRII ENERGIEI SONORE ÎN ÎNCĂPERI

Termenii şi formulele întrebuinţate în această expunere aparţin concepţiei distribuţiei sonore difuze. Distribuţia sonoră difuză presupune o repartiţie uniformă a energiei sonore în spaţiu, ceea ce înseamnă o densitate şi o transmisie de energie egală pretutindeni şi în toate direcţiile încăperii. Densitatea energiei

sonore crește atîta timp cît debitul sursei sonore servește la umplerea rezervorului pe care-l constituie încăperea și nu rămîne staționară decît după ce debitul sursei egalează pierderile prin pereții încăperii. Pierderile sînt indicate prin coeficientul de absorbție α, definit ca raportul între energia absorbită de suprafața peretelui și energia incidentă pe această suprafață, adică energia care cade pe această suprafață avînd un drum rectiliniu ca o rază.

Interdependența dintre mărimile care determină valoarea densității de energie se poate stabili printr-o ecuație a cărei rezolvare [1] necesită pe lîngă premisa existenței unui cîmp sonor difuz și acceptarea unor aproximații prealabile, ca de exemplu:

— puterea emisă de sursa sonoră este constantă, deci independentă de nivelul energiei sonore în încăpere;

— disipația de energie sonoră are loc numai pe pereți; în aer deloc;

— coeficientul de absorbție $\alpha = \frac{E_a}{E_i}$ este independent de puterea sursei.

În aceste condiții, urmărind figura 1 se poate exprima notînd cu E densitatea de energie, faptul că pe suprafața de perete dS cade numai o parte din energia EdV conținută în volumul dV și anume numai atît cît cuprinde unghiul solid care se reazimă pe periferia lui dS și are vîrful în dV, adică

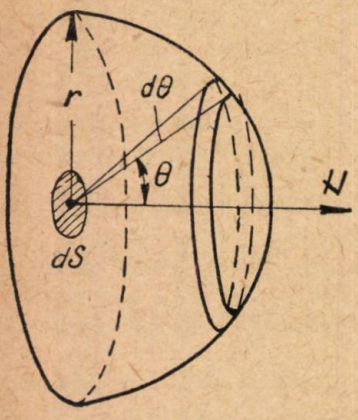


Fig. 1. — Deducerea teoriei cîmpului difuz.

$$EdV\frac{d\omega}{4\pi}. \tag{1}$$

Ținînd seama că volumul dV trebuie să cuprindă toate punctele de la care dS primește energie în același timp, situate deci în cerc în jurul lui dS, putem scrie expresia de mai sus în funcție de r și θ, distanța și unghiul lui dV față de dS și normala ON adică

$$\frac{1}{4}EdS\sin 2\theta\, d\theta\, dr. \tag{2}$$

Dacă c este viteza de propagare a sunetului, energia care cade într-o secundă pe dS este

$$\frac{1}{4}E\,ds\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=c}\sin 2\theta\, d\theta\, dr. \tag{3}$$

Deci, puterea incidentă pe dS este

$$\frac{1}{4}Ec\,dS \tag{4}$$

iar puterea absorbită

$$\frac{1}{4}Ec\alpha\,dS. \tag{5}$$

De unde puterea absorbită, în toată încăperea a cărei suprafață interioară este S, este

$$\frac{1}{4}Ec\int\alpha dS = \frac{1}{4}E\,c\,A. \tag{6}$$

Dacă puterea sursei este W, creşterea intensităţii sonore în încăpere este

$$W - \frac{1}{4} EcA = \frac{\delta}{\partial t}(EV) = V\frac{dE}{dt}. \tag{7}$$

Prin integrare, obţinem ecuaţiile care caracterizează cele trei faze prin care trece densitatea de energie în încăpere de la începerea emisiei sursei sonore şi pînă la încetarea ei.

Punînd condiţia la $t = 0$, $E = 0$ obţinem ecuaţia

$$E = \frac{4W}{\Delta c}\left(1 - e^{-\frac{Ac}{4V}t}\right) \tag{8}$$

corespunzătoare creşterii energiei în încăpere, după încetarea emisiei sursei. Ea este reprezentată în figura 2 prin curba 1.

Punînd condiţia $t = \infty$, obţinem valoarea energiei staţionare în încăpere dată de relaţia

$$E_s = \frac{4W}{Ac} \tag{9}$$

şi reprezentată prin dreapta 2 din figura 2.

În sfîrşit, punînd condiţia $E = E_s$ şi $W = 0$ pentru $t = 0$, momentul în care întrerupem emisia sursei, obţinem ecuaţia

$$E = \frac{4W}{Ac} e^{-\frac{Ac}{4V}t}, \tag{10}$$

corespunzătoare descreşterii densităţii de energie, reprezentată în figura 2 prin curba 3.

Dacă notăm cu T timpul necesar pentru ca energia staţionară să descrească, după încetarea emisiei sursei, la a milioana parte din valoarea sa iniţială, observăm că din ecuaţia (10), putem deduce ecuaţia care determină pe T (cunoscut în acustica încăperilor sub numele de durată de reverberaţie) şi anume

$$T = \frac{KV}{A}, \tag{11}$$

unde K este o constantă cu dimensiuni.

Din formulele precedente rezultă că în ipoteza existenţei unui cîmp sonor difuz, sursa de zgomot produce în încăpere o densitate de energie sonoră invers proporţională cu absorbţia sonoră de care este capabilă încăperea. Această absorbţie exprimată prin următoarea formulă

$$A = \Sigma \alpha_i S_i$$

este maximă pentru cazul cînd $\alpha = 1$; ΣS_i reprezintă totalitatea suprafeţei interioare a încăperii, în care intră deci, nu numai pereţii laterali, dar şi tavanul şi pardoseala. Acest caz de absorbţie maximă ne conduce la suprimarea ipotetică a reflecţiilor în spaţiul în care se găseşte sursa sonoră, adică la o situaţie echivalentă, din punctul de vedere acustic, cu ceea ce se întîmplă în aer liber.

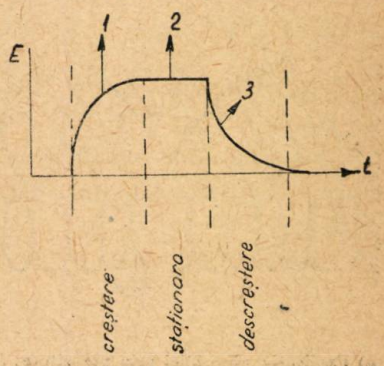


Fig. 2. — Variaţia densităţii de energie sonoră într-o încăpere.

Acoperirea cu material absorbant a întregii suprafețe interioare a încăperii, astfel încît să dea absorbția maximă, prezintă dificultăți tehnice și economice care o fac irealizabilă. O soluție aplicabilă ar fi deci numai aceea care pe un spațiu redus ar putea realiza o absorbție mare, adică o soluție în care coeficientul de absorbție ar deveni mai mare decît 1. Deși la prima vedere un astfel de coeficient de absorbție supraunitar pare o absurditate, el există totuși și se justifică după cum vom vedea în cele ce urmează. Prin urmare, un tratament cu structuri avînd coeficient de absorbție supraunitar, folosite singure sau combinate cu absorbanți avînd coeficient de absorbție subunitar, constituie tocmai soluția care ne interesează.

Așadar în practică vom folosi două feluri de mijloace de absorbție sonoră, ale căror proprietăți le recapitulăm mai jos.

3. ABSORBANȚI SUBUNITARI

În categoria acestor absorbanți intră toate materialele și structurile al căror coeficient de absorbție rămîne, potrivit definiției stabilite mai înainte, mai mic decît unitatea. Din această categorie fac parte trei feluri de absorbanți — diferențiați între ei prin modul în care se face absorbția — și anume:

— materiale poroase
— structuri cu plăci flexibile
— structuri cu plăci perforate.

Fiecare din aceste genuri de absorbanți este caracterizat prin materialul sau soluția constructivă, care permite utilizarea principiului fizic de absorbție sonoră pe care voim să-l aplicăm, valoarea coeficientului de absorbție pentru diferite frecvențe și posibilitatea de a predetermina prin calcul variația absorbției cu frecvența.

a. **Absorbanți poroși.** Materialele poroase realizează absorbția sonoră datorită faptului că particulele de aer din pori absorb de la unda incidentă energia necesară mișcării lor, sub acțiunea presiunii sonore. Această energie o pierd apoi în frecările de pereții interiori ai porului, transformînd astfel o parte din energia sonoră incidentă în căldură. Absorbția maximă se produce pentru viteza maximă a particulelor. Coefi-

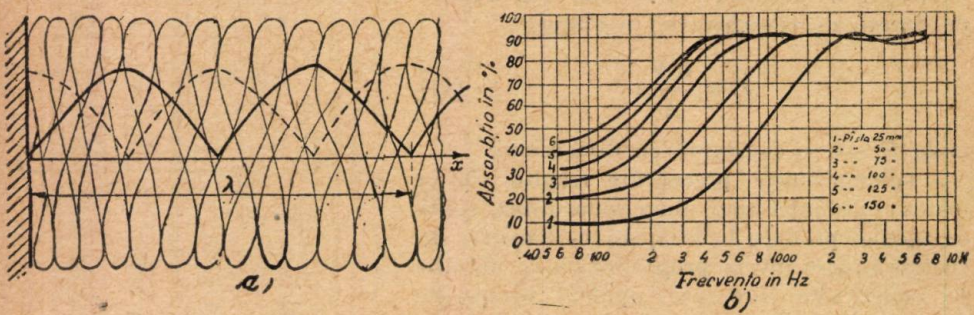


Fig. 3

a) **Explicația absorbției prin porozitate;** *b)* **dependența absorbției prin porozitate de grosimea materialului.**

cientul de absorbție al materialului va avea deci eficacitate mare numai pentru acele frecvențe sonore, pentru care lungimea de undă este mică față de grosimea materialului așezat pe pereți. Numai în acest caz eventualele antinoduri de viteză, în care viteza particulelor este maximă, se află în interiorul materialului (fig. 3 *a*).

În figura 3, *b*, sînt reprezentate curbele obținute prin măsurarea variației coeficientului de absorbție în funcție de frecvență pentru diferite grosimi ale stratului de material absorbant așezat pe un perete. Din aceste curbe rezultă ceea ce am afirmat

înainte. Coeficientul de absorbție la frecvențe joase crește odată cu grosimea stratului de material absorbant. După atingerea valorii maxime, el rămîne practic constant și independent de frecvență. Această valoare maximă nu depinde decît de mărimea rezistenței de frecare în interiorul porilor. În cazul cînd această rezistență face ca impedanta acustică a materialului absorbant să devină egală cu rezistența acustică a aerului, coeficientul de absorbție al materialului poate deveni chiar 1.

Dacă în loc să fie lipit de un perete rigid, stratul de material absorbant ar fi depărtat de perete la o distanță d, atunci coeficientul de absorbție capătă valoare maximă pentru toate frecvențele corespunzătoare acelor lungimi de undă λ pentru care d este un multiplu impar de $\frac{\lambda}{4}$.

În categoria materialelor poroase intră: anumite tencuieli, stofele, vata de bumbac, vata de sticlă și vata de zgură. Din toate acestea numai diferitele feluri de vată, montate în saltele de cel puțin 10 cm grosime și avînd o densitate cuprinsă între 30 și 80 kg/m^3, au o eficacitate mulțumitoare pentru o gamă mai întinsă de frecvențe.

Un material poros, în special cînd este folosit într-un atelier, trebuie să fie și incombustibil și să nu permită cuibărirea insectelor într-însul. Materialele care satisfac aceste condiții sînt vata de sticlă și vata de zgură. Prima însă, deși are o absorbție ceva mai mare decît a doua, nu este recomandabilă fiindcă este sfărămicioasă și prezintă un pericol pentru sănătatea lucrătorilor care o manipulează, deoarece sfărămăturile vatei de sticlă sînt ca niște ace foarte fine care provocaă iritația și inflamația mucoaselor în care pătrund.

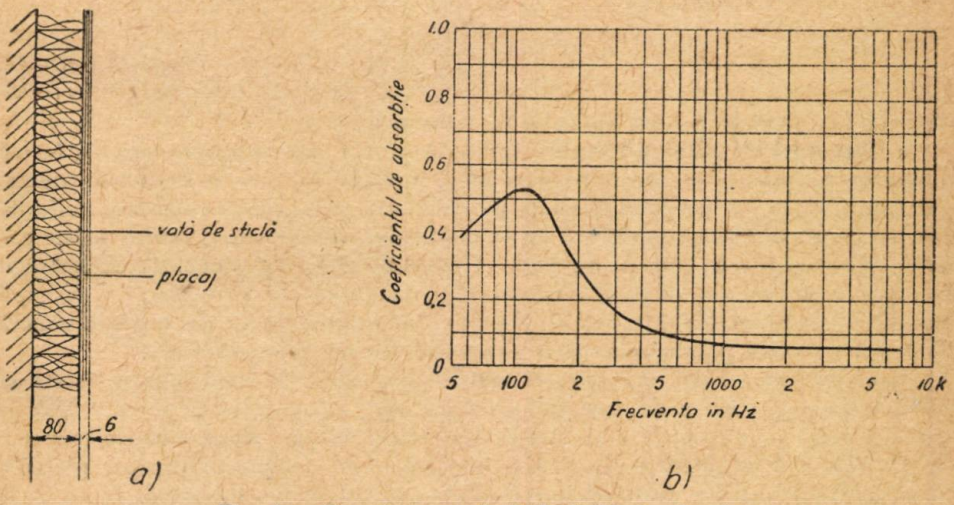


Fig. 4. — Structura cu placă flexibilă de placaj.

O predeterminare prin calcul a proprietăților absorbante ale unui material poros este foarte laborioasă și neprecisă. Din această cauză deducerea caracteristicilor de absorbție sonoră a unui material poros se face numai prin măsurători de laborator.

***b.* Structuri cu plăci flexibile.** Aceste structuri sînt formate dintr-o placă flexibilă de: placaj, fibră, material plastic sau metal, la periferia căreia se află o ramă destinată să țină placa la o distanță d de perete (fig. 4, *a*). Spațiul de aer dintre placă și perete se umple uneori cu un material poros.

Absorbția este cauzată, ca și la materialele poroase, tot de frecare. Sub acțiunea presiunii sonore placa se deplasează absorbind astfel o parte din energia incidentă. Frecările interne și cele din punctele de reazem ale plăcii transformă în căldură energia absorbită pentru mișcare. Structura formează un sistem oscilant mecanic în care masa este dată de masa plăcii, iar cedanța *) de elasticitatea plăcii și a spațiului de aer închis în spatele ei. Absorbția este maximă pentru frecvența de rezonanță a acestui sistem oscilant. Valoarea coeficientului de absorbție depinde de măsura în care rezistența de frecări determină o impedantă a plăcii mai mult sau mai puțin apropiate de rezistența specifică a aerului.

Pentru lărgirea benzii de frecvențe absorbite se mărește amortizarea sistemului prin umplerea spațiului din spatele plăcii cu un material poros. Coeficientul de absorbție la aceste structuri depășește rareori 0,5 din cauza dificultăților de potrivire a rezistenței de frecări. Înfățișarea unei curbe tip se vede în figura 4, *b*.

Valoarea coeficientului de absorbție nu se poate predetermina prin calcul. În schimb, frecvența de rezonanță la care se obține absorbția maximă se poate calcula prin analogie cu circuitele electrice oscilante. Ea este

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{P}{dm}},$$

unde dacă exprimăm masa de placă pe m^2 în m kg distanța în spatele plăcii, d în cm, viteza de propagare a sunetului $c = 340$ m/s, masa specifică a aerului $\rho = 1{,}29 \times 10^{-3}$ g/cm^3, obținem frecvența f în Hz cu formula

$$f = \frac{606}{\sqrt{md}},$$

utilizată în calculele pentru aplicații de tratament.

c. **Structuri cu plăci perforate.** Aceste structuri sînt asemănătoare, ca formă și așezare pe perete, cu structurile cu plăci flexibile de care se deosebesc numai prin faptul că în loc de plăci flexibile pline folosesc plăci rigide perforate uniform. Fiecare gaură din placa perforată cu celula fictivă de aer care-i revine în spațiul dintre placă și perete (fig. 5, *a*), poate fi considerată un rezonator Helmholtz. Frecarea masei de aer în gîtul rezonatorului, adică de pereții perforației, asigură absorbția, transformînd în căldură o parte din energia luată de la unda sonoră incidentă necesară pentru mișcarea pistonului de aer din perforație.

Controlul absorbției se reduce la controlul frecării. În mod practic acesta se realizează prin așezarea de material cu rezistență de amortizare convenabilă, la unul din capetele gîtului în care se mișcă pistonul de aer. Acest material poate fi un strat subțire de pînză poroasă sau sugativă, lipit pe partea dinspre perete a plăcii perforate, ori un material poros ca vata de sticlă sau de zgură, introdus în tot spațiul dintre placă și perete.

Banda de frecvențe absorbite crește cu rezistența de frecare (fig. 5, *b*).

Frecvența de rezonanță la care are loc absorbția maximă este frecvența rezonatorului corespunzător unei singure găuri din placa perforată. Ea se calculează cu formula

$$f_{rez} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{V \cdot l_{ef}}},$$

*) Cedanța este raportul dintre deplasare și forță.

unde s-a notat cu c, viteza de propagare a sunetului = 340 m/s, S, secțiunea gîtului rezonatorului în m², V, volumul celulei fictive a rezonatorului în m³, l_{ef}, lungimea efectivă a gîtului rezonatorului în m, și cu l_{ef}, $l + 0{,}8\ D$ unde l reprezintă lungimea reală iar D diametrul găurii. Coeficientul de absorbție maximă la această frecvență se calculează cu formula

$$\alpha_{rez} = \frac{4\mu'}{(1+\mu')^2},$$

unde $\mu' = \dfrac{R}{n \cdot \rho c}$, cu R reprezintă rezistența datorită frecărilor într-o singură gaură, n, numărul găurilor pe m², iar ρc rezistența specifică a aerului (440 $kg \cdot m^{-2} sec^{-1}$).

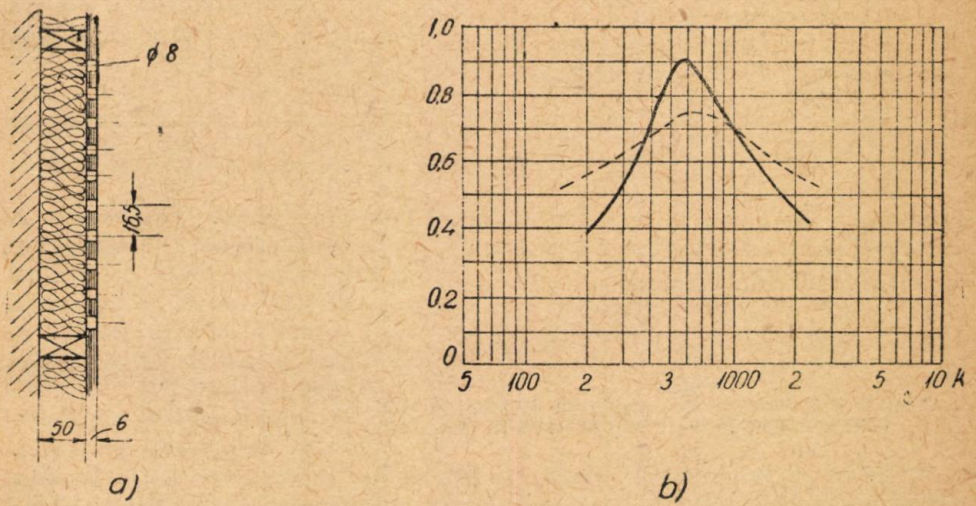


Fig. 5. — Structura din placa perforată de placaj. Perforația 18% din suprafața plăcii.

Banda de frecvențe în care coeficientul de absorbție este mai mare decît jumătatea valorii lui la rezonanță se calculează cu formula

$$f - \frac{1}{f} = \pm n\sqrt{GV}\left(\frac{R}{n\rho c} + 1\right),$$

unde: $f = \dfrac{\text{frecvența necunoscută de la limita benzii}}{\text{frecvența de rezonanță}}$,

iar $G = \dfrac{S}{l_{ef}}$, restul notațiilor avînd semnificația arătată mai înainte.

Toate aceste formule sînt valabile pentru o perforație formată din găuri circulare, egale ca diametru și așezate la aceeași distanță între ele. Formulele se deduc cu ajutorul teoriei rezonatorului Helmholtz.

Se poate ca perforația să aibă și alte forme de găuri, de pildă dreptunghiulare. În acest caz formulele de calcul corespunzătoare formei găurii sînt mai puțin sigure deși proprietățile absorbante ale structurii rămîn la fel de bune; fapt care se dovedește prin măsurările făcute în laborator.

4. ABSORBANȚI SUPRAUNITARI

În definiția coeficientului de absorbție s-a plecat de la ipoteza că energia incidentă ajunge pe suprafața absorbantă numai în linie dreaptă, astfel încît suprafața absorbantă coincide cu secțiunea plană a unui tub ale cărui generatoare sînt întotdeauna paralele cu axa tubului (fig. 6, *a*). Prin urmare conform ipotezei, asupra suprafeței nu cade niciodată mai multă energie decît poate trece prin tub. În realitate din cauza difracției, cade uneori asupra suprafeței mai multă energie decît cea corespunzătoare dimensiunilor tubului. Aceasta se întîmplă în special în cazul cînd suprafața absorbantă este mai mică decît lungimea de undă corespunzătoare frecvenței care trebuie absorbită și este depărtată de perete (fig. 6, *b*).

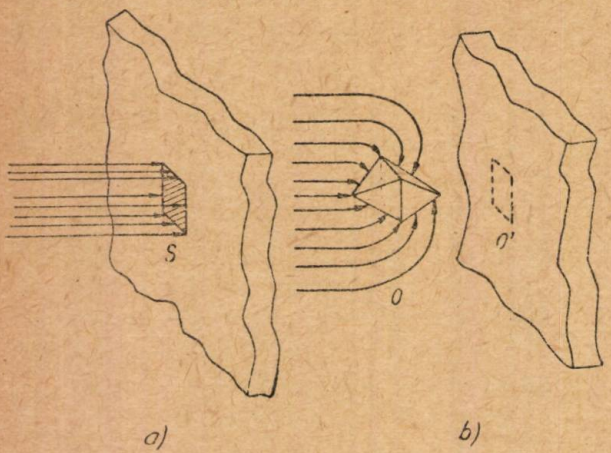


Fig. 6
a) Absorbția fără difracție; *b*) absorbția cu difracție; în *b*) *O'* reprezintă proiecția lui *O* egală în suprafață cu *S*.

În cazul acesta energia reală absorbită poate întrece energia incidentă corespunzătoare tubului cu generatoare rectilinii și coeficientul de absorbție $\alpha = \frac{E_a}{E_i}$ devine astfel supraunitar. La măsurarea coeficientului de absorbție se întîlnesc adesea situații de acestea care în interpretarea strictă a definiției fără a se ține seama de difracție, par lipsite de sens [2].

Rezonatorii de tip Helmholtz, incorporați în perete, la distanță mare unul de altul, realizează pentru frecvențele joase tot o absorbție supraunitară. Absorbția în m² corespunzătoare unui singur rezonator, pentru banda în care această absorbție este mai mare decît jumătate din valoarea absorbției la rezonanță este

$$A = \frac{\lambda_{rez}^2}{2\pi} \cdot \frac{4\mu}{(f^2 + \mu)^2 + \left(f - \frac{1}{f}\right)^2 \frac{G}{\lambda_{rez}}},$$

unde λ_{rez} reprezintă lungimea de undă pentru care rezonatorul intră în rezonanță și dă absorbția maximă, $\mu = \frac{R}{\frac{2\pi\rho c}{\lambda_{rez}^2}}$, iar restul notațiilor are semnificația întîlnită mai înainte. Se vede că pentru $\mu = 1$ și frecvența de 130 Hz, un astfel de rezonator absoarbe la rezonanță aproximativ 1 m², adică echivalentul unei suprafețe absorbante de 1 m² care ar avea coeficientul de absorbție $\alpha = 1$, deși suprafața absorbantă nu este decît secțiunea gîtului, care poate fi de 10 000 ori mică decît 1 m².

Rezonatorii nu au însă eficacitate mare decît pentru o singură frecvență, așa că utilizarea lor nu este indicată decît în cazuri speciale.

5. ABSORBANȚI RECOMANDABILI PENTRU APLICAȚII ÎN ATELIERE ȘI HALE INDUSTRIALE

Din categoriile de materiale și structuri arătate mai înainte care se găsesc la noi în țară, numai cîteva sînt potrivite pentru aplicații destinate combaterii zgomotului în industrie. Criteriile de selecționare a celor indicate sînt: eficacitatea din punct de vedere acustic și convenienta din punctul de vedere al protecției muncii, al securității contra incendiului și al economiei. Eficacitatea acustică este necesară pentru a suplini lipsa de spațiu disponibil pentru așezarea absorbanților.

După aceste criterii rezultă că din materialele poroase numai vata de sticlă și vata de zgură ar putea corespunde condițiilor impuse pentru sunetele înalte, bineînțeles. Deoarece vata de sticlă este casantă, ea este mai puțin indicată decît vata de zgură care nu este casantă. Așa dar, singurul material poros recomandabil rămîne vata de zgură.

Structurile cu plăci flexibile nu sînt recomandabile din cauză că au coeficientul de absorbție mic și ocupă o suprafață mare.

Structurile cu plăci perforate sînt indicate în cazul cînd componența spectrală a zgomotului prezintă un maxim accentuat care poate fi absorbit printr-o perforare adecvată a plăcilor.

Rezonatorii individuali, din cauza absorbției lor selective, nu au eficacitate decît pentru o frecvență unică, deci nu se pot folosi convenabil decît în cazul cînd sursa de zgomot care trebuie combătut are o singură frecvență, de preferință foarte joasă și constantă, cum este de pildă zgomotul unui motor.

Prin urmare, numai absorbanții la care intervin fenomenele de difracție și absorbanții care au la bază vată de zgură apar deocamdată ca singurii recomandabili în țara noastră pentru aplicații destinate combaterii zgomotului în industrie.

Cercetările noastre, întreprinse cu scopul de a găsi cele mai avantajoase mijloace de absorbție a zgomotului industrial, ne îndreptățesc să propunem două structuri absorbante realizate prin combinarea calităților și eliminarea defectelor absorbanților prezentați mai înainte.

Prima din aceste structuri este de tipul subunitar și realizează o absorbție practic constantă în toată gama de frecvențe audibile, iar a doua este de tipul supraunitar cu bandă de absorbție controlabilă. Ele sînt descrise în cele ce urmează.

a. **Structură absorbantă subunitară pentru o gamă întinsă de frecvențe.** Am arătat pînă aici că din materialele poroase folosite ca absorbant de sunet numai vata de zgură este recomandabilă la noi pentru aplicații de tratament acustic în industrie. Ca la toate materialele poroase eficacitatea vatei de zgură este însă limitată la frecvențele înalte; pe cele joase le absoarbe foarte puțin. Spre a înlătura acest inconvenient am imaginat o structură absorbantă ale cărei detalii de construcție și materialul component sînt arătate în desenul alăturat (fig. 7 *a*).

În această structură, cele două plase de rabitz, împreună cu stratul de vată de zgură de 6 cm dintre ele, formează pentru frecvențele joase un sistem oscilant a cărui masă este masa vatei de zgură. Cedanța sistemului se datorește proprietăților elastice ale plasei de rabitz, iar rezistența de amortizare este dată de frecarea care se produce între firele de vată în timpul mișcării masei.

Proprietățile absorbante ale acestei structuri, din care s-au construit panouri, au fost măsurate într-o cameră de reverberație în condiții similare cu acelea în care structura va fi pusă să funcționeaze în aplicațiile de tratament acustic.

Metoda folosită pentru măsurare a fost aceea a determinării, de două ori, a duratei de reverberație în camera de măsurări — întîi în camera goală și al doilea

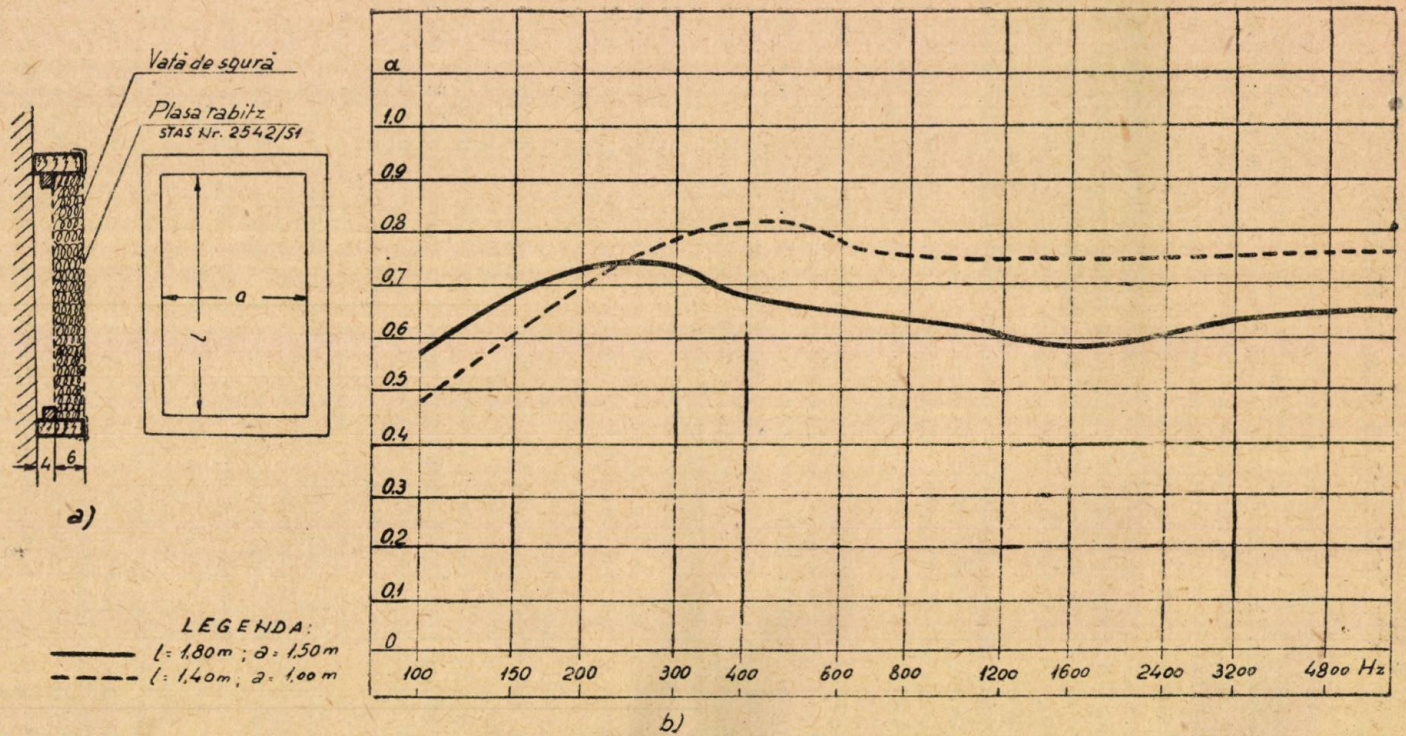


Fig. 7. — Structura absorbantă subunitară:
a) detaliu de construcţie; *b)* variaţia coeficientului de absorbţie cu frecvenţa.

în aceeași cameră după ce s-au montat pe pereți structurile absorbante. Dacă însemnăm cu V volumul camerei și cu T_1, T_2, A_1, A_2 durata de reverberație și absorbția totală la prima și a doua măsurare avem

$$T_1 = \frac{KV}{A_1} \text{ și } T_2 = \frac{KV}{A_2},$$

de unde

$$T_1 A_1 = T_2 A_2,$$

sau

$$A_2 = A_1 + A_p = \frac{T_1}{T_2} A_1,$$

unde A_p este absorbția materialului de probă care trebuie măsurat. Dacă însemnăm cu α_p coeficientul de absorbție al acestui material și cu S_p suprafața probei avem $A_p = \alpha_p S_p$. Introducînd această valoare în relațiile de mai sus, avem

$$A_p = KV\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Din valoarea lui A_p se deduce α_p deoarece suprafața probei S_p este cunoscută. Calculul se face cu formula lui Millington

$$A_p = \Sigma S_i l_n (1-\alpha_i)^{-1}.$$

Rezultatele măsurărilor efectuate se găsesc în tabloul nr. 1. Ele reprezintă media valorilor deduse prin calcul din 240 determinări experimentale.

Tabloul nr. 1

Coeficienții de absorbție la diferite frecvențe ale structurii din figura 7

f	100	150	200	300	400	600	800	1200	1600	2400	3200	4800
α'	0,49	0,60	0,70	0,77	0,82	0,80	0,75	0,75	0,75	0,76	0,77	0,77
α''	0,57	0,67	0,69	0,71	0,69	0,65	0,62	0,60	0,59	0,62	0,59	0,62

α' corespunde la panourile de dimensiuni 1,40×100 cm
α'' corespunde la panoul de dimensiuni 1,80×150 cm

Măsurarea s-a efectuat într-o cameră de reverberație cu următoarele caracteristici:

Volumul camerei = 195 m³, suprafața interioară = 222 m².

Suprafața panourilor măsurate = 22,4 m².

Cu datele din tabloul nr. 1 s-au trasat curbele din figura 7, *b*.

Valorile obținute la măsurări pentru coeficientul de absorbție arată că structura face parte din structurile subunitare de mare eficacitate asupra cărora are însă avantajul unei absorbții practic constante în toată gama de frecvențe audibile.

b. **Propunere de structură absorbantă supraunitară.** Ideea unor structuri asemănătoare cu cea pe care o propunem a mai fost realizată în cîteva variante. Varianta proiectată de noi diferă numai ca formă și dimensiuni de variantele cunoscute. Ea constă într-o construcție de formă octaedrică ale cărei fețe, egale între ele, sînt niște triunghiuri echilaterale cu latura de 29 cm (fig. 8, *a*).

Fiecare față este confecționată dintr-o placă perforată ignifugă căptușită în interiorul și exteriorul poliedrului cu un material poros. Dimensionarea și așezarea găurilor depinde de grosimea plăcii. În cazul unei plăci de tablă metalică de 1 mm grosime, absorbția dorită de noi în gama sunetelor mijlocii și înalte se obține cu găuri

de 20 mm diametru așezate la intersecțiile unei rețele ortogonale care determină o distanță de 45 mm între centrele lor. Căptușeala este de vată de zgură pusă într-un strat de 2 cm în interiorul și 2 cm în exteriorul structurii.

Structurile de acest fel se prind de tavanul atelierului depărtate la 100 cm între centrele lor. Prinderea se face fie prin suspendarea fiecărei structuri direct de tavan, fie prin așezarea ei de-a lungul unor cable fixate de pereții longitudinali ai atelie-

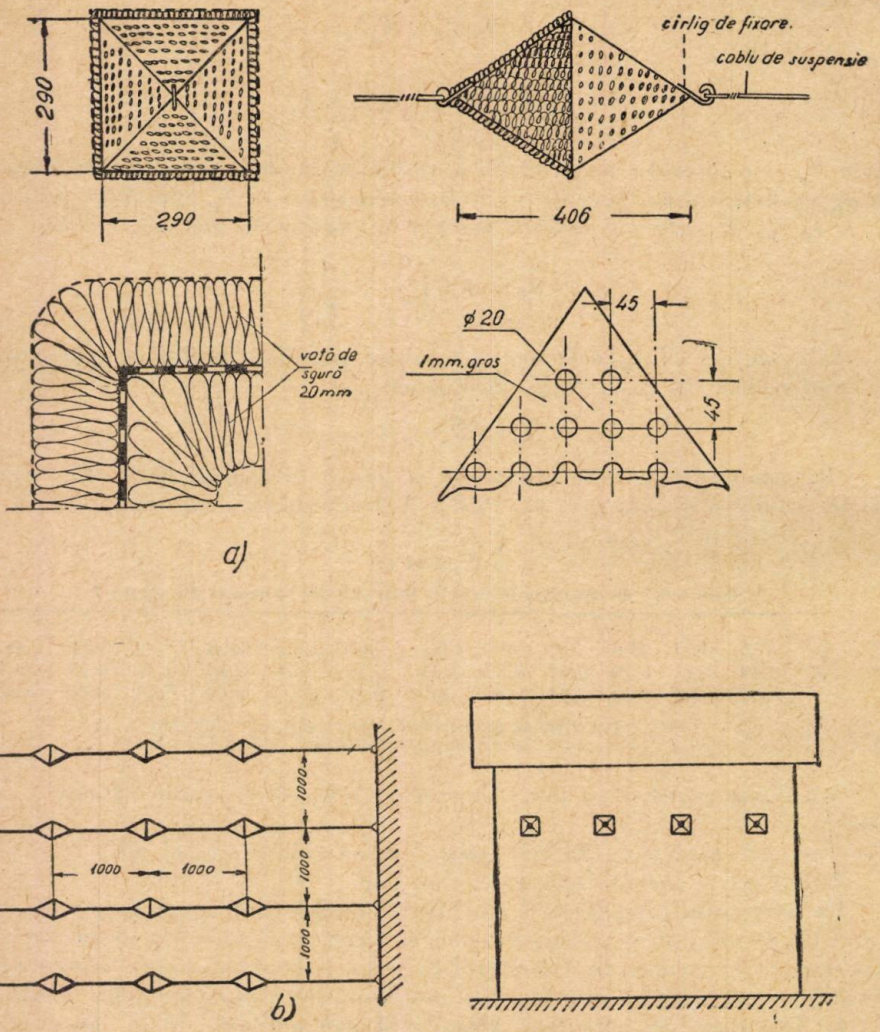


Fig. 8. — Structura absorbantă supraunitară:
a) detaliu de construcție; *b*) detaliu de așezare sub plafonul atelierului.

rului, care formează un tavan aparent mai jos decît tavanul real. În ultimul caz structurile stau tot la 100 cm distanță între centrele lor (fig. 8, *b*).

Proiectul acestei structuri supraunitare nu a fost încă executat, așa că performanțele ei determinate prin măsurări de laborator sînt deocamdată necunoscute. Se prevede totuși că valoarea coeficientului de absorbție va fi $\alpha = 1{,}5-2$.

6. IZOLAREA SURSEI DE ZGOMOT

Izolarea sursei de zgomot constituie procedeul cel mai eficace în acțiunea de combatere a zgomotului. Acest procedeu este însă cel mai puțin aplicabil în atelierele mari și în special în cazangerie, din pricina piedicilor pe care le pune procesului de producție. Principala dificultate apare cînd atelierul folosește podul rulant, căci izolarea sursei, care s-ar putea realiza de pildă printr-o compartimentare a atelierului, nu este posibilă deoarece împiedică deplasarea acestui pod.

Printr-o organizare rațională a muncii se poate totuși încerca izolarea sursei printr-o cameră izolatoare mobilă lipsită de pardoseală. Această cameră poate fi transportată cu podul rulant și așezată ca un clopot deasupra sursei de zgomot (fig. 9, *a*). Soluția este aplicată în U.R.S.S. și dă foarte bune rezultate [3].

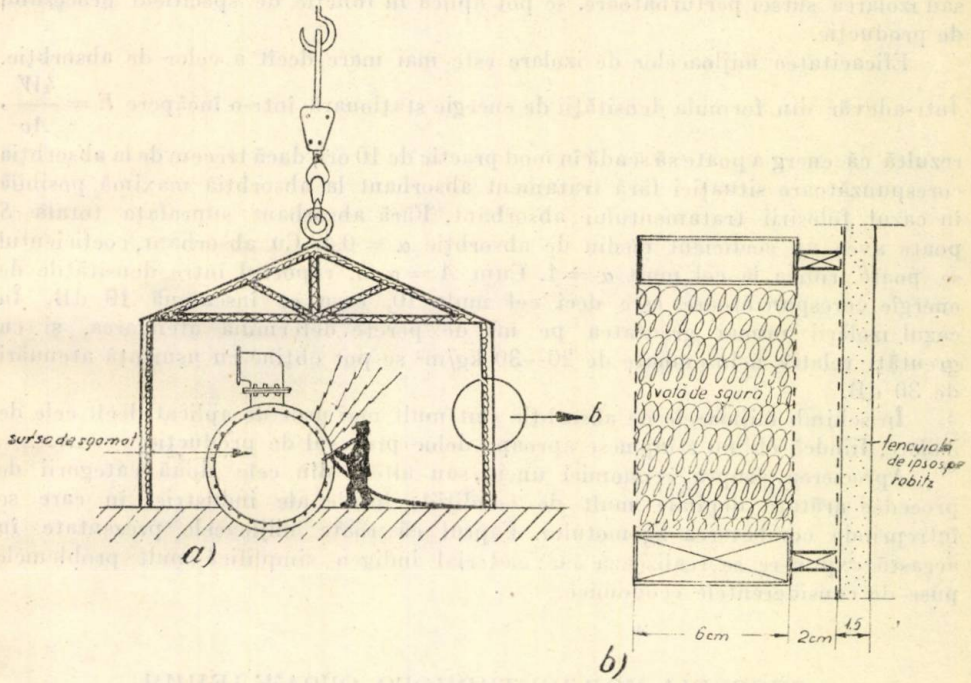


Fig. 9. — Izolarea sursei de zgomot prin camera izolatoare:
a) camera izolatoare; *b*) detaliu de construcție pereți.

O astfel de cameră izolatoare se poate construi după propunerea noastră dintr-o carcasă de fier profilat purtătoare a unor pereți (fig. 9, *b*) care, spre exterior sînt constituiți dintr-o placă de ipsos de 1,5—2 cm întărită cu un schelet de plasă de rabitz, iar spre interior dintr-o căptușeală de structuri absorbante de tipul celei arătate anterior (în fig. 7).

Intrarea în această cameră se face printr-o ușă obișnuită. Spre a nu slăbi izolația prin construirea de ferestre pentru lumină e preferabil să se folosească numai lumină artificială.

O astfel de cameră izolatoare nu cîntărește mai mult de 30—40 kg/m² și dă o atenuare a zgomotului de circa 30—35 dB, ceea ce reprezintă pentru nivelul perturbator o scădere acceptabilă din punctul de vedere al protecției muncii. Într-adevăr,

dacă zgomotul perturbator este de 100 dB cum este cazul într-o cazangerie, reducerea de 30 dB face ca zgomotul în afara camerei izolatoare să nu depășească 70 dB, deci se obține o valoare cu 5—10 dB mai puțin decît 75—80 dB, nivelul de zgomot admisibil din punctul de vedere al protecției muncii.

Calculele de atenuare s-au făcut luîndu-se în considerare numai greutatea pereților [4]. Căptușeala absorbantă prevăzută pentru a micșora zgomotul în interiorul camerei a fost și ea inclusă în greutatea pe m².

CONCLUZII

Mijloacele de protecție colectivă contra zgomotului în industrie, bazate pe una din cele două metode, diminuarea zgomotului în încăpere prin absorbție, sau izolarea sursei perturbatoare, se pot aplica în funcție de specificul procesului de producție.

Eficacitatea mijloacelor de izolare este mai mare decît a celor de absorbție. Într-adevăr din formula densității de energie staționară într-o încăpere $E = \frac{4W}{Ac}$, rezultă că energia poate să scadă în mod practic de 10 ori, dacă trecem de la absorbția corespunzătoare situației fără tratament absorbant la absorbția maximă posibilă în cazul folosirii tratamentului absorbant. Fără absorbant suprafața totală S poate avea un coeficient mediu de absorbție $\alpha = 0{,}1$. Cu absorbant, coeficientul se poate ridica la cel mult $\alpha = 1$. Cum $A = \alpha S$, raportul între densitățile de energie corespunzătoare este deci cel mult 10, ceea ce înseamnă 10 dB. În cazul izolării numai greutatea pe m² de perete determină atenuarea, și cu greutăți relativ neînsemnate de 20—30 kg/m² se pot obține cu ușurință atenuări de 30 dB.

În schimb mijloacele de absorbție sînt mult mai ușor de aplicat decît cele de izolare, fiindcă ele nu stînjenesc aproape deloc procesul de producție.

Aprecierea asupra economiei uneia sau alteia din cele două categorii de procedee arătate depinde mult de condițiile locale ale industriei în care se întreprinde combaterea zgomotului. Faptul că toate mijloacele prezentate în această expunere se realizează cu material indigen simplifică mult problemele puse de considerentele economice.

СПОСОБЫ КОЛЛЕКТИВНОГО ОГРАЖДЕНИЯ ОТ ДЕЙСТВИЯ ШУМА В ПРОМЫШЛЕННОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении изложены способы борьбы с шумом в промышленных цехах. Используется метод поглощения части вредной звуковой энергии и изолирования источника шума.

После краткого перечисления теоретических понятий, связанных с поглощением шума, приводятся технические способы разрешения этого вопроса, рекомендуемые для достижения преследуемой цели.

Один из этих способов основан на применении давно предложенной авторами поглощающей структуры, результаты которого были проверены лабораторными измерениями.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Вывод теории диффузного поля.

Рис. 2. — Изменение плотности звуковой энергии в помещении.

Рис. 3. — *а* — Объяснение поглощения пористыми материалами: *b* — зависимость поглощения пористыми материалами от толщины.

Рис. 4. — Структура гибкого листа фанеры.

Рис. 5. — Структура перфорированного листа фанеры. Площадь перфорации составляет 18% поверхности листа.

Рис. 6. — *а* — поглощение без диффракции; *b* — с диффракцией; в *b O'* представляет собой проекцию *O*, равную по площади *S*.

Рис. 7. — Подунитарная поглощающая структура: *а* — деталь постройки; *b* — изменения коэффициента поглощения в зависимости от частоты.

Рис. 8. — Сверхунитарная поглощающая структура: *а* — деталь постройки; *b* — деталь устройства под потолком цеха.

Рис. 9. — Изолирование источника шума изолирующей камерой: *а* — изолирующая камера; *b* — деталь строения стены.

MOYENS DE PROTECTION COLLECTIVE CONTRE LE BRUIT DANS L'INDUSTRIE

(RÉSUMÉ)

L'exposé présente les moyens de combattre le bruit dans les halles industrielles en appliquant la méthode de l'absorption d'une partie nuisible de l'énergie sonore et la méthode de l'isolation de la source du bruit.

Après une brève récapitulation théorique des notions ayant trait à l'absorption du son, on déduit les solutions techniques à recommander pour atteindre le but poursuivi.

L'une de ces solutions utilise une structure absorbante que l'Auteur a proposée depuis longtemps, et dont l'efficacité a été vérifiée par des expériences en laboratoire.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Déduction de la théorie du champ diffus.

Fig. 2. — Variations de la densité de l'énergie sonore dans une salle.

Fig. 3. — *a)* Explication de l'absorption par porosité; *b)* dépendance de l'absorption par porosité de l'épaisseur du matériel.

Fig. 4. — Structure à feuille flexible de placage.

Fig. 5. — Structure à feuille de placage perforée. Les perforations représentent 18% de la surface de la feuille.

Fig. 6. — *a)* Absorption sans diffraction; *b)* absorption avec diffraction. En *b)*, *O'* représente la projection de *O* d'une surface égale à celle de *S*.

Fig. 7. — Structure absorbante sous-unitaire: *a)* détail de construction; *b)* variations du coefficient d'absorption en raison de la fréquence.

Fig. 8. — Structure absorbante supra-unitaire: *a)* Détail de construction; *b)* détail montrant la position sous le plafond de l'atelier.

Fig. 9. — Isolement de la source de bruit par une chambre isolatrice: *a)* Chambre isolatrice; *b)* détail de la construction des parois.

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Furduev, *Elektroakustika*. OGHIZ, Moscova-Leningrad, 1948.
2. H. F. Olson, *Elements of Acoustical Engineering*. D. V. Nostrand-Toronto, New York, 1949.
3. Naviajski, *Ucenie o sumi*. Moscova, 1950.
4. S. P. Alexeev, S. I. Vorobiev i V. D. Jarinov. *Zvukoizolația v stroitelstve*. Gosudarstvennoe izdatelstvo stroitelnoi literaturi, Moscova, 1949.

N. ȘCELKACIOV și B. B. LAPUK, *Hidraulica subterană*. Ed. Tehnică, București, 1953.

Studiul curgerii fluidelor prin medii poroase primește în țara noastră o însemnătate din ce în ce mai mare, datorită aplicării acestuia pe scară din ce în ce mai întinsă într-o serie de domenii de deosebită însemnătate pentru economia națională ca: hidrogeologia apelor subterane, alimentarea cu apă, probleme de irigare și drenaj, construcții hidrotehnice, exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide etc. Manualul scris de V. N. Scelkaciov și B. B. Lapuk, cuprinde toate problemele principale care își găsesc aplicarea practică în domeniul exploatării zăcămintelor de hidrocarburi fluide și este prima carte în care hidraulica subterană a fost expusă suficient de clar și sistematic, pentru a putea fi accesibilă cititorilor începători.

Manualul se compune din cinci părți. Prima parte cuprinde noțiuni introductive, principii fundamentale și un scurt istoric, iar partea a doua este consacrată teoriei filtrării. În partea a treia au fost adunate problemele rezolvabile prin aplicarea metodelor simple ale calculului diferențial și integral și ca o excepție, s-au enunțat și cîteva probleme mai complicate și s-au analizat, fără a se reda calculul, rezultatele obținute prin aplicarea teoriei hidrodinamice superioare. Partea a patra conține teoria scurgerii nesimetrice spre sondă, teoria interferenței sondelor și studiul legilor după care are loc deplasarea conturului de apă spre sonde. Pentru a nu face aceste probleme inaccesibile începătorilor, rezolvarea riguroasă, care reclamă folosirea funcțiilor de variabile complexe și a ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale, nu a fost redată, ci s-a analizat fenomenul fizic, metoda generală de calcul și concluziile ce reies din fiecare formulă finală. În partea a cincea se găsește deducerea ecuațiilor diferențiale de scurgere a fluidelor prin medii poroase, integrarea acestora în cazurile cele mai simple și teoria analogiei dintre fenomenele de scurgere prin medii poroase și fenomenele electrodinamice și termice. Într-un ultim capitol, este redat un istoric detaliat al dezvoltării hidraulicii subterane.

Din redarea sumară a cuprinsului, reiese că manualul conține toate aspectele esențiale ale scurgerii fluidelor prin medii poroase cu aplicația la exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide, cu excepția teoriei regimului elastic care este omisă din lipsă de spațiu și datorită faptului că într-o monografie a profesorului Scelkaciov, aceasta este expusă sub o formă atît de accesibilă, încît poate fi folosită ca o anexă a manualului. Multe capitole sînt însoțite de aplicații practice foarte utile pentru studiul individual.

De la început se remarcă atenția deosebită pe care au dat-o autorii expunerii pentru ca aceasta să fie ușor de înțeles. Pentru înțelegerea problemelor fără a avea cunoștințe ample de geologia petrolului, exploatarea zăcămintelor de țiței și gaze și hidrogeologie, autorii au introdus în manual noțiuni elementare de clasificare a apelor subterane și de clasificare a regimurilor stratelor purtătoare de hidrocarburi fluide.

Teoria filtrării este prezentată cu foarte multe detalii, excelînd prin modul de expunere problema domeniului de aplicabilitate a legii liniare a filtrelor și a altor legi ale filtrării; se relevă de asemenea meritele deosebite ale acad. Pavlovski în acest domeniu.

În ce privește șirul problemelor rezolvabile prin aplicarea unui calcul diferențial și integral simplu, este demnă de remarcat metoda aproximativă de rezolvare a problemei scurgerii radiale nestaționare a unui lichid compresibil prin mediul poros, prin care se dă unui începător posibilitatea de intuire a aspectelor fundamentale legate de regimul elastic, a căror tratare exactă reclamă cunoștințe de matematică de nivel înalt.

Curgerea gazelor este prezentată sub toate aspectele, redîndu-se pentru prima oară încercarea lui B. B. Lapuk de rezolvare a problemei curgerii gazelor reale. Nu mai puțin

interesantă este discutarea influenței variațiilor viscozității și a abaterilor gazelor naturale de la legile gazelor perfecte asupra debitului sondelor și epuizării zăcămintelor gazeifere.

Teoria curgerii fluidelor eterogene este redată pe baza ultimelor rezultate de cercetare cunoscute. Pentru simplificare, s-a adoptat transformarea acad. Hristianovici, prin care problema curgerii staționare a unui fluid eterogen se reduce la aceea a curgerii staționare a unui lichid omogen incompresibil. Totodată, s-au redat metodele simple de tratare a curgerii eterogene nestaționare elaborate de C. A. Țarevici, prin intermediul cărora se pot face prevederi de producție într-o serie de cazuri practice.

În cadrul capitolului privitor la imperfecțiunea sondelor, se arată unele scăderi ale teoriei elaborate de Muskat și perfecționările aduse de Tihov și Șciurov, indicînd calea de urmat în rezolvarea problemelor practice.

Teoria dislocuirii țițeiului de către apă este tratată admițînd numai diferențe de viscozitate, deși diferențele de permeabilitate în diversele regiuni de curgere ar putea duce la erori apreciabile. Problema s-ar fi putut trata prin metode elementare ținînd seamă și de acest din urmă lucru. Autorii au renunțat probabil la acest mod de tratare, pentru a se obține relații mai simple.

Rezultatele teoriei curgerii nesimetrice spre sondă și a interferenței sondelor redate în partea a patra, sînt discutate amănunțit. În această parte, ar fi putut fi însă redate și rezultatele teoriilor aproximative privitoare la spălarea cu gaze și apă, considerată ca fenomen nestaționar.

Ultima parte care se ocupă în special de ecuațiile diferențiale ale hidraulicii subterane este tratată mai sumar, necuprinzînd toate formele acestora. Se redau însă indicații bibliografice ample în vederea documentării, respectiv completării cunoștințelor.

În rezumat, manualul de *Hidraulică subterană* de V. N. Scelkaciov și B. B. Lapuk conține un material foarte amplu și face accesibile o serie întreagă de probleme grele de curgere prin medii poroase, cititorilor fără o pregătire matematică prea pretențioasă. În plus, meritul cărții constă în oglindirea rezultatelor remarcabile obținute de oamenii de știință ruși și sovietici în acest domeniu. Atît stilul cît și tratarea metodică a problemelor fac posibilă urmărirea ușoară a raționamentelor și demonstrațiilor. Manualul este destinat, în general, studenților Institutului de petrol, tehnicienilor, inginerilor și geologilor din industria petroliferă. Poate fi folosit însă și de hidrogeologi și hidrotehnicieni.

N. Cristea

L. D. LANDAU i E. M. LIFȘIȚ, *Mehanika sploșnih sred.* (*Mecanica mediilor continue*). Gosudarstven noe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî, Moscova, 1950.

În literatura tehnică există un număr restrîns de lucrări care să cuprindă o expunere de ansamblu a mecanicii mediilor continue.

Autorii L. D. Landau și E. M. Lifșiț prezintă în cartea recent apărută, problemele principale a două capitole din mecanica mediilor continue, anume hidrodinamica și elasticitatea. Intenția autorilor a fost în special de a pune la dispoziția fizicienilor o tratare a problemelor care intervin în numeroase situații întîlnite în cercetările actuale în fizică.

Pentru acest motiv, s-a acordat o atenție deosebită prelucrării unor fenomene ca: termoconductibilitatea, viscozitatea corpurilor solide, vibrații și unde, reducînd pe de altă parte expunerea metodelor matematice de rezolvare (în special de elasticitate) sau a unor probleme cu caracter tehnic (teoria învelișurilor).

Autorii au completat ediția anterioară cu detalieri privind teoria mișcărilor sonice, a scurgerilor staționare, hidrodinamica arderilor (teoria detonațiilor) și dinamica relativistă a gazelor.

Pornind de la o diviziune a materialului pe categorii de fenomene, lucrarea prezintă avantajul de a ne introduce cu ușurință în rezultatele teoretice, independent de dificultățile matematice. În acest mod, înțelegerea materialului expus este imediată, putîndu-se cuprinde ansamblul chestiunilor tratate, independent de o documentare specială prealabilă. Aceasta face ca lucrarea să fie de interes practic și teoretic, chiar și pentru tehnicieni, oferind posibilități de informare destul de avansate în anumite direcții.

În privința ultimului capitol, privind corpurile solide, este de remarcat totuși o insuficientă tratare a unor elemente interesînd tehnica sau mai ales problemele actuale ale fizicei corpurilor solide deformabile. Ne referim la teoriile moderne ale corpurilor continui elasto-visco-plastice, ce urmăresc a face legătura prin simplificări teoretice de calcul cu teoria fizică structurală a corpurilor solide.

Acest capitol, care își găsește aplicația în studiul diferitelor corpuri metalice, a polimerilor înalți sau a diferitelor medii care se pot reduce la anumite scheme mecanice (de tip Voigt, Maxwell etc.), este de importanță actuală și este în primul rînd de resortul unei publicații de felul celei recenzate, de a le sistematiza.

Fizicienii ca Joffe, Frenkel, Davidenkov, Gubanov au adus contribuții actuale în această direcție. Din punct de vedere mecanic, în cărțile publicate recent, autorii Iliuzin, Sokolovski ș.a. expun rezultate de asemenea actuale în domeniul plasticității corpurilor.

În lucrări moderne de sinteză ca: *Teoria modernă a corpurilor solide* (Soitz) sau *Proprietățile mecanice ale polimerilor înalți* (T. Alfrey), capitolul amintit își găsește o importantă dezvoltare.

Totuși, în alte direcții, cum ar fi în problema suprafluidelor (interesînd în special fizica) ucrarea depășește nivelul tratat clasic și prezintă, pentru prima oară, rezultate noi, de mportant interes științific.

M. Mișicu

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE
PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII